

Kanta ja Kannan-vaihto

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen
Differentiaaliyhtälö

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen Differentiaaliyhtälö

Olkoon L vektoriavaruus. Äärellinen joukko L :n vektoreita $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ on kanta, jos

- ▶ (1) Jokainen L :n vektori voidaan lausua $\mathcal{V}$ -vektoreiden lineaarikombinaationa. (Ts. $\text{Span}(\mathcal{V}) = L$)
- ▶ (2) $\mathcal{V}$ on lineaarisesti riippumaton.

Jos vektori $\vec{u} \in L$ voidaan lausua kantavektoreiden lineaarikombinaationa

$$\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \cdots + c_n \vec{v}_n,$$

niin sanomme, että lineaarikombinaation kertoimet $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ovat vektorin koordinaatit kannassa $\mathcal{V}$.
Koordinaateista muodostettu sarakevektori

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_V = \tilde{u}_V$$

on vektorin $\vec{u}$ koordinaattivektori kannassa $\mathcal{V}$.

Lause 1. Olkoon $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ lineaariavaruuden L kanta. Silloin jokainen L :n vektori voidaan lausua tasan yhdellä tavalla kantavektoreiden lineaarikombinaationa.

Perustelu: Olkoon $\vec{u} \in L$, $\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$.
Oletamme, että vektorilla on myös toiset koordinaatit
 $\vec{u} = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \dots + b_n \vec{v}_n$. Silloin

$$(a_1 - b_1) \vec{v}_1 + (a_2 - b_2) \vec{v}_2 + \dots + (a_n - b_n) \vec{v}_n = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

Koska kantavektorit muodostavat lineaarisesti riippumattoman systeemin on ylläoleva mahdollista vain, jos $a_k = b_k$ kaikilla k . Siis koordinaattivektori on yksikäsitteinen.

Lause 2. Olkoon L lineaariavaruus ja olkoon

$\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ L :n kanta.

Olkoon lisäksi $\mathcal{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_q\}$ lineaarisesti riippumaton systeemi L :n vektoreita. Silloin $q \leq n$.

Perustelu: Koska $\mathcal{V}$ on kanta, voidaan $\vec{s}_1$ lausua muodossa

$$\vec{s}_1 = \sum c_i \vec{v}_i,$$

jossa ainakin yksi kerroin eroaa nolasta. (Yksinkertaisuuden vuoksi oletamme nyt, että $c_1 \neq 0$.) Voimme nyt ratkaista $\vec{v}_1$:n

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{c_1} \vec{s}_1 - \sum_{j=2}^n \frac{c_j}{c_1} \vec{v}_j$$

Seuraavaksi perustelemme, että uusi vektorisysteemi

$\mathcal{V}_1 = \{\vec{s}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ on L :n kanta.

mypause (Uusi kanta virittää L :n): Olkoon $\vec{a} = \sum_{j=1}^n a_j \vec{v}_j$ mikä tahansa L :n vektori. Silloin suoralla sijoituksella saamme

$$\vec{a} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{c_1} \vec{s}_1 - \sum_{j=2}^n \frac{c_j}{c_1} \vec{v}_j \right) + \sum_{j=2}^n a_j \vec{v}_j$$

joten $\vec{a}$ voidaan lausua kannan $\mathcal{V}_1$ kantavektoreiden lineaarikombinaationa. Siis $\mathcal{V}_1$ virittää L :n

(Uusi kanta $\mathcal{V}_1 = \{\vec{s}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.) On vain yksi tapa lausua vektori $\vec{s}_1$ edellisen kannan $\mathcal{V}$ kantavektoreiden lineaarikombinaationa. Siinä tarvitaan vektori $\vec{v}_1$, joka ei ole enää käytettävissä. Siis vektori $\vec{s}_1$ ei voi lausua muiden $\mathcal{V}_1$:n kantavektoreiden lineaarikombinaationa.

Vastaavasti jos vektori $\vec{v}_2$ voidaan lausua muiden $\mathcal{V}_1$:n kantavektoreiden lineaarikombinaationa, niin on selvää, että $\vec{s}_1$ on mukana nollasta eroavalla kertoimella.

$$\vec{v}_2 = g_1 \vec{s}_1 + g_3 \vec{v}_3 + g_4 \vec{v}_4 + \dots + g_n \vec{v}_n, \quad g_1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = g_1 c_1 \vec{v}_1 + (g_1 c_2 - 1) \vec{v}_2 + \sum_{j=3}^n (g_1 c_j + g_j) \vec{v}_j \quad g_1 c_1 \neq 0$$

Tämä on mahdotonta, sillä $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton. Siis $\mathcal{V}_1 = \{\vec{s}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ on vapaa!

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen
Differentiaaliyhtälö

Edellä kuvattua menettelyä voidaan toistaa niin kauan kun uusia vektoreita riittää. Jos olisi $q > n$ niin syntyisi tilanne, jossa

- (1) $\mathcal{V}_n = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n\}$ on L :n kanta jolloin
- (2) $\vec{s}_q$ voidaan lausua kantavektoreiden $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n\}$ lineaarikombinaationa.

Tämä on ristiriita, koska oletimme, että $\mathcal{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_q\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Siis $q \leq n$ ja todistus on valmis.

Lause 3. Olkoon L lineaariavaruus. Kaikissa L :n kannoissa on sama määrä kantavektoreita.

Jos siis $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ ja $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ ovat kaksi L :n kantaa, niin $m = n$.

Perustelu: Käytämme lausetta 2 ensin niin, että $\mathcal{V}$ on kanta ja $\mathcal{U}$ on lineaarisesti riippumaton. Silloin lauseen 2 mukaan $m \leq n$.

Toiseksi vaihdamme kantojen roolit niin, että $\mathcal{U}$ on kanta ja $\mathcal{V}$ on lineaarisesti riippumaton, joten lauseen 2 mukaan $n \leq m$.

Edellä sanottu on mahdollista vain jos $m = n$.

Määritelmä. Jos lineaariavaruuden L kannassa on n vektoria, niin sanomme, että lineaariavaruuden L dimensio on n .

Esimerkki 1. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ dimensio on 3, sillä avaruuden kannassa

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

on kolme kantavektoria.

Esimerkki 2. Toisen asteen polynomi-funktiot muodostavat lineaariavaruuden, jonka dimensio on 3. Sillä voimme valita kannaksi kolmikon

$$\{P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2\}$$

Esimerkki 3. Symmetriset 2×2 matriisit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

muodostavat lineaariavaruuden, jonka kanta voidaan muodostaa vektoreista

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Joskus joudumme vaihtamaan kantaa. Jos esimerkiksi laskemme pisteen paikkaa näytöllä, kun VR-kamera "näkee" valopisteen (eli siis renderöimme videokuvaa), kannattaa kantavektoreiksi valita kameran optinen akseli, kameran "vasen" ja kameran "ylös".

Erottelu-analyysissä haetaan sellaiset kantavektorit, että havaintopisteet erottuvat toisistaan mahdollisimman selkeästi kantavektoreiden suunnassa.

Nyt kannan vaihto tuntuu melko turhalta touhulta. Opettelemme sen silti.

Esimerkki 4: kaksi kantaa. Seuraavassa esitämme $\mathbb{R}^2$:n vektoreita kahdessa kannassa,

$$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{ja}$$

$$\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Muodostetaan kantavektoreista vastaavat matriisit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Jos vektorin $\vec{a}$ koordinaattivektori kannassa $\mathcal{U}$ on $\tilde{a}_U = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, niin

$$\vec{a} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = U \tilde{a}_U$$

Toisaalta jos vektorin $\vec{a}$ koordinaattivektori kannassa $\mathcal{V}$ on $\tilde{a}_V = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, niin

$$\vec{a} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = V \tilde{a}_V$$

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen

Differensiaalisyhtälö

$$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen

Differensiaalilaskenta

Esimerkiksi vektorin $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ koordinaattivektorit
esimerkin kannoissa ovat

$$U\tilde{a}_U = \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \tilde{a}_U = U^{-1}\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}_U$$

$$V\tilde{a}_V = \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \tilde{a}_V = V^{-1}\vec{a} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_V$$

$$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esimerkin kannoille on voimassa yhtälöt (tarkista)

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= -2\vec{u}_1 &+& 3\vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 &= 4\vec{u}_1 &-& \vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\text{siis } V = U \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = UA$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 &= 0.1\vec{v}_1 &+& 0.3\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= 0.4\vec{v}_1 &+& 0.2\vec{v}_2 \end{cases}$$

$$\text{siis } U = V \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} = VA^{-1}$$

Matriisia A sanotaan kannan-vaihto -matriisiksi.

Huomaa, että se on kantavektoreita koskevan yhtälöryhmän kerroinkaavion transpoosi!

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen

Differentiaaliyhtälö

Kannan-vaihto -matriisin avulla voimme siirtyä helposti kannasta toiseen:

$$\vec{a} = V\tilde{a}_V = U \underbrace{A\tilde{a}_V}_{\tilde{a}_U} \quad \rightarrow \quad \tilde{a}_U = A\tilde{a}_V$$

$$\vec{a} = U\tilde{a}_U = V \underbrace{A^{-1}\tilde{a}_U}_{\tilde{a}_V} \quad \rightarrow \quad \tilde{a}_V = A^{-1}\tilde{a}_U$$

Jos kantavektorit tiedetään, niin kannan-vaihto -matriisia ei kannata hakea monimutkaisesti, vaan yksinkertaisesti

$$V = UA \quad \rightarrow \quad U^{-1}V = A$$

Esimerkin tapauksessa:

$$\begin{aligned}U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A &= U^{-1}V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Esimerkki 5. Vektori eri kannassa Olkoot $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ja $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ kaksi $\mathbb{R}^2$:n kantaa, joille

$$\begin{cases} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \end{cases}$$

a) laske vektorin $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{V}$.

b) laske vektorin $\vec{b} = 4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{U}$.

Ratkaisu: Huomaa, että a-kohta on hyvin yksinkertainen "sijoitus ja sievennys"!

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 \\ &= 3(2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2) + 4(3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2) \\ &= 18\vec{v}_1 + 32\vec{v}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \end{cases}$$

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen
Differentiaaliyhtälö

b-kohdassa joutuu tekemään enemmän töitä.

Kannanvaihtomatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad U = VA, \quad UA^{-1} = V.$$

$$\begin{aligned} \text{Nyt} \quad \vec{b} &= 4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = V \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = UA^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= -7\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2 \end{aligned}$$

Tarkistus:

$$-7\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2 = -7(2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2) + 6(3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2) = 4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \quad \text{OK}$$

$$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esimerkki 6. Lineaarikuvausten matriisi eri kannassa

Käytämme nyt samoja kantoja kuin esimerkissä 4. Tutkimme lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{x}_U \mapsto \tilde{y}_U$, missä

$$\tilde{y}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} -1.8 & -3.2 \\ 1.2 & 3.8 \end{pmatrix}}_{=F_U} \tilde{x}_U.$$

Kannassa $\mathcal{V}$ sama kuvaus toimii seuraavasti

$$\begin{aligned} \tilde{y}_V &= A^{-1} \tilde{y}_U \\ &= A^{-1} F_U \tilde{x}_U \\ &= \underbrace{A^{-1} F_U A}_{=F_V} \tilde{x}_V \end{aligned}$$

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen
Differentiaaliyhtälö

Esimerkin matriiseilla

$$\begin{aligned}F_V &= A^{-1}F_U A \\&= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1.8 & -3.2 \\ 1.2 & 3.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.8 & -3.2 \\ 1.2 & 3.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Kuvaus on siis helppo kannassa $\mathcal{V}$.

Esimerkki 8. Lineaarinen Differentiaaliyhtälö

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0 \quad (DY)$$

merkitään $z(x) = y'(x)$

$$z'(x) = y''(x) = -4y'(x) - 3y(x)$$

Kaikki differentiaaliyhtälön (DY) tieto voidaan nyt kirjoittaa kahdeksi ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi

$$\begin{cases} y'(x) &= & z(x) \\ z'(x) &= & -3y(x) - 4z(x) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Aiheet

Kanta

Kannan vaihto

Lineaarinen
Differentiaaliyhtälö

Esimerkki 8B. Ominaisarvohajoitelma Kesken esimerkin 8 teemme matriiille A "ominaisarvohajoitelman".

Suora (helppo) lasku osoittaa, että matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -3$. Vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = -1 \longleftrightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -3 \longleftrightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Teemme ominaisarvoista diagonaalimatriisin D ja ominaisvektoreista neliömatriisin X seuraavasti

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Matriisi A voidaan nyt esittää ominaisarvohajoitelmana seuraavasti

$$A = XDX^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Nyt viimeinen matriisi-yhtälö voidaan laskemalla tarkistaa.
Se on tosi. Sen totuus ei perustu sopivasti valittuihin
numeroihin, vaan siihen miten A , D , ja X liittyvät toisiinsa.

Olkoon $\vec{b} = b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 = X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Silloin

$$A\vec{b} = A(b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2) = -b_1\vec{x}_1 - 3b_2\vec{x}_2$$

$$XDX^{-1}\vec{b} = XDX^{-1}X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -b_1\vec{x}_1 - 3b_2\vec{x}_2$$

Jatkamme nyt Differentiaaliyhtälön käsittelyä

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} &= XDX^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow X^{-1} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Otetaan käyttöön uudet funktiot

$$\begin{cases} u(x) = 1.5y(x) + 0.5z(x) \\ v(x) = -0.5y(x) - 0.5z(x) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} u'(x) = 1.5y'(x) + 0.5z'(x) \\ v'(x) = -0.5y'(x) - 0.5z'(x) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Uusien funktioiden avulla ratkaisu saadaan helposti

$$X^{-1} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = -u & \longrightarrow u = C_1 e^{-x} \\ v' = -3v & \longrightarrow v = C_2 e^{-3x} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} \\ C_2 e^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \\ -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} \end{pmatrix}$$

Siis $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$