

5.3 Matriisin kääntäminen adjungaattilla

Sec:MatInvAdj

Määritelmä 113 $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ adjungaatti on $n \times n$ -matriisi $\text{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$, missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$ (, joka on siis alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori).

Siis adjungaatti on kofaktorikaavion transpoosi.

Lause 114 (1)

$$\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}\text{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

(2) Jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, niin

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$$

Todistus: (1)

$$\begin{aligned} (\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A})_{ij} &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} (-1)^{i+k} \det(\mathbf{A}_{ki}) \\ &= \det(\mathbf{A}[i : \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k]) = \det(\mathbf{A}[i : \vec{a}_{\bullet j}]) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{kun } i \neq j \\ \det(\mathbf{A}), & \text{kun } i = j \end{cases} \\ &= \det(\mathbf{A}) \delta_{ij} \end{aligned}$$

Siis $\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$. Toisaalta voimme päätellä, että adjungaatin transpoosi on transpoosin adjungaatti seuraavasti:

$$(\text{adj}(\mathbf{A})^T)_{ij} = \text{adj}(\mathbf{A})_{ji} = (-1)^{j+i} \det(\mathbf{A}_{ij}) = (-1)^{i+j} \det((\mathbf{A}^T)_{ji}) = (\text{adj}(\mathbf{A}^T))_{ij}$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{A}\text{adj}(\mathbf{A}) = (\text{adj}(\mathbf{A})^T \mathbf{A}^T)^T = (\text{adj}(\mathbf{A}^T) \mathbf{A}^T)^T = (\det(\mathbf{A}^T) \mathbf{I})^T = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

(2) Seuraa välittömästi kohdasta (1). □

Esimerkki 115 Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (3 - 1) - 3 \cdot (2 - 0) + (2 - 0) = 2 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} +|\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & +|\mathbf{A}_{31}| \\ -|\mathbf{A}_{12}| & +|\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{32}| \\ +|\mathbf{A}_{13}| & -|\mathbf{A}_{23}| & +|\mathbf{A}_{33}| \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tarkistus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.4 Cramerin kaavat

Sec:Cramer

Edellä käydyt tarkastelut antavat nyt mahdollisuuden johtaa kaava myös yhtälöryhmän ratkaisulle silloin, kun ratkaisu on yksikäsitteinen. Kysymys ei kuitenkaan ole vain keinosta saada kaava, vaan esimerkit tuovat esiin, miksi Cramerin kaavat ovat korvaamaton apu eräissä ongelmissa.

Lause 116 (Cramerin kaavat) (Oletus:) Olkoon $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, jossa muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä, ja yhtälöryhmän kerroinmatriisi on säännöllinen. Auki kirjoitettuna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

(Väite sanallisesti:) Yhtälöryhmän k :s tuntematon saadaan lausekkeesta

$$x_k = \frac{D_k}{\det(\mathbf{A})},$$

missä D_k on determinantti, joka saadaan, kun kerroinmatriisin k :s sarake korvataan $\vec{b}$:llä (eli yhtälöryhmän RHS:llä).

(Väite kaavana:)

$$x_k = \frac{\det(\mathbf{A}[k : \vec{b}])}{\det(\mathbf{A})}.$$

(Kaava aukikirjoitettuna:)

$$x_k = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(k-1)} & b_1 & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Todistus: Lausekkeiden yksinkertaistamiseksi merkitsemme tämän todistuksen ajan matriisiin $\mathbf{A}$ alkioon a_{ij} liittyvää kofaktoria symbolilla c_{ij} . Koska $\mathbf{A}$ on säännöllinen, on sillä käänteismatriisi, jonka voimme lausua adjungaatin avulla. Siis

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})\vec{b} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ratkaisuvektorin k :s koordinaatti on siis

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \sum_{j=1}^n c_{jk} b_j \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} b_j \det(\mathbf{A}_{jk}) \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \det(\mathbf{A}[k : \vec{b}]) \end{aligned}$$

□

Esimerkki 117 Ratkaistaksemme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x + 9y - 2z = 2 \\ 7x - 3y - 6z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases},$$

laskemme determinantit

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 7 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -151$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 9 & -2 \\ \mathbf{8} & -3 & -6 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & -6 \\ \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & -3 \\ \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = -302$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{2} & -2 \\ 7 & \mathbf{8} & -6 \\ -1 & \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & -6 \\ \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & \mathbf{8} \\ -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & \mathbf{2} \\ 7 & -3 & \mathbf{8} \\ -1 & 2 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & \mathbf{8} \\ 2 & \mathbf{1} \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & \mathbf{8} \\ -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -151$$

Nyt $x = D_1/D = 2$, $y = D_2/D = 0$ ja $z = D_3/D = 1$.

Esimerkki 118 Seuraavaksi palaamme esimerkkiin ^{|esim1_c2s4}(??), joka oli jo sivulla ^{|esim1_c2s4}?? Rat-
kaistavana oli yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - \alpha\beta y = 0 \\ -ty + z = I_0 \end{cases},$$

missä

x = kulutus tasapainotilassa ,

y = kansantulo tasapainotilassa ,

z = investoinnit tasapainotilassa ,

I_0 = keskimääräinen investointitaso (oletetaan vakioksi),

s = säästämisaste ($0 \leq s \leq 1$, oletetaan vakioksi),

t = veroaste ($0 \leq t \leq 1$, oletetaan vakioksi),

k = investointien herkyys kulutuksen muutokselle, (oletetaan vakioksi)

$\alpha = 1 - s$,

$\beta = 1 - t$

Yhtälöryhmässä esiintyy nyt kirjainkertoimia, joiden numeroarvot eivät ole tiedossa. Silti haluamme voida ratkaista yhtälöryhmän. Toisessa pivotoinnissa voi tulla ongelmia, jos käytämme rivioperaatioita. Cramerin kaavoja käytettäessä, ei tarvitse pivotoida, vaan kaavat perustuvat determinantteihin, joiden lasku on tässä tilanteessa suoraviivaista. Kerroinmatriisi ja RHS ovat nyt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

ja tarvittavat determinantit ovat:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 1. sarakkeen suhteen}) \\ &= +(-1) \cdot \begin{vmatrix} -\alpha\beta & 0 \\ -t & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= \alpha\beta - (1-t) = -s(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha\beta & 0 \\ I_0 & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 1. sarakkeen suhteen}) \\ &= +0 - 0 + I_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -I_0\alpha\beta = -I_0(1-s)(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 2. sarakkeen suhteen}) \\ &= -0 + 0 - I_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & I_0 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 3. sarakkeen suhteen}) \\ &= +0 - 0 + I_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\alpha\beta \end{vmatrix} = I_0(\alpha\beta - 1) = I_0((1-s)(1-t) - 1) \end{aligned}$$

Siis ratkaisu on olemassa, kun $s \neq 0$ ja $t \neq 1$ ja silloin tasapainossa

$$\text{kulutus} = x = \frac{D_1}{D} = \frac{-I_0(1-s)(1-t)}{-s(1-t)} = \frac{I_0(1-s)}{s}$$

$$\text{kansantulo} = y = \frac{D_2}{D} = \frac{-I_0}{-s(1-t)} = \frac{I_0}{s(1-t)}$$

$$\text{investoinnit} = z = \frac{D_3}{D} = \frac{I_0((1-s)(1-t)-1)}{-s(1-t)} = I_0 \left(1 + \frac{t}{s(1-t)} \right)$$

5.5 Homogeeniset yhtälöryhmät

Sec:YRHomog

Tässä kappaleessa tutkitaan yhtälöryhmää, jossa on n muuttujaa ja n yhtälöä, ja yksi yhtälöryhmän kerroinmatriisin sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa. Voisimme toki tutkia jo tapausta, jossa ”yksi tai useampi” sarake voidaan lausua muiden lineaarikombinaationa, mutta lykkäämme tämän tapauksen käsittelyn lukuun 5.

Yksinkertaistamalla ongelmanasettelua saamme helpommin luettavan esityksen. Näillä eväillä tulemme luvussa 4 laskemaan matriisien ominaisvektoreita.

Määritelmä 119 *Yhtälöryhmä on homogeeninen, jos jokaisen yhtälön RHS on nolla.*

Homogeeninen yhtälöryhmä on siis muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina ratkaisu $\vec{x} = \vec{0}$, jota sanomme triviaaliksi ratkaisuksi. Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisi on säännöllinen ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), niin triviaali ratkaisu on ainoa ratkaisu.

Jotta homogeenisella yhtälöryhmällä (n muuttujaa ja n yhtälöä) olisi ei-triviaali ratkaisu, tulee kerroinmatriisin determinantin olla 0. Silloin yhtälöryhmää ei voida ratkaista