

$$\begin{aligned}
& (A|I) \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} +2 \\ \\ \leftarrow \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ +1/2 \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ +3/2 \\ \leftarrow \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & -1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & (2) & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & 7/2 & 3/2 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Viimeinen pivotointi epäonnistuu, jonka tulkitsemme merkiksi siitä, että matriisilla ei ole käänteismatriisia. ‡

Edellä kuvattu menetelmä johtaa helposti hankaliin murtolukulaskuihin, mutta se on erittäin suoraviivainen ja sellaisena helppo omaksua.

Gaussin algoritmi (käänteismatriisin määrittämiseksi):

- (0) Aseta $k = 1$, $B(1) = (A|I)$.
- (1) Otetaan tukialkioksi (pivot element) alkio $b(k)_{kk}$.
- (2) Jos tukialkio on 0 ja tukialkion sarakkeessa tukialkion alapuolella on nollasta poikkeava alkio $b(k)_{rk}$, $r > k$, vaihdetaan rivit r ja k keskenään. Jos tukialkio on 0 ja sen alapuoleltaakaan ei löydy nollasta poikkeavaa alkioita, lopetetaan ja todetaan ettei käänteismatriisia ole olemassa.
- (3) Jaetaan tukialkion rivi tukialkiolla. (Eli tehdään tukialkio 1:ksi.)
- (4) Lisätään tukialkion rivi muihin riveihin sopivalla luvulla kerrottuna siten, että tukialkion ylä- ja alapuolella olevat alkion muuttuvat nolliksi.
- (5) Jos $k < n$, niin kasvatetaan k :ta yhdellä ja siirrytään kohtaan (1).
- (6) A^{-1} on saadun $n \times 2n$ -matriisin $B(k)$ oikea puolikas.

2.3 Determinantit ja niiden ominaisuudet

ec:laYRMdett

2.3.1 Permutaatiot

permutaatiot

Diskreetin matematiikan kurssilla tulemme tutkimaan äärellisten joukkojen erilaisia järjestyksiä eli permutaatioita. äärellisen joukon prototyyppinä käytämme nyt joukkoa $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Koulukurssissa on jo todettu, että $\mathbb{N}_n$ voidaan järjestää eli permutoida $n!$ tavalla.

Määritelmä 2.3.1. Joukon $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ bijektio itselleen on $\mathbb{N}_n$ -permutaatio. Merkitään $S_n = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n \text{ on bijektio}\} = \mathbb{N}_n$ -permutaatioiden joukko. Permutaation φ inversioiden lukumäärä p_φ on niiden parien $(j, k) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ lukumäärä, joille $1 \leq j < k \leq n$ ja $\varphi(j) > \varphi(k)$. Vaihto $\alpha_{jk} \in S_n$ on permutaatio, jolle

$$\begin{cases} \alpha(j) = k \\ \alpha(k) = j \\ \alpha(i) = i, \text{ kun } i \neq j, k \end{cases}.$$

Permutaatio on siis äärellisen joukon bijektio itselleen. Pienten joukkojen tapauksessa merkitsemme permutaatiota sen arvoluettelolla $\varphi = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$. Merkintä on periaatteessa huono, mutta paljon käytetty. Muista, että oikeasti permutaatio on kuvaus, eikä jono. Usein onkin pienten permutaatioiden tapauksessa havainnollisempaa piirtää kuvauksen nuolikaavio.

Esimerkki 2.3.2. (1) Jos $\varphi \in S_3$ ja $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3$ ja $\varphi(3) = 1$, niin se voidaan esittää

”arvojonona” tai ”nuolikaaviona”

$$\varphi = (2, 3, 1) \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & \searrow & 1 \\ 2 & \nearrow & 2 \\ 3 & \searrow & 3 \end{array} \quad \varphi$$

(2) Luetteloiden avulla on helppo esittää kaikki pienet permutaatiot.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1)\} \\ S_2 &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ S_3 &= \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\} \end{aligned}$$

(3) permutaation $\varphi = (2, 3, 1)$ inversioiden lukumäärän $p_{(2,3,1)} = 2$ näkee helposti kohdan (1) nuolikaaviosta.

(4) Kahdesta permutaatiosta yhdistämällä saatu kuvaus on myös permutaatio

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 1 & \searrow & 1 \\ 2 & \nearrow & 2 \\ 3 & \searrow & 3 \end{array} & \varphi & \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 3 \end{array} \\ & & \eta \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} 1 & \searrow & 1 \\ 2 & \nearrow & 2 \\ 3 & \searrow & 3 \end{array} \quad \eta \circ \varphi$$

Jonomerkinnällä sama asia merkitään.

$$(1, 3, 2) \circ (2, 3, 1) = (3, 2, 1)$$

(5) Edellä $(1, 3, 2) \circ (2, 3, 1)$ lasketaan seuraavasti:

”Sisäfunktio kuvaa ykkösen kakkoselle (#1), jonka ulkofunktio kuvaa kolmoselle (#2). Siis yhdistetty kuvaus kuvaa ykkösen kolmoselle (#3).”

$$(1, \quad \searrow \#2 \quad 3, \quad 2) \circ (2, \quad \searrow \#1 \quad 3, \quad 1) = (3, \quad \searrow \#3 \quad , \quad)$$

”Sisäfunktio kuvaa kakkosen kolmoselle (#4), jonka ulkofunktio kuvaa kakkoselle (#5). Siis yhdistetty kuvaus kuvaa kakkosen kakkoselle (#6).”

$$(1, 3, \overset{\searrow \#5}{2}) \circ (2, \overset{\searrow \#4}{3}, 1) = (3, \overset{\searrow \#6}{2},)$$

”Sisäfunktio kuvaa kolmosen ykköselle (#7), jonka ulkofunktio kuvaa ykköselle (#8). Siis yhdistetty kuvaus kuvaa kolmosen ykköselle (#9).”

$$\overset{\searrow \#8}{(1, 3, 2)} \circ (2, 3, \overset{\searrow \#7}{1}) = (3, 2, \overset{\searrow \#9}{1})$$

(6) Vaihto toimii eri tavoin oikealta ja vasemmalta

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ 2 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ 3 & \xrightarrow{\quad} & 3 \end{array} \Leftrightarrow \alpha_{12} \circ (2, 3, 1) = (1, 3, 2)$$

Jonokielellä: ”Ykkönen ja kakkonen vaihtavat paikkaa.”

Kuvauskielellä: ”Ykkösen ja kakkosen alkukuvat vaihtuvat.”

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ 2 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ 3 & \xrightarrow{\quad} & 3 \end{array} \Leftrightarrow (2, 3, 1) \circ \alpha_{12} = (3, 2, 1)$$

Jonokielellä: ”Ensimmäinen ja toinen vaihtavat paikkaa.”

Kuvauskielellä: ”Ykkösen ja kakkosen kuvat vaihtuvat.”

‡

Määritelmä 2.3.3. Permutaatio $\varphi \in S_n$ on parillinen, jos inversioiden määrä p_φ on parillinen ja vastaavasti φ on pariton, jos inversioiden määrä p_φ on pariton. Permutaation $\varphi \in S_n$ merkki, eli signum, on luku

$$\text{sign } \varphi = \text{sgn } \varphi = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\varphi(k) - \varphi(j)}{k - j}$$

Esimerkki 2.3.4.

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(2, 3, 1) &= \frac{(\varphi(2) - \varphi(1))}{(2 - 1)} \cdot \frac{(\varphi(3) - \varphi(1))}{(3 - 1)} \cdot \frac{(\varphi(3) - \varphi(2))}{(3 - 2)} \\ &= \frac{(3 - 2)}{(2 - 1)} \cdot \frac{(1 - 2)}{(3 - 1)} \cdot \frac{(1 - 3)}{(3 - 2)} = +1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(2, 1, 3) &= \frac{(\varphi(2) - \varphi(1))}{(2 - 1)} \cdot \frac{(\varphi(3) - \varphi(1))}{(3 - 1)} \cdot \frac{(\varphi(3) - \varphi(2))}{(3 - 2)} \\ &= \frac{(1 - 2)}{(2 - 1)} \cdot \frac{(3 - 2)}{(3 - 1)} \cdot \frac{(3 - 1)}{(3 - 2)} = -1 \end{aligned}$$

‡

Lause 2.3.5. Olkoon $\varphi, \eta \in S_n$ permutaatioita ja $\alpha_{jk} \in S_n$ vaihto. Silloin

- (1) $\operatorname{sgn} \varphi = (-1)^{p_\varphi} = \begin{cases} +1, & \text{kun } \varphi \text{ on parillinen} \\ -1, & \text{kun } \varphi \text{ on pariton} \end{cases}$
- (2) $\operatorname{sgn}(\varphi \circ \eta) = \operatorname{sgn} \varphi \cdot \operatorname{sgn} \eta$
- (3) $\operatorname{sgn} \alpha_{jk} = -1$

Todistus. (1) Olkoon joukon $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kahden alkion osajoukkojen joukko $P = \{\{i, j\} \subset \mathbb{N}_n \mid i \neq j\}$. Koska φ on bijektio, niin myös kuvaus $P \rightarrow P, \{j, k\} \mapsto \{\varphi(j), \varphi(k)\}$ on hyvin määritelty ja bijektio. Siis merkin määritelmässä esiintyy osoittajan tekijöinä itseisarvoiltaan samat luvut kuin nimittäjässä. Osoittajan tekijä $(\varphi(j) - \varphi(k))$ on kuitenkin p_φ kertaa eri merkinen kuin nimittäjässä. Siis $\operatorname{sgn} \varphi = (-1)^{p_\varphi}$.

(2) Merkitään $\eta(j) = j^*$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\varphi \circ \eta) &= \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\varphi(\eta(k)) - \varphi(\eta(j))}{k - j} \\ &= \prod_{\{j, k\} \in P, j < k} \left(\frac{\varphi(\eta(k)) - \varphi(\eta(j))}{\eta(k) - \eta(j)} \right) \left(\frac{\eta(k) - \eta(j)}{k - j} \right) \\ &= \prod_{\{j^*, k^*\} \in P, j^* < k^*} \left(\frac{\varphi(k^*) - \varphi(j^*)}{k^* - j^*} \right) \prod_{\{j, k\} \in P, j < k} \left(\frac{\eta(k) - \eta(j)}{k - j} \right) \\ &= \operatorname{sgn} \varphi \cdot \operatorname{sgn} \eta \end{aligned}$$

(3) Merkitään n :llä erotusta $k - j$. Todistamme väitteen induktiolla n :n suhteen:

Induktion lähtökohta: Kun $n = k - j = 1$ inversioiden määrä on 1 ja väite seuraa kohdasta (1).

Induktio-oletus: Väite on tosi, kun $k - j < n$.

Induktioväite: Väite on tosi, kun $k - j = n$.

Induktiotodistus: Valitaan indeksi p indeksien j ja k välistä (siis $j < p < k$). Silloin

$$\alpha_{jk} = \alpha_{jp} \circ \alpha_{pk} \circ \alpha_{jp}$$

Siis lauseen kohdan (2) ja induktio-oletuksen nojalla

$$\operatorname{sgn}(\alpha_{jk}) = \operatorname{sgn}(\alpha_{jp}) \cdot \operatorname{sgn}(\alpha_{pk}) \cdot \operatorname{sgn}(\alpha_{jp}) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

□

Seuraavaksi palaamme determinantin yleiseen määritelmään.

2.3.2 Isot determinantit

det_isot

Määritelmä 2.3.6. $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ determinantti on luku

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} a_{\varphi(2)2} \cdots a_{\varphi(n)n}),$$

jolle käytämme myös merkintää

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ensimmäiseksi tarkistamme, ettei uusi määritelmä ole ristiriidassa aiemmin antamiemme kaksi- ja kolmirivisten determinantin kaavojen kanssa.

Esimerkki 2.3.7.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(1, 2) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(2, 1) a_{21} a_{12} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \end{aligned}$$

Siis kaksirivisen determinantin tapauksessa saadaan sama lauseke kuin määritelmässä (def_kaksi_det) sivulla ??.

a linkit

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(1, 2, 3)a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}(1, 3, 2)a_{11}a_{32}a_{23} \\
 &\quad + \operatorname{sgn}(3, 1, 2)a_{31}a_{12}a_{23} + \operatorname{sgn}(2, 1, 3)a_{21}a_{12}a_{33} \\
 &\quad + \operatorname{sgn}(2, 3, 1)a_{21}a_{32}a_{13} + \operatorname{sgn}(3, 2, 1)a_{31}a_{22}a_{13} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \\
 &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \\
 &\quad + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Siis myös kolmiriivisen determinantin tapauksessa saadaan sama lauseke kuin määritelmässä (??) sivulla ??.

[tarkista linkit](#)

Seuraavat lauseet ovat determinantin ymmärtämisen kannalta hyvin tärkeitä. Ne tulee ymmärtää hyvin. Siksi niistä esitetään sekä sanallinen (mahdollisimman havainnollinen), että kaavanomainen (mahdollisimman täsmällinen) muoto. Jotta kaavat olisivat helppo muodostaa, sovimme epästandardin, vain tässä yhteydessä käytettävän merkinnän.

Olkoon tarkasteltavina $n \times n$ -matriisi $A = (a_{ij})$ ja n -alkioinen pystyvektori $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$. Sovimme, että tässä kappaleessa (ja myöhemmin Cramerin kaavojen yhteydessä) merkintä

$$A[k : \vec{u}]$$

tarkoittaa matriisia, joka saadaan, kun A :n k :s sarake korvataan pystyvektorilla $\vec{u}$. Jos siis esimerkiksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

niin

$$A[2 : \vec{u}] = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Lisäksi käytämme paljon käytettyä merkintää, jossa matriisin $A = (a_{ij})$ k :tta saraketta merkitään pystyvektorilla

$$\vec{a}_{[k]} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

th_det1

Lause 2.3.8. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia A .

(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisin A jonkin sarakkeen kaikki alkioit ovat nollija, niin

matriisin determinanti on nolla.

(Kaavana:)

$$\vec{a}_{[:k]} = \vec{0} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

(esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Todistus.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) a_{\varphi(1)1} \cdots \underbrace{a_{\varphi(k)k}}_{=0, \forall k} \cdots a_{\varphi(n)n} = 0$$

□

th_det1b

Lause 2.3.9. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisi $\mathbf{A}$ on kolmiomuodossa, eli kaikki diagonaalin alapuolella olevat alkioit ovat nollia, niin matriisin determinanti on diagonaalialkioiden tulo.

(Myös jos kaikki diagonaalin yläpuolella olevat alkioit ovat nollia, niin determinanti on diagonaalialkioiden tulo.)

(Kaavana:)

$$(\text{kaikilla } i > j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Todistus. Lasketaan determinanti määritelmän mukaan

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} a_{\varphi(2)2} \cdots a_{\varphi(n)n}). \quad (2.1) \quad \text{det_th_det1b}$$

Nyt suurin osa summan termeistä on nollia. Tämän näkee seuraavasti. Selvitämme minkälainen tulee permutaation φ olla, jotta siihen liittyvä termi lausekkeessa (2.1) ei olisi nolla.

Ensinnäkin on pakko olla voimassa ehto $\varphi(n) \geq n$, sillä muuten viimeinen termin tekijä $a_{\varphi(n)n}$ olisi nolla. Siis $\varphi(n) = n$.

Toiseksi on pakko olla voimassa ehto $\varphi(n-1) \geq n-1$, sillä muuten toiseksi viimeinen termin tekijä $a_{\varphi(n-1)(n-1)}$ olisi nolla. Siis $\varphi(n-1) \geq n-1$. Mutta mahdollinen arvo n varattiin jo äsken, joten ainoaksi vaihtoehdoksi jää $\varphi(n-1) = n-1$.

Jatkamalla päättelyä aina $\varphi(1)$:een saakka nähdään, että ainoa permutaatio, joka voi antaa nollasta eroavan termin on $\varphi(k) = k$ eli identtinen permutaatio. (Muita ei ole.) Siis

$$\det \mathbf{A} = \operatorname{sgn} \varphi_{id} \cdot a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

□

th_det2

Lause 2.3.10. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisiin $\mathbf{A}$ kaksi saraketta vaihtavat paikkaa, niin syntyvän matriisin determinantti on alkuperäisen vastaluku.

(Kaavana:)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}[j : \vec{a}_{[:k]}][k : \vec{a}_{[:j]}] \Rightarrow \det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Todistus. Jos $\varphi \in S_n$ on n -permutaatio, niin merkitsemme $\hat{\varphi} = \varphi \circ \alpha_{jk}$. Nyt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) b_{\varphi(1)1} \cdots b_{\varphi(j)j} \cdots b_{\varphi(k)k} \cdots b_{\varphi(n)n} \\ &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) a_{\varphi(1)1} \cdots a_{\varphi(j)k} \cdots a_{\varphi(k)j} \cdots a_{\varphi(n)n} \\ &= \sum_{\varphi \in S_n} -\operatorname{sgn}(\hat{\varphi}) a_{\hat{\varphi}(1)1} \cdots a_{\hat{\varphi}(k)k} \cdots a_{\hat{\varphi}(j)j} \cdots a_{\hat{\varphi}(n)n} \\ &= -\det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

□

th_det3

Lause 2.3.11. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisissa $\mathbf{A}$ on kaksi identtistä saraketta, niin matriisin determinantti on 0.

(Kaavana:)

$$j \neq k, \text{ ja } \vec{a}_{[:j]} = \vec{a}_{[:k]} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Todistus. Tämä on suora seuraus edellisestä lauseesta. Nyt nimittäin

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}[j : \vec{a}_{[:k]}][k : \vec{a}_{[:j]}], \text{ joten edellisen lauseen mukaan } \det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$$

□

th_det4

Lause 2.3.12. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Neliömatriisin $\mathbf{A}$ determinantin lasku on k :nnen sarakkeen suhteen lineaarinen operaatio.

(Kaavana:)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}[k : \vec{u} + \vec{v}]) &= \det(\mathbf{A}[k : \vec{u}]) + \det(\mathbf{A}[k : \vec{v}]), \quad \text{ja} \\ \det(\mathbf{A}[k : \lambda \cdot \vec{u}]) &= \lambda \cdot \det(\mathbf{A}[k : \vec{u}]) \end{aligned}$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5+1 & 3 \\ -5 & 2+9 & 4 \\ 0 & 3-2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 100 \cdot 5 & 3 \\ -5 & 100 \cdot 2 & 4 \\ 0 & 100 \cdot 3 & 7 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A}[k : \vec{u} + \vec{v}] &= \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} \cdots (u_{\varphi(k)} + v_{\varphi(k)}) \cdots a_{\varphi(n)n}) \\
&= \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} \cdots u_{\varphi(k)} \cdots a_{\varphi(n)n}) \\
&\quad + \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} \cdots v_{\varphi(k)} \cdots a_{\varphi(n)n}) \\
&= \mathbf{A}[k : \vec{u}] + \mathbf{A}[k : \vec{v}] \\
\det(\mathbf{A}[k : \lambda \cdot \vec{u}]) &= \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} \cdots (\lambda \cdot u_{\varphi(k)}) \cdots a_{\varphi(n)n}) \\
&= \lambda \cdot \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} \cdots u_{\varphi(k)} \cdots a_{\varphi(n)n}) \\
&= \lambda \cdot \det(\mathbf{A}[k : \vec{u}])
\end{aligned}$$

□

th_det5

Lause 2.3.13. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Jos neliömatrisiin $\mathbf{A}$ sarake kerrotaan reaalityluvulla λ ja näin saatu sarake lisätään toiseen $\mathbf{A}$:n sarakkeeseen, niin syntyvän uuden matriisin determinantti on sama, kuin alkuperäisen matriisin determinantti.

(Kaavana:)

$$j \neq k \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}[k : \vec{a}_{[:k]} + \lambda \vec{a}_{[:j]}]) = \det(\mathbf{A})$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \det \mathbf{A}[1 : \vec{a}_{[:1]} + 5 \cdot \vec{a}_{[:2]}]$$

Todistus. Kahden edeltävän lauseen mukaan

$$\det(\mathbf{A}[k : \vec{a}_{[:k]} + \lambda \vec{a}_{[:j]}]) = \underbrace{\det(\mathbf{A}[k : \vec{a}_{[:k]}])}_{=\det(\mathbf{A})} + \underbrace{\lambda \cdot \det(\mathbf{A}[k : \vec{a}_{[:j]}])}_{=0} = \det(\mathbf{A})$$

sillä $\mathbf{A}[k : \vec{a}_{[:k]}] = \mathbf{A}$ ja kaaviossa $\mathbf{A}[k : \vec{a}_{[:j]}]$ on j :s sarake kahteen kertaan.

□

th_det6

Lause 2.3.14. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Jos jokin neliömatriisin $\mathbf{A}$ sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa, niin matriisin determinantti on nolla.

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sillä } \vec{a}_{[:3]} = \vec{a}_{[:1]} + 2 \cdot \vec{a}_{[:2]}$$

Todistus. Jos $\vec{a}_{[:n]} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot \vec{a}_{[:k]}$, niin edellisen lauseen toistuva soveltaminen johtaa tulokseen

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}[n : \vec{a}_{[:n]} - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot \vec{a}_{[:k]}]) = \det(\mathbf{A}[n : \vec{0}]) = 0$$

□

th_det6b

Lause 2.3.15. Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Neliömatriisilla $\mathbf{A}$ ja sen transpoosilla $\mathbf{A}^T$ on samat determinantit.

(Kaavana:)

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Todistus. Olkoon $\psi = \varphi^{-1}$. Silloin $\text{sgn}\psi = \text{sgn}\phi$ ja

$$a_{\psi(1)1} a_{\psi(2)2} \cdots a_{\psi(n)n} = a_{1\phi(1)} a_{2\phi(2)} \cdots a_{n\phi(n)}$$

sillä tekijät ovat samat vaikka ne ovatkin eri järjestyksessä. Nyt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^T) &= \sum_{\phi \in S_n} \text{sgn}\phi \cdot (\mathbf{A}^T)_{\phi(1)1} (\mathbf{A}^T)_{\phi(2)2} \cdots (\mathbf{A}^T)_{\phi(n)n} \\ &= \sum_{\phi \in S_n} \text{sgn}\phi \cdot a_{1\phi(1)} a_{2\phi(2)} \cdots a_{n\phi(n)} \\ &= \sum_{\psi \in S_n} \text{sgn}\psi \cdot a_{\psi(1)1} a_{\psi(2)2} \cdots a_{\psi(n)n} \\ &= \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

□

th_det7

Lause 2.3.16. Lauseissa ^{th_det1}(2.3.8), ^{th_det2}(2.3.10), ^{th_det3}(2.3.11), ^{th_det4}(2.3.12), ^{th_det5}(2.3.13) ja ^{th_det6}(2.3.14) matriisin sarakkeita koskevat tulokset ovat voimassa myös matriisin riveille.

Todistus. Seuraa edellisestä lauseesta.

□

th_det8

Lause 2.3.17. Tarkastellaan $n \times n$ -matriiseja A ja B .

(Sanallinen muoto:) Tulon determinantti on determinanttien tulo.

(Kaavana:)

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

Todistus. Olkoon $B = (b_{ij})$ ja $A = (a_{ij}) = (\vec{a}_{[1]} \quad \vec{a}_{[2]} \quad \cdots \quad \vec{a}_{[n]})$. Tulon AB j :s sarake on silloin

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})_{[j]} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{AB})_{1j} \\ (\mathbf{AB})_{2j} \\ \vdots \\ (\mathbf{AB})_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \cdots + a_{nn}b_{nj} \end{pmatrix} \\ &= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} \vec{a}_{[k]} \end{aligned}$$

Siis

$$\mathbf{AB} = \left(\sum_{k_1=1}^n b_{k_1 1} \vec{a}_{[k_1]} \quad \sum_{k_2=1}^n b_{k_2 2} \vec{a}_{[k_2]} \quad \cdots \quad \sum_{k_n=1}^n b_{k_n n} \vec{a}_{[k_n]} \right)$$

Soveltamalla toistuvasti lausetta (2.3.12) saamme

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_n n} \det(\vec{a}_{[k_1]} \quad \vec{a}_{[k_2]} \quad \cdots \quad \vec{a}_{[k_n]})$$

Tässä summassa on n^n termiä, mutta niistä vain ne ovat nollasta poikkeavia, joissa luvut $k_1, k_2, \dots, k_n$ ovat pareittain eri suuria eli muodostavat permutaation. Lauseen (2.3.11) mukaan nimittäin kaavion determinantti on nolla, jos sama sarake esiintyy kaaviossa kahdesti tai useammin. Kun luvut $k_1, k_2, \dots, k_n$ muodostavat permutaation $\varphi(j) = k_j$, niin kaavio

$$(\vec{a}_{[\varphi(1)]} \quad \vec{a}_{[\varphi(2)]} \quad \cdots \quad \vec{a}_{[\varphi(n)]})$$

saadaan kaviosta

$$(\vec{a}_{[1]} \quad \vec{a}_{[2]} \quad \cdots \quad \vec{a}_{[n]}) = \mathbf{A}$$

suorittamalla p_φ sarakkeiden vaihtoa, joten

$$\det(\vec{a}_{[\varphi(1)]} \quad \vec{a}_{[\varphi(2)]} \quad \cdots \quad \vec{a}_{[\varphi(n)]}) = \operatorname{sgn} \varphi \cdot \det(\mathbf{A}).$$

Siis

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \sum_{\varphi \in S_n} b_{\varphi(1)1} b_{\varphi(2)2} \cdots b_{\varphi(n)n} \det(\vec{a}_{[\varphi(1)]} \quad \vec{a}_{[\varphi(2)]} \quad \cdots \quad \vec{a}_{[\varphi(n)]}) \\ &= \det(\mathbf{A}) \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot b_{\varphi(1)1} b_{\varphi(2)2} \cdots b_{\varphi(n)n} \\ &= \det \mathbf{A} \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

□

th_det9 **Lause 2.3.18.** (Sanallinen muoto:) Yksikkömatriisin determinantti on 1.
(Kaavana:)

$$\det(\mathbf{I}) = 1$$

Todistus.

$$\det(\mathbf{I}) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot \delta_{\varphi(1)1} \cdots \delta_{\varphi(n)n} = 1$$

sillä ainoa permutaatio, jolla kaikki Kroneckerin deltat ovat ykkösiä, on $\varphi = (1, 2, \dots, n)$ ja sen merkki on 1. $\square$

th_det10 **Lause 2.3.19.** Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.
(Sanallinen muoto:) Matriisi on säännöllinen (eli sille on olemassa käänteismatriisi), jos ja vain jos matriisin determinantti ei ole nolla.
(Kaavana:)

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Todistus. $\Rightarrow$ (eli $\exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$)

Oletamme nyt, että käänteismatriisi on olemassa. Määritetään käänteismatriisi rivioperaatioiden avulla Gaussin algoritmilla. Aluksi laadimme kaavion, jonka vasen puoli on $\mathbf{A}$. Jokaisessa vaiheessa algoritmin aikana kaavion vasemman osan determinantti joko, säilyy muuttumattomana, vaihtaa merkkiä tai tulee kerrotuksi nolasta eroavalla luvulla. Viimeisen kaavion vasemman puolen determinantti on 1. Siis ensimmäisen kaavion vasemman osan determinantti ei voi olla nolla.

$\Leftarrow$ (eli $\nexists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$)

Oletamme nyt, että käänteismatriisia ei ole olemassa. Aloitetaan käänteismatriisin määrittäminen kuten edellä. Oletuksen mukaan Gaussin algoritmi ei onnistu, vaan pivotointi epäonnistuu jossakin vaiheessa. Tämä merkitsee, että viimeisessä kaaviossa on rivi, jonka vasen osa on täynnä nollia. Siis jokin $\mathbf{A}$:n rivi voidaan lausua muiden lineaarikombinaationa ja lauseiden (2.3.14) ja (2.3.16) mukaan determinantti on nolla. $\square$

th_det11 **Lause 2.3.20.** Jos $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Edellä oli suuri joukko lauseita. Tehdään vielä yhteenveto:

Jos neliömatriisin A jonkin sarakkeen kaikki alkiot ovat nollia, niin matriisin determinanti on nolla. (lause [2.3.8](#) sivu [65](#))

Jos neliömatriisi A on kolmio-muodossa, niin matriisin determinanti on diagonaalialkioiden tulo. (lause [2.3.9](#) sivu [66](#))

Jos neliömatriisin A kaksi saraketta vaihtavat paikkaa, niin syntyvän matriisin determinanti on alkuperäisen vastaluku. (lause [2.3.10](#) sivu [67](#))

Jos neliömatriisissa A on kaksi identtistä saraketta, niin matriisin determinanti on 0. (lause [2.3.11](#) sivu [67](#))

Neliömatriisin A determinantin lasku on k :nnen sarakkeen suhteen lineaarinen operaatio. (lause [2.3.12](#) sivu [67](#))

Jos neliömatriisin A sarake kerrotaan reaaliluvulla λ ja näin saatu sarake lisätään toiseen A :n sarakkeeseen, niin syntyvän uuden matriisin determinanti on sama, kuin alkuperäisen matriisin determinanti. (lause [2.3.13](#) sivu [68](#))

Jos jokin neliömatriisin A sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa, niin matriisin determinanti on nolla. (lause [2.3.14](#) sivu [69](#))

Neliömatriisilla A ja sen transpoosilla A^T on samat determinantit. (lause [2.3.15](#) sivu [69](#))

Lauseissa ([2.3.8](#)), ([2.3.10](#)), ([2.3.11](#)), ([2.3.12](#)), ([2.3.13](#)) ja ([2.3.14](#)) matriisin sarakkeita koskevat tulokset ovat voimassa myös matriisin riveille. (lause [2.3.16](#) sivu [69](#))

$\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (lause [2.3.17](#) sivu [70](#))

$\det(I) = 1$ (lause [2.3.18](#) sivu [71](#))

Matriisi on säännöllinen (eli sille on olemassa käänteismatriisi), jos ja vain jos matriisin determinanti ei ole nolla. (lause [2.3.19](#) sivu [71](#))

Jos $n \times n$ -matriisia A on säännöllinen, niin

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(lause [2.3.20](#) sivu [71](#))

2.4 Yhtälöryhmän ratkaisualgoritmit

2.4.1 Rivioperaatiot

Sovitaan ensin merkintätavoista. Ratkaisemme ensin yksinkertaisen yhtälöparin

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad (2.2)$$