

8.8 Kannan vaihto

Sec:BaseChange

Tarkastellaan kahta n -ulotteisen lineaariavaruuden L kantaa $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ja $\hat{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$. Kannan E kantavektorit voidaan lausua yksikäsitteisellä tavalla kannassa $\hat{E}$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = a_{11}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{21}\hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n1}\hat{\mathbf{e}}_n \\ \mathbf{e}_2 = a_{12}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{22}\hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n2}\hat{\mathbf{e}}_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{e}_n = a_{1n}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{2n}\hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nn}\hat{\mathbf{e}}_n \end{cases}$$

Huomaa, että indeksointi on nyt tehty erikoisesti. Edelläoleva on helpointa muistaa seuraavasti

$$E^T = \mathbf{A}^T \hat{E}^T \Leftrightarrow E = \hat{E} \mathbf{A}.$$

Olkoon nyt $\mathbf{u}$ lineaariavaruuden L vektori, jolla on eri kannoissa esitykset

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad \text{ja} \\ \mathbf{u} &= \hat{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + \hat{x}_n \hat{\mathbf{e}}_n. \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \hat{\mathbf{e}}_k \right) \\ &= x_1 (a_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 + a_{21} \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n1} \hat{\mathbf{e}}_n) \\ &\quad + x_2 (a_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 + a_{22} \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n2} \hat{\mathbf{e}}_n) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n (a_{1n} \hat{\mathbf{e}}_1 + a_{2n} \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nn} \hat{\mathbf{e}}_n) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) \hat{\mathbf{e}}_n \end{aligned}$$

Viimeisestä muodosta voimme lukea koordinaatit hatullisessa kannassa. Siis

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \hat{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \hat{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Merkitsemme seuraavasti.

Kannat:

$$E = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n), \quad \text{ja} \quad \hat{E} = (\hat{\mathbf{e}}_1 \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{e}}_n)$$

Vektorin $\mathbf{u}$ koordinaattivektorit kannoissa:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ missä } \mathbf{u} = E\vec{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

$$\vec{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}, \text{ missä } \mathbf{u} = \hat{E}\vec{\hat{x}} = \hat{x}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \cdots + \hat{x}_n\hat{\mathbf{e}}_n$$

Näillä merkinnöillä saamme tuloksen.

Lause 217 Jos $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ja $\hat{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ ovat kaksi lineaariavaruuden L kantaa ja jos $E^T = \mathbf{A}^T \hat{E}^T$ (eli $E = \hat{E}\mathbf{A}$), niin vektorin koordinaatit toteuttavat yhtälöt

$$\vec{\hat{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$$

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\hat{x}}$$

□

Esimerkki 218 Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ja $\hat{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ kaksi lineaariavaruuden kantaa siten, että

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 - 3\hat{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \quad \text{eli}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}$$

a) Laskemme vektorin $\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3$ koordinaatit hatuttomassa kannassa.

b) Laskemme vektorin $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ koordinaatit hatullisessa kannassa.

```
>> A=[1 2 -3 ; 1 1 0 ; 0 1 1]'
```

```
A =
```

```
    1    1    0
    2    1    1
   -3    0    1
```

```
>> uhat = [2; 3; -1]
```

```
uhat =
```

```
2
```

```
3
```

```
-1
```

```
>> v = [4; -2; 1]
```

```
v =
```

```
4
```

```
-2
```

```
1
```

```
>> u = inv(A)*uhat
```

```
u =
```

```
0.5000
```

```
1.5000
```

```
0.5000
```

```
>> vhat = A*v
```

```
vhat =
```

```
2
```

```
7
```

```
-11
```

Siiis

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3 = 0.5\mathbf{e}_1 + 1.5\mathbf{e}_2 + 0.5\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 2\hat{\mathbf{e}}_1 + 7\hat{\mathbf{e}}_2 - 11\hat{\mathbf{e}}_3$$

Lause 219 Kahden ortonormitetun kannan välinen kannanvaihto-matriisi on ortogonaalinen.

Todistus. Jos

$$\mathbf{e}_j = a_{1j}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{2j}\hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + a_{nj}\hat{\mathbf{e}}_n, \quad \forall j,$$

niin ortonormitusten perusteella

$$\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$$

□

Seuraavaksi mietimme, miten kannan vaihto vaikuttaa lineaarikuvauksen matriisiin. Olkoon $f : L \rightarrow L$ lineaarikuvaus, jossa lähtö- ja maaliavaruuksien ollessa sama lineaariavaruus L . Olkoon kannassa E kuvauksen matriisi $\mathbf{M}$. Jos $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, niin

$$\vec{y} = \mathbf{M}\vec{x}.$$

Jos $\hat{E}$ on toinen kanta siten, että kantojen välinen kannanvaihto-matriisi on $\mathbf{A}^T$, niin $E = \hat{E}\mathbf{A}$ ja

$$\vec{y} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\vec{x}$$