*Siirretään kolmas ja viides sarake RHS:iin ja kirjoitetaan yhtälöt yhtälöiksi. Lisätään yhtälöihin kaksi triviaalia yhtälöä $x_3 = x_3$ ja $x_5 = x_5$.*

$$\begin{cases} x_1 &= -x_3 - x_5 \\ x_2 &= -x_3 - x_5 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= \phantom{-x_3} - x_5 \\ x_5 &= \phantom{-x_3 - {}} x_5 \\ x_6 &= 0 \end{cases}$$

*Jos valitsemme arvot $x_3 = a \in \mathbb{R}$ ja $x_5 = b \in \mathbb{R}$, niin ytimeen kuuluvalle vektorille $\vec{x}$ saadaan esitys*

$$\vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

*Koska a ja b voidaan valita vapaasti, kuuluvat kaikki mahdolliset vektoreiden $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ lineaarikombinaatiot matriisin $\boldsymbol{M}$ ytimeen. Siis*

$$null(\boldsymbol{M}) = span\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}.$$

c4s6th3 **Lause 169** *Olkoon $\boldsymbol{A}$ $m \times n$-matriisi ja olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto \boldsymbol{A}\vec{x}$ matriisin generoima lineaarikuvaus. Silloin*

*(1) jos $f$ on injektio, niin $m \geq n$.*

*(2) jos $f$ on surjektio, niin $m \leq n$.*

*(3) jos $f$ on bijektio, niin $m = n$.*

**Todistus.** (1) Jos $f$ on injektio, niin lauseen (c4s6th2 165) mukaan $\ker(\boldsymbol{A}) = \{\vec{0}\}$. Silloin tulee esimerkin (c4s6es1 168) mukaisessa konstruktiossa pivotointien onnistua jokaisessa sarakkeessa, joten on mahdotonta, että rivejä olisi vähemmän kuin sarakkeita.
(2) Osoitamme, että jos $m > n$, niin $f$ ei voi olla surjektio. Olkoon siis $m > n$. Ratkaisemme Rivioperaatioiden avulla yhtälöryhmän $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$. Koska kerroinmatriisissa rivejä on enemmän kuin sarakkeita, on viimeisen kaavion viimeinen rivi muotoa $0 = 0$. Jos ratkaisun aikana tehtyjen rivioperaatioiden jono vastaa matriiseilla $\boldsymbol{E}_p \cdot \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1$ kertomista, niin asetamme $\vec{b} = \boldsymbol{E}_1{}^{1}\boldsymbol{E}_2{}^{1} \cdot \boldsymbol{E}_p{}^{1}\vec{e}_n$. Jos nyt ratkaisemme yhtälöryhmän $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ rivioperaatioilla, niin viimeisen kaavion viimeinen rivi on tyyppiä $0 = 1$. Siis vektorilla $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ei ole alkukuvaa kuvauksessa $f$.
(3) Seuraa kohdista (1) ja (2). □

c4s6th1 **Lause 170** *$n \times n$ -neliömatriisin $\boldsymbol{A}$ ydin on triviaali, jos ja vain jos matriisin determinantti eroaa nollasta, det$(\boldsymbol{A}) \neq 0$.*

**Todistus.** Edellisen esimerkin mukainen konstruktio ei löydä yhtään ytimeen kuuluvaa vektoria, jos ja vain jos pivotointi onnistuu joka sarakkeessa ratkaistaessa yhtälöryhmää $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ Gaussin algoritmilla. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. □

# 8 KANNAT JA ORTOGONAALISUUS

:KantaOrthogon

## 8.1 Lineaarinen riippumattomuus

Sec:LinIndep

Lineaarinen riippumattomuus on oikeastaan jo määritelty, mutta kirjoitamme määritelmät uudestaan tähän kappaleeseen, jotta esitys olisi helpommin luettavissa. Lisäksi otamme käyttöön uuden tavan erotella 'joukot', 'jonot' ja 'systeemit'.

Vektorijoukolle, jossa on $q$ vektoria käytetään merkintää $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$. Alkioiden järjestyksellä ei nyt ole väliä, vaikka käytännössä ne joudutaankin aina kirjoittamaan johonkin järjestykseen. Sama alkio ei toistu siistityssä vektori-luettelossa.

Vektorijonossa $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ vektoreiden järjestys on listan mukainen ja sama vektori voi esiintyä useamman kuin yhden kerran. Matematiikassa tyypillinen tapa merkitä jono kaarisulkeita käyttäen voisi nyt aiheuttaa väärinkäsityksiä. Siksi käytämme vektorijonolle samaa merkintää kuin vektorijoukolle!

Vektorisysteemissä $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ voi sama vektori esiintyä useamman kuin yhden kerran, mutta vektoreiden järjestyksellä ei ole väliä. (Voidaan sanoa, että kaksi vektorisysteemiä ovat samat, jos niiden luetteloista saadaan permutoimalla samat.)

**Esimerkki 171** *(1) Olkoon $L = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, $M = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ ja $N = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\}$. Silloin vektorijoukkoina $L = M = N$; vektorijonoina $M \neq N$; mutta vektorisysteemeinä $M = N$.*

*(2) a) Jos viisipäiväisen loman aikana tiskarijoukko on {Matti, Heikki, Ville}, niin nämä kolme henkilöä siis tiskaavat.*
*b) Jos loman aikana tiskarijono on {Matti, Ville, Heikki, Ville, Ville}, niin luettelo kertoo täsmällisesti tiskivuorojen järjestyksen.*
*c) Jos tiskarisysteemi on {Matti, Heikki, Ville, Ville, Ville}, niin kunkin osalta on tiedossa miten monena päivänä joutuu tiskaamaan, mutta järjestys on jätetty auki.*

Seuraavassa lähes aina, kun puhumme vektorisysteemistä, joudumme käytännössä käsittelemään vektorijonoa. Kun sanomme, että vektorisysteemillä on tietty ominaisuus, niin tarkoitamme, että kyseinen ominaisuus on vastaavan vektorijonon kaikilla permutaatioilla. (Siis "järjestyksellä ei ole väliä".)

Määritelmät annetaan taas yleisessä muodossa, mutta tärkeimmät sovellukset koskevat $\mathbb{R}^n$:ää.

**Määritelmä 172** *L:n vektorisysteemi $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ on lineaarisesti riippuva, eli sidottu (engl. linearly dependent), jos on olemassa reaaliluvut $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_q \boldsymbol{u}_q = \mathbf{0}$$

*ja ainakin yksi kertoimista eroaa nollasta ($\lambda_k \neq 0$), jollakin $k = 1, 2, \ldots, q$.*

*Vektorisysteemi $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ on lineaarisesti riippumaton, eli vapaa (engl. linearly independent), jos se ei ole sidottu.*

Määritelmästä seuraa välittömästi seuraavat tulokset:

**Lause 173** *Tarkastellaan vektorisysteemiä $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$.*
*(1) Jos jokin systeemin vektoreista on nollavektori, niin systeemi on sidottu.*
*(1b) Jos systeemi on vapaa, niin mikään vektoreista ei ole nollavektori.*
*(2) Jos sama vektori esiintyy luettelossa kaksi kertaa, niin systeemi on sidottu.*
*(2b) Jos systeemi on vapaa, niin $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{u}_j$ aina, kun $i \neq j$.*
*(3) Jos jokin tarkasteltavan systeemin osasysteemi on sidottu, niin systeemi on sidottu.*
*(3b) Jos systeemi on vapaa, niin jokainen sen osasysteemi on vapaa.*

**Todistus.**HT. □

**Määritelmä 174** *Olkoon $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ vektorijono ja olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}^n$ reaalilukuja. Lauseketta*

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_q \boldsymbol{u}_q$$

*sanomme lineaarikombinaatioksi vektoreista $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ ja lukuja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sanomme lineaarikombinaation kertoimiksi. Jos kaikki kertoimet ovat nollia, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_q = 0$, niin sanomme, että lineaarikombinaatio on triviaali. Jos jokin kertoimista eroaa nollasta, $\lambda_k \neq 0$, niin sanomme, että lineaarikombinaatio on ei-triviaali.*

*Jos vektori* $\boldsymbol{a}$ *voidaan lausua summana*

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_q \boldsymbol{u}_q,$$

*niin sanomme, että* $\boldsymbol{a}$ *voidaan lausua lineaarikombinaationa vektoreista* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$. *Jos edellä ainakin yksi kerroin eroaa nollasta, niin sanomme, että vektori* $\boldsymbol{a}$ *voidaan lausua ei-triviaalina lineaarikombinaationa vektoreista* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$.

**Lause 175** *Jos vektorisysteemi* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *on lineaarisesti riippuva, niin jokin systeemin vektoreista voidaan lausua ei-triviaalina lineaarikombinaationa muista systeemin vektoreista.*

**Todistus.** HT □

$\mathbb{R}^n$:ssä liitämme vektorijonoon (-systeemiin) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\}$ matriisin $\boldsymbol{V}$, jonka $k$:s sarake on jonon $k$:s vektori. Siis

$$(\boldsymbol{V})_{\bullet k} = \vec{v}_k.$$

Jos $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_q \vec{v}_q$, niin

$$\boldsymbol{V}\vec{\lambda} = \vec{a}, \text{ missä } \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix}.$$

Näillä merkinnöillä vektorisysteemin lineaarinen riippumattomuus voidaan luonnehtia seuraavasti:

$$\begin{aligned} & \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\} \text{ on vapaa} && (8.1) \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{V}\vec{\lambda} = \vec{0}, \text{ jos ja vain jos } \vec{\lambda} = \vec{0} && (8.2) \\ \Leftrightarrow\ & \ker(\boldsymbol{V}) = \{\vec{0}\} && (8.3) \end{aligned}$$

Seuraavassa lauseessa tätä ideaa kehitetään edelleen.

c4s7th1 **Lause 176** *Tarkastellaan* $\mathbb{R}^n$*:n vektorisysteemiä* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\}$ *ja siihen liittyvää matriisia* $\boldsymbol{V}$. *Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät*

$$\begin{aligned} & \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\} \textit{ on vapaa} && (8.4) \\ \Leftrightarrow\ & \ker(\boldsymbol{V}) = \{\vec{0}\} && (8.5) \\ \Leftrightarrow\ & \ker(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}) = \{\vec{0}\} && (8.6) \\ \Leftrightarrow\ & \det(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}) \neq 0 && (8.7) \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} \textit{ on säännöllinen} && (8.8) \end{aligned}$$

**Todistus.** (8.4) $\Leftrightarrow$ (8.5) seuraa suoraan määritelmistä.

(8.5) $\Leftrightarrow$ (8.6) Jos $\vec{u} \in \ker(V)$, niin $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\vec{u} = \boldsymbol{V}^T\vec{0} = \vec{0}$. Siis $\ker(\boldsymbol{V}) \subseteq \ker(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V})$. Toisaalta olkoon $\vec{u} \in \ker(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V})$. Silloin

$$0 = \langle \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\vec{u}\ \ \vec{u}\rangle = \langle \boldsymbol{V}\vec{u} \,|\, \boldsymbol{V}\vec{u}\rangle \Rightarrow \boldsymbol{V}\vec{u} = \vec{0}$$

Siis $\ker(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}) \subseteq \ker(\boldsymbol{V})$.

(8.6) $\Leftrightarrow$ (8.7) Seuraa siitä, että $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}$ on neliömatriisi ja lauseesta (170) sivulla 150.

(8.7) $\Leftrightarrow$ (8.8) Seuraa lauseesta (104) sivulla 102. $\square$

**Esimerkki 177** *Tutkitaan onko vektorijono $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ lineaarisesti riippumaton, kun*

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Tutkitaan asia (1) ”kynällä ja paperilla” ja (2) ”tietokonetta käyttäen”.*

*(1) Etsimme ei-triviaaleja $\lambda$-kertoimia, joilla yhtälö $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0}$ on tosi. Jos löytyy ei-triviaalit kertoimet, jono on sidottu, ja jos ei löydy, niin jono on vapaa. Ryhdymme työhön:*

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} -2 & +3 \\ & \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} & \\ +5 & -6 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & [\ 13] & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c} \\ \\ +18/13 \\ \leftarrow \end{array} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\ 13) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

*Siis vektorisysteemi on vapaa, eli lineaarisesti riippumaton.*

*(2) Matlabilla saman asian voi todeta lauseen (176) perusteella:*

```
>> U = [1 0 2 -3 ; 2 1 -1 0 ; 4 -1 0 1]'
U =
     1     2     4
     0     1    -1
     2    -1     0
    -3     0     1

>> det(U'*U)
ans =
   820
>>
```

*Koska siis* $\det(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}) \neq 0$*, niin vektorisysteemi on vapaa.*

**Esimerkki 178** *Otetaan vielä esimerkki, jossa johtopäätös on erilainen. Tutkitaan onko vektorijono* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ *lineaarisesti riippumaton, kun*

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

*(1) Etsimme taas ei-triviaaleja* $\lambda$*-kertoimia, joilla yhtälö* $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0}$ *on tosi. Jos löytyy ei-triviaalit kertoimet, jono on sidottu, ja jos ei löydy, niin jono on vapaa. Ryhdymme työhön:*

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & & 9\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\sim \left( \begin{array}{rrr|r} [1] & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & -9 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{|c|c} -2 & +3 \\ & \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \quad \sim \left( \begin{array}{rrr|r} (1) & 2 & 1 & 0 \\ 0 & [1] & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{|c|c} & \\ +5 & -6 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{rrr|r} (1) & 2 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 3a \\ \lambda_2 & = & 2a \\ \lambda_3 & = & a \end{array} \right. , \quad a \in \mathbb{R}$$

*Koska löytyy ei-triviaalit kertoimet, vektorisysteemi on sidottu, eli lineaarisesti riippuva.*

c4s7th1

*(2) Matlabilla saman asian voi todeta lauseen (176) perusteella:*

```
>> U = [1 0 2 -3 ; 2 1 -1 0 ; -1 -2 8 -9]'
U =
     1     2    -1
     0     1    -2
     2    -1     8
    -3     0    -9

>> det(U'*U)
ans =
     0
>>
```

*Koska siis* $\det(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}) = 0$*, niin vektorisysteemi on sidottu.*

**Lause 179** *Olkoon* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q)\}$ *lineaarisesti riippumaton* $\mathbb{R}^n$*:n vektorisysteemi. Jos* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$*,* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *ja* $\vec{a} \perp \vec{v}_k$*,* $\forall k = 1, \ldots, q$*, niin vektorisysteemi*

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \vec{a}\} \text{ on vapaa.}$$

**Todistus.** Olkoon $\boldsymbol{V}$ se $n \times q$-matriisi, jonka sarakkeina ovat vektorit $\vec{v}_k, k = 1, \ldots, q$ ja olkoon $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{V}|\vec{a})$ vastaava $n \times (q+1)$-matriisi, jonka viimeinen sarake on vektori $\vec{a}$. Oletuksesta $\vec{a} \neq \vec{0}$ seuraa, että $\|\vec{a}\| > 0$ja oletuksesta $\vec{a} \perp \vec{v}_k$, $\forall \vec{v}_k$ seuraa, että $\boldsymbol{V}^T\vec{a} = \vec{0}$. Nyt voimme laskea suoraan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W} &= (\ \boldsymbol{V} \mid \vec{a}\ )^T (\ \boldsymbol{V} \mid \vec{a}\ ) = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{V}^T \\ \hline \vec{a}^T \end{array}\right) (\ \boldsymbol{V} \mid \vec{a}\ ) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} & \boldsymbol{V}^T\vec{a} \\ \hline \vec{a}^T\boldsymbol{V} & \vec{a}^T\vec{a} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} & \vec{0} \\ \hline \vec{0}^T & \|\vec{a}\|^2 \end{array}\right) \\
\Rightarrow \det(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W}) &= \|\vec{a}\|^2 \det(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}) \neq 0
\end{aligned}$$

Siis lauseen (c4s7th1 176) mukaan vektorijono $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \vec{a}\}$ on vapaa. □

Yhdistämällä lause (c4s7th1 176) lauseeseen (c4s3th6 149) saadaan seuraava tulos, jota myöhemmin pystymme vielä parantamaan:

**Lause 180** *Jos* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_q)\}$ *on lineaarisesti riippumaton* $\mathbb{R}^n$*:n vektorisysteemi ja* $M = \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_q)$*, niin*

$$\mathbb{R}^n = M \oplus M^\perp$$

Seuraa suoraan lauseesta (c4s7th1 176) sivulla c4s7th1 153 ja lauseesta (c4s3th6 149) sivulla c4s3th6 135. □

## 8.2 Kanta ja dimensio

Sec:BaseDim

c4s8def1 **Määritelmä 181** *Lineaariavaruuden L vektorijono* $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *on lineaariavaruuden L kanta, jos*

1. *Jokainen L:n vektori* $\boldsymbol{a} \in L$ *voidaan lausua lineaarikombinaationa jonon F vektoreista*
$$\boldsymbol{a} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_q \boldsymbol{u}_q.$$
2. *Jono* $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *on vapaa.*

*Jos* $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *on kanta ja* $\boldsymbol{a} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_q \boldsymbol{u}_q$, *niin kertoimet* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ *ovat vektorin* $\boldsymbol{a}$ *koordinaatit kannassa F.*

*Koordinaateista muodostettua vektoria* $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q)^T \in \mathbb{R}^q$ *sanomme vektorin* $\boldsymbol{a}$ *koordinaattivektoriksi (kannassa F).*

**Esimerkki 182** *(1) Vektorijono* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *eli vektorit*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

*on* $\mathbb{R}^n$*:n kanoninen kanta. Kantaa sanotaan kanoniseksi, koska sillä on monta yksinkertaista ominaisuutta: jokaisen kantavektorin normi on 1, kantavektorit ovat keskenään kohtisuorat.*

*(2) Jos lineaariavaruuden L vektorijono* $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *on lineaarisesti riippumaton, niin se on virittämänsa aliavaruuden* $M = \mathrm{span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q)$ *kanta.*

Jos vektorijono $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ on lineaariavaruuden $L$ kanta ja vektori $\boldsymbol{a} \in L$ on mikä tahansa $L$:n vektori, niin vektorin $\boldsymbol{a}$ koordinaatit kannassa $F$ ovat yksikäsitteiset. Siis on olemassa yhdet ja vain yhdet koordinaatit. Jos nimittäin olisi olemassa kahdet erilaiset koordinaatit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1 \boldsymbol{u}_1 + a_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_q \boldsymbol{u}_q, \\ \boldsymbol{a} &= \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_q \boldsymbol{u}_q, \quad \text{ja } a_k \neq \alpha_k \text{ jollakin } k, \end{aligned}$$

niin silloin olisi

$$(a_1 - \alpha_1)\boldsymbol{u}_1 + (a_2 - \alpha_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (a_q - \alpha_q)\boldsymbol{u}_q = \mathbf{0}, \quad (a_k - \alpha_k) \neq 0$$

mikä on mahdotonta, koska kanta on vapaa.

**Lause 183** *Vektorin koordinaatit kannassa ovat yksikäsitteiset.*

**Todistus.** Perustelu edellä. □

**Lause 184** *Olkoon L lineaariavaruus ja olkoon vektorijono* $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *sen kanta. Silloin identtinen kuvaus*

$$\mathrm{id} : L \to L, \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}$$

*ja kuvaus, joka kuvaa vektorin sen koordinaattivektorille kannassa F*

$$v_F : L \to \mathbb{R}^q, \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_q \boldsymbol{u}_q \mapsto (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q)^T$$

*ovat bijektiivisiä lineaarikuvauksia.*

**Todistus.** Olkoon $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_q \boldsymbol{u}_q$, $\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_q \boldsymbol{u}_q$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \mathrm{id}(\boldsymbol{a}) + \mathrm{id}(\boldsymbol{b}) \\
\mathrm{id}(\lambda \boldsymbol{a}) &= \lambda \boldsymbol{a} = \lambda \,\mathrm{id}(\boldsymbol{a}) \\
v_F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_q+\beta_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix} = v_F(\boldsymbol{a}) + v_F(\boldsymbol{b}) \\
v_F(\lambda \boldsymbol{a}) &= \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_q \end{pmatrix} = \lambda v_F(\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

Siis kumpikin kuvaus on lineaarinen. Kumpikin kuvaus on selvästi bijektio. □

**Lause 185** *Olkoon vektorijono* $F = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *lineaariavaruuden L kanta. Jos* $G = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ *on toinen lineaariavaruuden L kanta, niin*

$$k = q.$$

*Toisin sanoen: Kaikissa mahdollisissa L:n kannoissa on sama määrä kantavektoreita.*

**Todistus.** Seuraavassa kaaviossa kaikki kuvaukset ovat bijektiivisiä lineaarikuvauksia.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "v_F"'] & L \arrow[d, "v_G"] \\ \mathbb{R}^q & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Yhdistämällä nämä kuvaukset saamme bijektiivisen lineaarikuvauksen

$$v_G \circ \mathrm{id} \circ v_F^{-1} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^k$$

c4s6th3
Tämä on lauseen (169) mukaan mahdollista vain, jos $k = q$. □

Koska lineaariavaruuden kannan kantavektoreiden lukumäärä on sama kaikilla kannoilla, voimme määritellä seuraavasti.

**Määritelmä 186** *Jos lineaariavaruudella L on kanta, jossa on k kantavektoria, niin sanomme, että lineaariavaruuden L* <u>*dimensio*</u>, $\dim(L)$, *on k*

**Esimerkki 187** *(1)*

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

*(2) Jos* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q\}$ *on lineaarisesti riippumaton vektorijono, niin*

$$\dim(\mathrm{span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q)) = q$$

*Siis vapaan vektorijonon virittämän aliavaruuden dimensio on sama kuin virittäjiensä lukumäärä.*

Kaikki tason vektorit voidaan lausua kahden $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ vektorin lineaarikombinaatioina, joten tason dimensio on 2. Toisaalta kolme tasovektoria muodostaa aina sidotun systeemin. Yleisemmin: jos vektorijonossa on liikaa vektoreita, se ei voi olla vapaa.

c4s8th5 **Lause 188** *Olkoon L lineaariavaruus, ja* $\dim(L) = n$. *Tarkastellaan L:n vektorijonoa* $F = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_q\}$. *Jos* $q > n = \dim(L)$, *niin vektorijono F on sidottu.*

**Todistus.** (1) Todistetaan ensin se erikoistapaus, jossa $L = \mathbb{R}^n$ ja $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\}$. Olkoon $\boldsymbol{V}$ se $n \times q$-matriisi, jonka sarakkeina ovat jonon $F$ vektorit. Lähdemme nyt etsimään ei-triviaaleja kertoimia $\lambda_i$ niin, että

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_q \vec{v}_q = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Tämä on homogeeninen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisissa $\boldsymbol{V}$ on $n$ riviä ja $q$ saraketta. Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, jää Gaussin algoritmin mukaisessa ratkaisussa aina osa sarakkeista pivotoimatta, joten yhtälöryhmälle löytyy ei-triviaaleja ratkaisuja. Siis jono $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ on sidottu.

(2) Nyt palaamme alkuperäiseen väiteeseen. Koska $L$:n dimensio on $n$, on olemassa kanta $G = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$, jossa on $n$ kantavektoria. Olkoon nyt $\vec{v}_k = v_G(\boldsymbol{v}_k)$ vektorin $\boldsymbol{v}_k$ koordinaattivektori kannassa $G$. Todistuksen alkuosan mukaan nyt on olemassa ei-triviaalit kertoimet $\lambda_i$ siten, että

$$\boldsymbol{V}\vec{\lambda} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_q\vec{v}_q = \vec{0}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
& \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_q\boldsymbol{v}_q = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{n} v_{ki}\boldsymbol{u}_k \right) \\
= \; & \lambda_1(v_{11}\boldsymbol{u}_1 + v_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + v_{n1}\boldsymbol{u}_n) \\
& + \lambda_2(v_{12}\boldsymbol{u}_1 + v_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + v_{n2}\boldsymbol{u}_n) \\
& + \dots \\
& + \lambda_q(v_{1q}\boldsymbol{u}_1 + v_{2q}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + v_{nq}\boldsymbol{u}_n) \\
= \; & \boldsymbol{u}_1(v_{11}\lambda_1 + v_{12}\lambda_2 + \dots v_{1q}\lambda_q) \\
& + \boldsymbol{u}_2(v_{21}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + \dots v_{2q}\lambda_q) \\
& + \dots \\
& + \boldsymbol{u}_n(v_{n1}\lambda_1 + v_{n2}\lambda_2 + \dots v_{nq}\lambda_q) \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{V}\vec{\lambda})_k = \vec{0}
\end{aligned}$$

□

c4s8th6 **Lause 189** *Olkoon L lineaariavaruus, ja* $\dim(L) = n$. *Jos L:n vektorijono* $F = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ *on vapaa, niin se on L:n kanta.*

**Todistus.** Kannan määritelmän mukaan nyt riittää osoittaa, että vektorijono virittää $L$:n. Olkoon sitä varten $\boldsymbol{a}$ mikä tahansa $L$:n vektori. Silloin jonossa $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{a}\}$ on ”liian monta vektoria ollakseen vapaa”. Edellisen lauseen mukaan $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{a}\}$ on sidottu. Siis joku vektoreista voidaan lausua muiden lineaarikombinaationa. Siinä yhtälössä $\boldsymbol{a}$ on mukana ja voidaan ratkaista $F$:n vektoreiden lineaarikombinaationa. □