

```

U =
    0.1213    -0.9359   -0.3307
   -0.1005   -0.3430    0.9339
    0.9875     0.0801    0.1357

S =
    4.5221         0         0
         0     2.2793         0
         0         0     1.1642

V =
    0.0537   -0.8212   -0.5681
    0.4414   -0.4908    0.7512
    0.8957    0.2911   -0.3361

>>

```

Ei siis lainkaan ongelmia defektiivisyydestä.

9.7 Matriisinormit

Sec:MatNorms

Lineaarinen yhtälöryhmä $A\vec{x} = \vec{b}$ on hyväkuntoinen, jos pienet muutokset kerroinmatriisissa A tai RHS-vektorissa $\vec{b}$ aiheuttavat vain pieniä muutoksia ratkaisuvektorissa $\vec{x}$. Muussa tapauksessa ryhmä on huonokuntoinen.

c4s19es1

Esimerkki 256 Ryhmän

$$\begin{cases} 0.9999x_1 - 1.0001x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

yksikäsitteinen ratkaisu on $x_1 = 0.5$ ja $x_2 = -0.5$. Jos b_2 :ta hiukan muutetaan, saadaan

$$\begin{cases} 0.9999x_1 - 1.0001x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 + \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.5 + 5000.5\epsilon \\ x_2 = -0.5 + 4999.5\epsilon \end{cases}$$

Ratkaisu on hyvin herkkä lähtötietojen muutoksille, joten yhtälöryhmä on huonokuntoinen.

Tämän ilmiön ymmärtämiseksi tutustumme seuraavaksi matriisin normiin. Vektorinormit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_\infty$ esiteltiin määritelmässä (151) sivulla 136.

$$(1) \quad \|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

$$(2) \quad \|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle}$$

$$(3) \quad \|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\} = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

Lineaariavaruuden L normi on funktio $N : L \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

$$(N1) \quad N(x) \geq 0, \forall x \in L \text{ ja } N(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta \in L$$

$$(N2) \quad N(\alpha x) = |\alpha|N(x), \forall x \in L, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(N3) \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y), \forall x, y \in L$$

Normia on tapana merkitä $N(x) = \|\vec{x}\|$. Ja kahden vektorin $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ väliseksi etäisyydeksi sanomme niiden erotuksen normia $\|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Valittu vektorinormi indusoi matriiseille vastaavan operaattorinormin.

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p} = \max_{\|\vec{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|_p \quad (9.36) \quad \boxed{\text{matnormi}}$$

Erityisesti, kun $p = 1$, $p = 2$ tai $p \rightarrow \infty$, saadaan $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ normeille kaavat

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (= \text{itseisarvojen sarakesummien maksimi})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (= \text{itseisarvojen rivisummien maksimi})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sigma_{\max}(\mathbf{A})$$

missä $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ on matriisin $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ itseisarvoltaan suurin ominaisarvo eli matriisin $\mathbf{A}$ suurin singulaariarvo .

Unitaarimatriisin kaikki singulaariarvot ovat ykkösiä ($\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{I}^T$), joten unitaarimatriisin 2-normi on $\|\mathbf{U}\|_2 = 1$.

Edellä määriteltyjen operaattorinormien lisäksi $m \times n$ -matriisille $\mathbf{A}$ käytetään varsin paljon myös Frobenius normia

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (9.37)$$

Määritelmän seuraa, että matriisin operaattorinormeilla on ominaisuudet

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\vec{x}\|_p \quad (9.38)$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{B}\|_p \quad (9.39)$$

$$\|\mathbf{A}^n\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p^n \quad (9.40)$$

9.8 Matriisin kuntoluku

Tarkastellaan nyt yhtälöryhmää, jossa kerroinmatriisi on $n \times n$ -matriisi

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Jos RHS muuttuu arvoon $\vec{b} + \Delta\vec{b}$, niin vastaava uusi ratkaisu on $\vec{x} + \Delta\vec{x}$. Arvioimme seuraavassa suhteellista virhettä normin $\|\cdot\|_p$ mielessä.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{A}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b} \\ \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \end{cases} \\ \Rightarrow & \Delta\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b} \\ \Rightarrow & \|\Delta\vec{x}\|_p \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \|\Delta\vec{b}\|_p \end{aligned} \quad (9.41)$$

Toisaalta vastaavasti

$$\begin{aligned} \|\vec{b}\|_p &= \|\mathbf{A}\vec{x}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\vec{x}\|_p \\ \Rightarrow & \frac{1}{\|\vec{x}\|_p} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_p}{\|\vec{b}\|_p} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Yhdistämällä epäyhtälöt ^{mev1}(9.41) ja ^{mev2}(9.42) saadaan

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p} \leq \underbrace{\|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{A}^{-1}\|_p}_{=\text{Cond}_p(\mathbf{A})} \frac{\|\Delta\vec{b}\|_p}{\|\vec{b}\|_p} \quad (9.43) \quad \boxed{\text{cond1}}$$

Kaavassa ^{cond1}(9.43) olevaa kerrointa $\text{Cond}_p(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{A}^{-1}\|_p$ sanotaan matriisin kuntoluvuksi. Hyväkuntoisen yhtälöryhmän kerroinmatriisin kuntoluku on pieni (kuitenkin aina ≥ 1).

Tarkastellaan edelleen yhtälöryhmää

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

Jos kerroinmatriisi muuttuu arvoon $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$, niin vastaava uusi ratkaisu on $\vec{x} + \Delta\vec{x}$. Arvioimme seuraavassa suhteellista virhettä normin $\|\cdot\|_p$ mielessä.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A}\Delta\vec{x} + \Delta\mathbf{A}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \Delta\vec{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) \\ \Rightarrow & \|\Delta\vec{x}\|_p \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \|\Delta\mathbf{A}\|_p \|\vec{x} + \Delta\vec{x}\|_p \\ & = \text{Cond}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|_p}{\|\mathbf{A}\|_p} \cdot \|\vec{x} + \Delta\vec{x}\|_p \end{aligned}$$

Voimme siis arvioida

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p} \approx \frac{\|\Delta\vec{x}\|_p}{\|\vec{x} + \Delta\vec{x}\|_p} \leq \text{Cond}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|_p}{\|\mathbf{A}\|_p} \quad (9.44)$$

Jos matriisin kuntoluku on suuri, on odotettavissa ongelmia laskettaessa matriisilla.
Pieni kuntoluku on hyvä kuntoluku.

Kahden matriisin tulon kuntolukua voimme arvioida seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{Cond}_p(\mathbf{AB}) &= \|\mathbf{AB}\|_p \|(\mathbf{AB})^{-1}\|_p = \|\mathbf{AB}\|_p \|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\|_p \\ &\leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{B}\|_p \|\mathbf{B}^{-1}\|_p \|\mathbf{A}^{-1}\|_p = \text{Cond}(\mathbf{A})\text{Cond}(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Koska unitaarinen matriisi säilyttää 2-normin, niin unitaarille matriisille $\mathbf{U}$ pätee

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|_2 &= 1, \quad \text{ja} \\ \text{Cond}_2(\mathbf{U}) &= 1. \end{aligned}$$

Vaikka unitaarinen (ortogonaalinen) matriisi onkin käsin laskettaessa työläs olio, niin laskettaessa tietokoneella numeerisesti, se siisti ja ongelmaton olio. Unitaarisella matriisilla kertominen ei kasvata lausekkeiden kuntolukuja.

Esimerkki 257 Pyydämme vielä Matlabilta arvion kuntoluvusta esimerkissä ^{|c4s19es1}(256) esiintyneelle kerroinmatriisille

$$\begin{pmatrix} 0.9999 & -1.0001 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kun katsoo esimerkkiä ^{|c4s19es1}(256), niin ensimmäinen ajatus on, että kuntoluku olisi noin 5000, mutta asia täytyy tutkia tarkemmin:

Esimerkissä suhteellinen virhe RHS:ssä oli

$$\frac{\|\Delta\vec{b}\|_1}{\|\vec{b}\|_1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

ja ratkaisun suhteellinen virhe oli

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1} = \frac{10000\varepsilon}{1}$$

ja näiden suhde on siis 20000.

```

>> help cond
COND    Condition number with respect to inversion.
COND(X) returns the 2-norm condition number (the ratio of the
largest singular value of X to the smallest). Large condition
numbers indicate a nearly singular matrix.

COND(X,P) returns the condition number of X in P-norm:

      NORM(X,P) * NORM(INV(X),P).

where P = 1, 2, inf, or 'fro'.

Class support for input X:
      float: double, single

See also rcond, condest, condeig, norm, normest.

>> A = [0.9999 -1.0001 ; 1 -1]
A =
    0.9999    -1.0001
    1.0000    -1.0000

>> cond(A,1)
ans =
    2.0001e+004

>> cond(A,2)
ans =
    2.0000e+004

>> cond(A,inf)
ans =
    2.0001e+004

>> cond(A,'fro')
ans =
    2.0000e+004

>>

```

9.9 Neliömuodot ja definiittisyys

Sec:FormDef

Seuraavassa määriteltävä neliömuoto ei ole lineaarikuvaus, vaikka sen ominaisuuksia tutkitaan matriisien avulla. Tässä kurssissa käsiteltävät sovellukset liittyvät optimoin-