

8 KANNAT JA ORTOGONAALISUUS

KantaOrthogon

8.1 Lineaarinen riippumattomuus

Sec:LinIndep

Lineaarinen riippumattomuus on oikeastaan jo määritelty, mutta kirjoitamme määritelmät uudestaan tähän kappaleeseen, jotta esitys olisi helpommin luettavissa. Lisäksi otamme käyttöön uuden tavan erotella 'joukot', 'jonot' ja 'systeemit'.

Vektorijoukolle, jossa on q vektoria käytetään merkintää $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$. Alkioiden järjestyksellä ei nyt ole väliä, vaikka käytännössä ne joudutaankin aina kirjoittamaan johonkin järjestykseen. Sama alkio ei toistu siistityssä vektori-luettelossa.

Vektorijonossa $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ vektoreiden järjestys on listan mukainen ja sama vektori voi esiintyä useamman kuin yhden kerran. Matematiikassa tyypillinen tapa merkitä jono kaarisulkeita käyttäen voisi nyt aiheuttaa väärinkäsityksiä. Siksi käytämme vektorijonolle samaa merkintää kuin vektorijoukolle!

Vektorisysteemissä $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ voi sama vektori esiintyä useamman kuin yhden kerran, mutta vektoreiden järjestyksellä ei ole väliä. (Voidaan sanoa, että kaksi vektorisysteemiä ovat samat, jos niiden luetteloista saadaan permutoimalla samat.)

Esimerkki 171 (1) Olkoon $L = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $M = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ja $N = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\}$. Silloin vektorijoukkoina $L = M = N$; vektorijonoina $M \neq N$; mutta vektorisysteeminä $M = N$.

(2) a) Jos viisipäiväisen loman aikana tiskarijoukko on $\{\text{Matti, Heikki, Ville}\}$, niin nämä kolme henkilöä siis tiskaavat.

b) Jos loman aikana tiskarijono on $\{\text{Matti, Ville, Heikki, Ville, Ville}\}$, niin luettelo kertoo täsmällisesti tiskivuorojen järjestyksen.

c) Jos tiskarisysteemi on $\{\text{Matti, Heikki, Ville, Ville, Ville}\}$, niin kunkin osalta on tiedossa miten monena päivänä joutuu tiskaamaan, mutta järjestys on jätetty auki.

Seuraavassa lähes aina, kun puhumme vektorisysteemistä, joudumme käytännössä käsittelemään vektorijonoa. Kun sanomme, että vektorisysteemillä on tietty ominaisuus,

niin tarkoitamme, että kyseinen ominaisuus on vastaavan vektorijonon kaikilla permutaatioilla. (Siis ”järjestyksellä ei ole väliä”.)

Määritelmät annetaan taas yleisessä muodossa, mutta tärkeimmät sovellukset koskevat $\mathbb{R}^n$:ää.

Määritelmä 172 L :n vektorisysteemi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ on lineaarisesti riippuva, eli sidottu (engl. linearly dependent), jos on olemassa reaalityyppiset $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_q \mathbf{u}_q = \mathbf{0}$$

ja ainakin yksi kertoimista eroaa nolasta ($\lambda_k \neq 0$), jollakin $k = 1, 2, \dots, q$.

Vektorisysteemi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ on lineaarisesti riippumaton, eli vapaa (engl. linearly independent), jos se ei ole sidottu.

Määritelmästä seuraa välittömästi seuraavat tulokset:

Lause 173 Tarkastellaan vektorisysteemiä $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$.

- (1) Jos jokin systeemin vektoreista on nollavektori, niin systeemi on sidottu.
- (1b) Jos systeemi on vapaa, niin mikään vektoreista ei ole nollavektori.
- (2) Jos sama vektori esiintyy luettelossa kaksi kertaa, niin systeemi on sidottu.
- (2b) Jos systeemi on vapaa, niin $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_j$ aina, kun $i \neq j$.
- (3) Jos jokin tarkasteltavan systeemin osasysteemi on sidottu, niin systeemi on sidottu.
- (3b) Jos systeemi on vapaa, niin jokainen sen osasysteemi on vapaa.

Todistus.HT.

□

Määritelmä 174 Olkoon $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ vektorijono ja olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}^n$ reaalityyppiset luvut. Lauseketta

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_q \mathbf{u}_q$$

sanomme linearikombinaatioksi vektoreista $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ ja lukuja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sanomme linearikombinaation kertoimiksi. Jos kaikki kertoimet ovat nollia, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0$, niin sanomme, että lineaarikombinaatio on triviaali. Jos jokin kertoimista eroaa nolasta, $\lambda_k \neq 0$, niin sanomme, että lineaarikombinaatio on ei-triviaali.

Jos vektori $\mathbf{a}$ voidaan lausua summana

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_q \mathbf{u}_q,$$

niin sanomme, että $\mathbf{a}$ voidaan lausua lineaarikombinaationa vektoreista $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$. Jos edellä ainakin yksi kerroin eroaa nollasta, niin sanomme, että vektori $\mathbf{a}$ voidaan lausua ei-triviaalina lineaarikombinaationa vektoreista $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$.

Lause 175 Jos vektorisysteemi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ on lineaarisesti riippuva, niin jokin systeemin vektoreista voidaan lausua ei-triviaalina lineaarikombinaationa muista systeemin vektoreista.

Todistus. HT

□

$\mathbb{R}^n$:ssä liitämme vektorijonoon (-systeemiin) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ matriisin $\mathbf{V}$, jonka k :s sarakke on jonon k :s vektori. Siis

$$(\mathbf{V})_{\bullet k} = \vec{v}_k.$$

Jos $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_q \vec{v}_q$, niin

$$\mathbf{V}\vec{\lambda} = \vec{a}, \text{ missä } \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix}.$$

Näillä merkinnöillä vektorisysteemin lineaarinen riippumattomuus voidaan luonnehtia seuraavasti:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\} \text{ on vapaa} \quad (8.1)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}\vec{\lambda} = \vec{0}, \text{ jos ja vain jos } \vec{\lambda} = \vec{0} \quad (8.2)$$

$$\Leftrightarrow \ker(\mathbf{V}) = \{\vec{0}\} \quad (8.3)$$

Seuraavassa lauseessa tätä ideaa kehitetään edelleen.

c4s7th1

Lause 176 Tarkastellaan $\mathbb{R}^n$:n vektorisysteemiä $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ ja siihen liittyvää matriisia $\mathbf{V}$. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\} \text{ on vapaa} \quad (8.4)$$

$$\Leftrightarrow \ker(\mathbf{V}) = \{\vec{0}\} \quad (8.5)$$

$$\Leftrightarrow \ker(\mathbf{V}^T \mathbf{V}) = \{\vec{0}\} \quad (8.6)$$

$$\Leftrightarrow \det(\mathbf{V}^T \mathbf{V}) \neq 0 \quad (8.7)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}^T \mathbf{V} \text{ on säännöllinen} \quad (8.8)$$

Todistus. $(8.4) \Leftrightarrow (8.5)$ seuraa suoraan määritelmistä.

$(8.5) \Leftrightarrow (8.6)$ Jos $\vec{u} \in \ker(V)$, niin $V^T V \vec{u} = V^T \vec{0} = \vec{0}$. Siis $\ker(V) \subseteq \ker(V^T V)$.
Toisaalta olkoon $\vec{u} \in \ker(V^T V)$. Silloin

$$0 = \langle V^T V \vec{u} | \vec{u} \rangle = \langle V \vec{u} | V \vec{u} \rangle \Rightarrow V \vec{u} = \vec{0}$$

Siis $\ker(V^T V) \subseteq \ker(V)$.

$(8.6) \Leftrightarrow (8.7)$ Seuraa siitä, että $V^T V$ on neliömatriisi ja lauseesta (I70) sivulla 150.

$(8.7) \Leftrightarrow (8.8)$ Seuraa lauseesta (I04) sivulla 102. □

Esimerkki 177 Tutkitaan onko vektorijono $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ lineaarisesti riippumaton, kun

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutkitaan asia (1) ”kynällä ja paperilla” ja (2) ”tietokonetta käyttäen”.

(1) Etsimme ei-triviaaleja λ -kertoimia, joilla yhtälö $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}$ on tosi. Jos löytyy ei-triviaalit kertoimet, jono on sidottu, ja jos ei löydy, niin jono on vapaa. Ryhdymme työhön:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} +5 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & [-13] & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} +18/13 \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (-13) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Siis vektorisysteemi on vapaa, eli lineaarisesti riippumaton.

(2) Matlabilla saman asian voi todeta lauseen (I76) perusteella:

```
>> U = [1 0 2 -3 ; 2 1 -1 0 ; 4 -1 0 1]'
U =
     1     2     4
     0     1    -1
     2    -1     0
    -3     0     1

>> det (U' * U)
ans =
    820
>>
```

Koska siis $\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) \neq 0$, niin vektorisysteemi on vapaa.

Esimerkki 178 Otetaan vielä esimerkki, jossa johtopäätös on erilainen. Tutkitaan onko vektorijono $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ lineaarisesti riippumaton, kun

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

(1) Etsimme taas ei-triviaaleja λ -kertoimia, joilla yhtälö $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}$ on tosi. Jos löytyy ei-triviaalit kertoimet, jono on sidottu, ja jos ei löydy, niin jono on vapaa. Ryhdymme työhön:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & -9 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 1 & 0 \\ 0 & [1] & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} +3 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3a \\ \lambda_2 = 2a \\ \lambda_3 = a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Koska löytyy ei-triviaalit kertoimet, vektorisysteemi on sidottu, eli lineaarisesti riippuva.

(2) Matlabilla saman asian voi todeta lauseen ^{c4s7th1}(176) perusteella:

```
>> U = [1 0 2 -3 ; 2 1 -1 0 ; -1 -2 8 -9]'
```

```
U =
```

```
    1    2   -1
    0    1   -2
    2   -1    8
   -3    0   -9
```

```
>> det (U' * U)
```

```
ans =
```

```
    0
```

```
>>
```

Koska siis $\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) = 0$, niin vektorisysteemi on sidottu.

Lause 179 Olkoon $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ lineaarisesti riippumaton $\mathbb{R}^n$:n vektorisysteemi. Jos $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{a} \perp \vec{v}_k$, $\forall k = 1, \dots, q$, niin vektorisysteemi

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q, \vec{a}\}$ on vapaa.

Todistus. Olkoon $\mathbf{V}$ se $n \times q$ -matriisi, jonka sarakkeina ovat vektorit $\vec{v}_k, k = 1, \dots, q$ ja olkoon $\mathbf{W} = (\mathbf{V} | \vec{a})$ vastaava $n \times (q+1)$ -matriisi, jonka viimeinen sarake on vektori $\vec{a}$. Oletuksesta $\vec{a} \neq \vec{0}$ seuraa, että $\|\vec{a}\| > 0$ ja oletuksesta $\vec{a} \perp \vec{v}_k, \forall \vec{v}_k$ seuraa, että $\mathbf{V}^T \vec{a} = \vec{0}$. Nyt voimme laskea suoraan

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{W} &= (\mathbf{V} | \vec{a})^T (\mathbf{V} | \vec{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T \\ \vec{a}^T \end{pmatrix} (\mathbf{V} | \vec{a}) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{V}^T \mathbf{V} & \mathbf{V}^T \vec{a} \\ \hline \vec{a}^T \mathbf{V} & \vec{a}^T \vec{a} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{V}^T \mathbf{V} & \vec{0} \\ \hline \vec{0}^T & \|\vec{a}\|^2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) = \|\vec{a}\|^2 \det(\mathbf{V}^T \mathbf{V}) \neq 0$$

Siis lauseen (I76) mukaan vektorijono $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q, \vec{a}\}$ on vapaa. □

Yhdistämällä lause (I76) lauseeseen (I49) saadaan seuraava tulos, jota myöhemmin pystymme vielä parantamaan:

Lause 180 Jos $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q\}$ on lineaarisesti riippumaton $\mathbb{R}^n$:n vektorisysteemi ja $M = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q)$, niin

$$\mathbb{R}^n = M \oplus M^\perp$$

Seuraa suoraan lauseesta (I76) sivulla I53 ja lauseesta (I49) sivulla I35. □