

```

>> help cond
COND    Condition number with respect to inversion.
COND(X) returns the 2-norm condition number (the ratio of the
largest singular value of X to the smallest). Large condition
numbers indicate a nearly singular matrix.

COND(X,P) returns the condition number of X in P-norm:

      NORM(X,P) * NORM(INV(X),P).

where P = 1, 2, inf, or 'fro'.

Class support for input X:
      float: double, single

See also rcond, condest, condeig, norm, normest.

>> A = [0.9999 -1.0001 ; 1 -1]
A =
    0.9999    -1.0001
    1.0000    -1.0000

>> cond(A,1)
ans =
    2.0001e+004

>> cond(A,2)
ans =
    2.0000e+004

>> cond(A,inf)
ans =
    2.0001e+004

>> cond(A,'fro')
ans =
    2.0000e+004

>>

```

9.9 Neliömuodot ja definiittisyys

Sec:FormDef

Seuraavassa määriteltävä neliömuoto ei ole lineaarikuvaus, vaikka sen ominaisuuksia tutkitaan matriisien avulla. Tässä kurssissa käsiteltävät sovellukset liittyvät optimoin-

tiin.

Määritelmä 258 (Epälineaarinen) kuvaus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(\mathbf{x}) = \sum q_{ij}x_i x_j$$

on $\mathbb{R}^n$:n neliömuoto.

Neliömuoto voidaan aina esittää symmetrisen matriisin avulla.

Esimerkki 259

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ = & x_1x_1 + x_2x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - x_2x_3 - x_3x_2 \\ = & x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(x_2 + 2x_1 - x_3) - x_3(x_2) \\ = & (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ = & (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.45)$$

□

Voimme siis aina olettaa, että neliömuoto voidaan esittää symmetrisen matriisin $\mathbf{A}$ avulla

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (9.47)$$

Määritelmä 260 Symmetrinen $(n \times n)$ -neliömatriisi $\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti, jos

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

negatiivisesti definiitti, jos

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

positiivisesti semidefiniitti, jos

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

negatiivisesti semidefiniitti, jos

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

indefiniitti, jos se ei ole mitään edeltävistä.

Lause 261 Olkoon $\mathbf{A}$ symmetrinen $(n \times n)$ -neliömatriisi, jonka reaaliset ominaisarvot ovat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(1) Jos kaikki ominaisarvot ovat positiivisia ($\lambda_j > 0$), niin $\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti.

(2) Jos kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia ($\lambda_j < 0$), niin $\mathbf{A}$ on negatiivisesti definiitti.

(3) Jos kaikki ominaisarvot ovat ei-negatiivisia ($\lambda_j \geq 0$), niin $\mathbf{A}$ on positiivisesti semi-definiitti.

(4) Jos kaikki ominaisarvot ovat ei-positiivisia ($\lambda_j \leq 0$), niin $\mathbf{A}$ on negatiivisesti semi-definiitti.

(5) Jos on olemassa sekä positiivinen ominaisarvo, että negatiivinen ominaisarvo, niin $\mathbf{A}$ on indefiniitti.

Esimerkki 262 Tutkitaan definiittisyys matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

Lasketaan ensin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (9.49)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.50)$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda) - 1] - 2 \cdot 2 \cdot (-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Ominaisarvot ovat siis

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618 \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382 \quad \lambda_3 = -1$$

Siis matriisi on indefiniitti.

Pienten yksinkertaisten matriisien tapauksessa on usein helpompaa soveltaa seuraavaa lausetta

Lause 263 Olkoon $\mathbf{A}$ ($n \times n$) neliömuoto. Lasketaan apudeterminantit (vasemmasta ylänurkasta) $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_n|$ asettamalla

$$|D_1| = a_{11} \quad \text{ja} \quad |D_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Jos kaikki apudeterminantit ovat positiivisia, $|D_k| > 0$, niin matriisi on positiivisesti definiitti.

Jos parittomat apudeterminantit ovat negatiivisia, $|D_k| < 0$, kun $k = 1, 3, \dots$, ja parilliset ovat positiivisia, $|D_k| > 0$, kun $k = 2, 4, \dots$, niin matriisi on negatiivisesti definiitti.

Todistus. Siuvuutetaan. □

Esimerkki 264 Tutkitaan vielä kerran definiittisyys matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.51)$$

Apudeterminantit ovat

$$|D_1| = 1 > 0 \quad (9.52)$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad (9.53)$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad (9.54)$$

Siis matriisi on indefiniitti.