

Todistus.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) &= P(\mathbf{XDX}^T) = \mathbf{XP(D)X}^T \\ &= \mathbf{X} \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \mathbf{X}^T = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

9.3 Similaarisuus ja matriisin diagonalisointi

Sec:MatSim

Määritelmä 232 Neliömatriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat similaariset, jos on olemassa säännöllinen matriisi $\mathbf{T}$ siten, että

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}.$$

Matriisia $\mathbf{T}$ sanomme similariteettimuunnosmatriisiksi ja muunnosta $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$ sanomme similariteettimuunnokseksi.

Jos similariteettimuunnosmatriisi on unitaarinen, sanomme että matriisit ovat unitaarisimilaariset, eli

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^H\mathbf{BT}$$

Lause 233 Jos matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat similaariset, $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$, niin

- (1) matriiseilla on sama karakteristinen polynomi,
- (2) matriiseilla on samat ominaisarvot
- (3) jos $\vec{x}$ on $\mathbf{A}$:n ominaisvektori, niin $\mathbf{T}\vec{x}$ on vastaava $\mathbf{B}$:n ominaisvektori.

Todistus. (1)

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = P_B(\lambda) \end{aligned}$$

(2) Seuraa suoraan edellisestä.

(3)

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}\vec{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT})\vec{x} = \mathbf{TA}\vec{x} = \mathbf{T}\lambda\vec{x} = \lambda(\mathbf{T}\vec{x})$$

□

Määritelmä 234 $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ jälki (trace) on sen diagonaalialkioiden summa

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Lause 235

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$$

Todistus. Suora lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) &= (\mathbf{AB})_{11} + (\mathbf{AB})_{22} + \cdots + (\mathbf{AB})_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) \\ &\quad + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \\ &\quad + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) \\ &\quad + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) \\ &\quad + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= (\mathbf{BA})_{11} + (\mathbf{BA})_{22} + \cdots + (\mathbf{BA})_{nn} = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) \end{aligned}$$

□

Lause 236 Similaarisilla matriiseilla on samat jäljet.

Todistus. Olkoon $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$. Silloin

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BTT}^{-1}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B})$$

□

Jos herää kysymys siitä, ovatko kaksi annettua matriisia similaariset keskenään, niin ensin kannattaa laskea matriisien jäljet ja verrata niitä. Jos jäljet eivät ole samat, niin matriisit eivät voi olla similaariset.

Merkitään jatkossa diagonaalista matriisia merkinnällä

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Määritelmä 237 Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on diagonalisoituva, jos se on similaarinen jonkin diagonaalimatriisiin $\mathbf{D}$ kanssa, eli

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}.$$

Jos kuvauksen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ matriisi on diagonalisoituva, niin sopivalla kannan vaihdolla saadaan kuvauksen matriisi diagonaaliseksi. Tämä saattaa ratkaisevalla tavalla helpottaa kuvauksen tarkastelua. Seuraavassa esimerkki.

Esimerkki 238 Tarkastellaan differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 0.5x_2(t) - 0.5x_3(t) \\ x_2'(t) = 0.5x_2(t) + 1.5x_3(t) \\ x_3'(t) = 1.5x_2(t) + 0.5x_3(t) \end{cases}$$

Jätetään jatkossa monessa kohdassa ”(t)” pois. Tämä yksinkertaistaa lausekkeitä ja saa ne helpommin luettaviksi. Nyt siis

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (9.24) \quad \boxed{\text{dyryhma}}$$

Merkitsemme nyt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Voimme siis nyt kirjoittaa yhtälön ^{dyryhma}(9.24) muotoon

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$$

Kerroinmatriisi on diagonalisoituva, sillä

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T},$$

kun

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Nyt muodostamme uudet funktiot, jotka ovat lineaarikombinaatioita alkuperäisistä:

$$\begin{cases} w_1(t) = x_1(t) - 0.5x_2(t) - 0.5x_3(t) \\ w_2(t) = 0.5x_2(t) + 0.5x_3(t) \\ w_3(t) = 0.5x_2(t) - 0.5x_3(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \vec{w} = \mathbf{T}^{-1} \vec{x}$$

Nyt suora lasku osoittaa, että w -funktiot toteuttavat hyvin yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned} & \begin{cases} dw_1/dt = dx_1/dt - 0.5 dx_2/dt - 0.5 dx_3/dt \\ dw_2/dt = 0.5 dx_2/dt + 0.5 dx_3/dt \\ dw_3/dt = 0.5 dx_2/dt - 0.5 dx_3/dt \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ dw_3/dt \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \vec{w} = \mathbf{D} \vec{w} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ dw_3/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} dw_1/dt = 3w_1(t) \\ dw_2/dt = 2w_2(t) \\ dw_3/dt = -w_3(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Tämän ryhmän ratkaisufunktiot voidaan kirjoittaa suoraan

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{-t} \end{pmatrix},$$

ja lopulta

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \\ C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Lause 239 Olkoon $\mathbf{A}$ $n \times n$ -matriisi, jonka ominaisarvot ovat reaaliset. Matriisi $\mathbf{A}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos $\mathbf{A}$ ei ole defektiivinen.

Todistus. $\Rightarrow$ Olkoon

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}.$$

Nyt

$$\mathbf{T} \mathbf{D} = \mathbf{A} \mathbf{T}.$$

Edellisen yhtälön LHS:n k :s sarake on $\lambda_k \vec{t}_{\bullet,k}$ ja RHS:n k :s sarake on $\mathbf{A} \vec{t}_{\bullet,k}$. Siis $\mathbf{T}$:n sarakkeet ovat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisvektorit. Koska $\mathbf{T}$ on säännöllinen sen rangi on n , joten $\mathbf{A}$:n ominaisvektorit muodostavat vapaan systeemin. Siis $\mathbf{A}$ ei ole defektiivinen.

$\Leftarrow$ Olkoon $\mathbf{A}$ ei-defektiivinen. Silloin lauseen (228) ^{|c4s15theigbase} mukaan matriisilla $\mathbf{A}$ on n ominaisvektoria, jotka muodostavat vapaan systeemin. Tehdään ominaisvektoreista matriisi $\mathbf{T}$ ja ominaisarvoista diagonaalimatriisi $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Silloin vastaavasti kuin edellä

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{D} &= \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}. \end{aligned}$$

□

Lause 240 Jos $n \times n$ -matriisilla $\mathbf{A}$ on n erisuurta reaalista ominaisarvoa, niin matriisi on diagonalisoituva

Todistus. Lauseen (229) ^{|c4s15threalbase} mukaan matriisi ei ole defektiivinen jolloin lauseen (239) ^{|c4s16thdiag1} mukaan se on diagonalisoituva. □

9.4 Schurin muoto ja normaalit matriisit

Sec:MatSchur

Tässä kappaleessa esitämme todistukset vain tapauksessa, jossa matriisin ominaisarvot ovat reaaliset. Todistukset on mahdollista yleistää kompleksisten ominaisarvojen tapaukseen (Ks. Kivelä: ”Matriisilasku ja Lineaarialgebra” sivut 176–178).

Lause 241 Olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reaalisen $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot. On olemassa unitaarimatriisi $\mathbf{M}$ siten, että

$$\mathbf{M}^H \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{b}^T \\ \vec{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

^{thschur1} missä matriisin $\mathbf{C}$ ominaisarvot ovat $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Todistus. Olkoon $\vec{x}$ ominaisarvoon λ_1 liittyvä normitettu ominaisvektori (ts. $\vec{x}^T \vec{x} = 1$). Oletamme nyt, että λ_1 on reaalinen. (Kompleksinen tapaus ks. Kivelä: ”Matriisilasku ja Lineaarialgebra” sivut 176–178.) Täydennetään yhden vektorin systeemi $\{\vec{x}\}$ ortonormeeratuksi kannaksi $\{\vec{x}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$. Muodostetaan näistä vektoreista (sarakkeisiin sijoittamalla) matriisi

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \vec{x} & \mathbf{V} \end{pmatrix},$$

joka on sarakkeiden ortonormeerauksen perusteella unitaarinen. Edelleen ortonormeerauksen takia $\mathbf{V}^T \vec{x} = \vec{0}$. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^H \mathbf{A} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \vec{x}^T \\ \mathbf{V}^T \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{x} & \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} & \vec{x}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{A} \vec{x} & \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{x}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \\ \vec{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \end{aligned}$$

Koska matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{G}$ ovat similaariset, niillä on samat karakteristiset polynomit. Siis

$$P_A(\lambda) = P_G(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)P_C(\lambda)$$

ja $\mathbf{C}$:n ominaisarvot ovat $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. □

Lause 242 $n \times n$ -matriisi $\mathbf{A}$ on unitaarisimilaarinen yläkolmiomatriisin kanssa.

$$\mathbf{M}^H \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Yläkolmiomatriisin lävistäjäalkiot ovat $\mathbf{A}$:n ominaisarvot.

Todistus. Tehdään induktio n :n suhteen.

Kun $n = 1$, väite on tosi, koska 1×1 -matriisi on valmiiksi yläkolmiomatriisi.

Oletamme seuraavaksi, että väite on tosi, kun $n = k - 1$ ja osoitamme sen silloin olevan tosi myös, kun $n = n$. Lauseen (241) mukaan on olemassa unitaarinen $k \times k$ -matriisi $\mathbf{M}_1$ siten, että

$$\mathbf{M}_1^H \mathbf{A} \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{b}^T \\ \vec{0} & \mathbf{C}_1 \end{pmatrix},$$

missä λ_1 on matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo ja matriisin $\mathbf{C}_1$ ominaisarvot ovat $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa unitaarinen $(k-1) \times (k-1)$ -matriisi $\mathbf{M}_2$ siten, että

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_2^H \mathbf{C}_1 \mathbf{M}_2$$

on yläkolmiomatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$. Nyt matriisi

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}$$

on unitaarinen ja

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^H \mathbf{A} \mathbf{M} &= \left(\mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \right)^H \mathbf{A} \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}^H \mathbf{M}_1^H \mathbf{A} \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{b}^T \\ \vec{0} & \mathbf{C}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{M}_2^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{b}^T \mathbf{M}_2 \\ \vec{0} & \mathbf{C}_1 \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{b}^T \mathbf{M}_2 \\ \vec{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Esimerkki 243 Esimerkkien (224 sivu 193), (225 sivu 196), (226 sivu 198) ja (227 sivu 200) matriisien Schurin muodot ovat

```
>> help schur
```

```
SCHUR Schur decomposition.
```

```
[U,T] = SCHUR(X) produces a quasitriangular Schur matrix T and
a unitary matrix U so that X = U*T*U' and U'*U = EYE(SIZE(U)).
X must be square.
```

```
T = SCHUR(X) returns just the Schur matrix T.
```

```
If X is complex, the complex Schur form is returned in matrix T.
The complex Schur form is upper triangular with the eigenvalues
of X on the diagonal.
```

```
If X is real, two different decompositions are available.
```

```
SCHUR(X,'real') has the real eigenvalues on the diagonal and the
complex eigenvalues in 2-by-2 blocks on the diagonal.
```

```
SCHUR(X,'complex') is triangular and is complex if X has complex
eigenvalues. SCHUR(X,'real') is the default.
```

```
See RSF2CSF to convert from Real to Complex Schur form.
```

Esimerkki (224 sivu 193):

```
>> A=[2 2 0 ; -1 3 2 ; 0 2 2]
A =
      2      2      0
     -1      3      2
      0      2      2

>> [U,T] = schur(A)
U =
    0.5774   -0.7071   -0.4082
    0.5774    0.7071   -0.4082
    0.5774    0.0000    0.8165

T =
    4.0000    2.4495   -0.0000
         0    2.0000    1.7321
         0         0    1.0000

>>
```

Esimerkki (225 sivu 196):

```
>> A = [2 2 0 ; -1 3 2 ; 0 2 -1]
A =
      2      2      0
     -1      3      2
      0      2     -1

>> [U,T] = schur(A)
U =
    0.8490   -0.5199   -0.0938
    0.4602    0.8150   -0.3522
    0.2595    0.2559    0.9312

T =
    2.8782    2.4575   -0.7676
   -0.3362    2.8782    0.7785
         0         0   -1.7563

>> [U,T] = schur(A,'complex')
U =
    0.8165 + 0.0046i    0.4821 + 0.3035i   -0.0938
    0.3564 + 0.3731i   -0.2006 - 0.7547i   -0.3522
```

```

0.2170 + 0.1415i -0.0273 - 0.2548i 0.9312

T =
2.8782 + 0.9089i -1.3569 - 1.6306i -0.7623 - 0.1001i
0 2.8782 - 0.9089i -0.5658 + 0.5329i
0 0 -1.7563

>>
\end{verbatim}

```

Esimerkki (\ref{c4s15es3} sivu \pageref{c4s15es3}):

```

\begin{verbatim}
>> M = [2 0 0 ; 0 3 1 ; 0 1 3]
M =
2 0 0
0 3 1
0 1 3

```

```

>> [U,T] = schur(M)
U =
1.0000 0 0
0 -0.7071 0.7071
0 0.7071 0.7071

```

```

T =
2 0 0
0 2 0
0 0 4

```

```

>>

```

~~Esimerkki (\ref{c4s15es4} sivu 200):~~
Esimerkki (227 sivu 200):

```

>> Q = [2 1 0 ; 0 1 -1 ; 0 2 4]
Q =
2 1 0
0 1 -1
0 2 4

```

```

>> [U,T] = schur(Q)
U =
1.0000 0 0

```

$$\begin{array}{ccc} 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{array}$$

$$\mathbf{T} = \begin{array}{ccc} 2.0000 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 2.0000 & -3.0000 \\ 0 & 0 & 3.0000 \end{array}$$

>>

Määritelmä 244 Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on normaali, jos

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H.$$

Reaalisen matriisin tapauksessa normaalisuus merkitsee siis, että

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T.$$

Erityisesti hermiittinen ($\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$) ja unitaarinen ($\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1}$) sekä reaalisten matriisien tapauksessa symmetrinen ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) ja ortogonaalinen ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$) ovat normaalin matriisin erikoistapauksia.

Lause 245 Olkoon neliömatriisi $\mathbf{A}$ unitaarisimilaarinen matriisin $\mathbf{B}$ kanssa ($\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{B}$). Silloin $\mathbf{A}$ on normaali, jos ja vain jos $\mathbf{B}$ on normaali.

Todistus. $\Rightarrow$ Oletamme siis, että $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$. Nyt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^H \mathbf{B} &= (\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U})^H (\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U}) = (\mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U}) (\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U}) = \mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{U} = (\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U}) (\mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U}) = \mathbf{B} \mathbf{B}^H \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Toisinpäin $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^H$ ja oletamme, että $\mathbf{B}^H \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{B}^H$. Nyt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H \mathbf{A} &= (\mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^H)^H (\mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^H) = (\mathbf{U} \mathbf{B}^H \mathbf{U}^H) (\mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^H) = \mathbf{U} \mathbf{B}^H \mathbf{B} \mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{B}^H \mathbf{U}^H = (\mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^H) (\mathbf{U} \mathbf{B}^H \mathbf{U}^H) = \mathbf{A} \mathbf{A}^H \end{aligned}$$

□

Lause 246 Matriisi $\mathbf{A}$ on unitaarisimilaarinen diagonaalimatriisin kanssa, jos ja vain jos se on normaali.

Todistus. $\Rightarrow$ Olkoon $U^H A U = D$, missä U on unitaarinen ja D on diagonaalinen. Koska diagonaalimatriisi on normaali, on edellisen lauseen perusteella myös A normaali.

$\Leftarrow$ Seuraavaksi oletamme, että A on normaali. Koska A :lla on Schurin muoto, se on unitaarisimilaarinen yläkolmiomatriisin kanssa. Koska A on normaali, myös yläkolmiomatriisi on normaali. On helppo nähdä, että normaali yläkolmiomatriisi on välttämättä diagonaalinen. $\square$

Lause 247 Normaalien $n \times n$ -matriisien ominaisvektoreista voidaan muodostaa ortonormeerattu jono.

Todistus. Edellisen lauseen mukaan normaali matriisi A on unitaarisimilaarinen diagonaalimatriisin kanssa. Siis

$$U^H A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

missä U on unitaarinen ja D on diagonaalinen. Silloin

$$A U = U D$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{u}_1 & \lambda_2 \vec{u}_2 & \cdots & \lambda_n \vec{u}_n \end{pmatrix}.$$

Siis U :n sarakkeet ovat ominaisvektoreita, ja U :n unitaarisuudesta seuraa, että vektori-systeemi $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ on vapaa ja ortonormeerattu. $\square$

Lause 248 Hermiittisen matriisin ($A = A^H$) ja reaalisen symmetrisen matriisin ($A = A^T$) Schurin muoto on diagonaalinen ja ominaisarvot ovat reaaliset.

Todistus. Lauseen ^{lause 247} (246) mukaan matriisin Schurin muoto on diagonaalinen. Olkoon $A = A^H$ ja $U^H A U = D$, missä U on unitaarinen ja D on diagonaalinen Schurin muoto. Silloin

$$D^H = (U^H A U)^H = U^H A^H U = U^H A U = D.$$

Tästä seuraa, että D :n lävistäjäalkiot, eli A :n ominaisarvot ovat reaaliset. $\square$

YHTEENVETO: Symmetrisen $n \times n$ -matriisin ominaisarvot ovat reaaliset, ei johda ongelmia, vaan ominaisarvot ovat reaaliset ja ominaisvektoreista voidaan muodostaa $\mathbb{R}^n$:n ortonormitettu kanta.