

Luku 1

Johdanto

1.1 Vektorit ja matriisit, laskulait

Vektori on tuttu jo koulusta. Seuraavassa määrittelemme ensin matriisin, joka on useimmille uusi käsite. Matriisin jälkeen esittelemme vektorin matriisin erikoistapauksena. Vektori-merkintä saattaa poiketa hieman siitä, mihin olemme koulussa tottuneet. Merkintöihin kannattaa totutella, sillä ne ovat virallisen standardin mukaiset.

1.1.1 Matriisit

Suorakulmainen lukukaavio, jossa on m riviä ja n saraketta on $m \times n$ *matriisi* (engl. Matrix). Alla on esimerkkeinä 3×2 matriisi $\mathbf{A}$, 2×4 matriisi $\mathbf{B}$, 3×1 matriisi $\mathbf{u}$ ja 1×2 matriisi $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriisin $\mathbf{X}$ rivillä i sarakkeessa j olevaa lukua sanomme matriisin alkioksi (engl. Element) ja käytämme sille merkintää x_{ij} . Edellä olleista matriiseista löydät mm. seuraavat alkiot: $a_{21} = 0$ ja $b_{23} = -1$. Matriisissa $\mathbf{u}$ on vain yksi sarake, ja sitä sanotaan sarakevektoriksi. Vektorin alkioita sanotaan myös koordinaatiksi. Sarakevektorin alkion paikan ilmaisemiseen riittää yksi indeksi: $u_3 = -2$. Vastaavasti $\mathbf{v}$ on rivivektori: $v_1 = 3$.

Huomautus 1. *Matriisimerkinnät tulee opetella nyt. Myös laskuharjoitusten yhteydessä tulee käyttää oikeita merkintöjä. Laskuharjoituksissa usein tulee tilanne, jossa taululla käsitellään matriiseja ja laskuihin on tullut laskuvirhe. Kun joku yleisöstä havaitsee virheen, on melko tavallista että virheen huomanneen opiskelijan on vaikea kertoa täsmällisesti virheen paikka. Tähän on triviaali ratkaisu: sano rivi ja sarake, minkä jälkeen kaikkien katseet kiinnittyvät oikeaan kohtaan!*

Merkintäsääntöjä: Seuraavat säännöt on syytä käydä läpi nyt ja myöhemmin uudelleen niin monta kertaa, että ne tulevat tutuiksi ja luonnollisiksi.

1. Painotekstissä matriisi merkitään isolla lihavoidulle vinolla kirjaimella (esim. $\mathbf{A}$). Käsin kirjoitetussa materiaalissa merkitsemme matriisin isolla kirjaimella, mutta emme tee siitä lihavoitua tai vinoa.
2. Painotekstissä vektori voidaan merkitä kahdella tavalla: (1) pienellä lihavoidulla vinolla kirjaimella tai (2) pienellä vinolla kirjaimella, jonka päällä on nuoli (esim. $\mathbf{u}$ tai $\vec{u}$). Käsin kirjoitetussa materiaalissa käytetään nuoli merkintää ilman vinoa.
3. Matriisin alkioden väliin ei kirjoiteta erottimia. Alkioden väliin jätetään niin paljon tyhjää, että alkiot erottuvat selvästi toisistaan. Samassa sarakkeessa olevat alkiot sijoitetaan allekain. Sarake on painotekstissä keskitetty, mikä saat-
taa aluksi tuntua oudolta, mutta ratkaisu on vakiintunut noin sadan vuoden kirjapaino-kokemuksella: näin muotoiltua lukukaaviota on helppo lukea!
Kun rivivektori kirjoitetaan leipätekstin riville, on järkevää tiivistää notaatiota. Silloin on alkioden väliin lisättävä erottimet. Erottimina käytetään pilkkuja tai puolipisteitä.
4. Matriisin $\mathbf{A}$ rivillä i sarakkeessa j olevaa alkioita merkitsemme joko a_{ij} tai $\mathbf{A}[i, j]$. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatille käytämme merkintää u_i tai $u[i]$.
5. Matriisin rivit ja sarakkeet sekä vektorin koordinaatit numeroidaan matemaat-
tisessa esityksessä yhdestä alkaen. Matriisin $\mathbf{A}$ vasemmassa ylänurkassa (rivillä
1 sarakkeessa 1) on alkio a_{11} ja vektorin $\vec{u}$ ensimmäinen koordinaatti on u_1 .
Kun kirjoitamme ohjelmakoodia tietokeelle (python kielellä), indeksointi alkaa-
kin nolasta. Aluksi ero indeksoinnissa voi olla ärsyttävä, mutta on hyvä oppia
tuntemaan tämä ero. Tärkeätä on nyt oppia erottamaan milloin kirjoitamme
matemaattista lauseketta, milloin ohjelmakoodia.
6. Kun matriisi ”kirjoitetaan auki”, sen lukukaavio sijoitetaan kaarisulkuihin. Alla
on kaksi esimerkkiä erilaisista merkinnöistä.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{'eurooppalainen' matriisimerkintä}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{'amerikkalainen' matriisimerkintä}$$

Amerikkalaista merkintää näkee monissa oppikirjoissa. Tässä materiaalissa käy-
tämme kaarisulkumerkintää. Kun kirjoitat tutkielmaa tai raporttia ja käytät
useita lähteitä, niin muuta tarvittaessa lähteiden erilaiset merkintätavat yhte-
näiseen muotoon. Johdonmukaisuus merkinnöissä tekee hyvän vaikutuksen.

Seuraavaksi määrittelemme matriisien yhteenlaskun ja matriisin kertomisen reaali-
vulla. Matriisien kertolasku määritellään nyt, mutta tulon ominaisuuksiin tutustumme
vasta myöhemmin.

Määritelmä 2. (1) Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ kumpikin $m \times n$ matriiseja. Silloin matriisien summa $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ on myös $m \times n$ matriisi ja sen alkiot saadaan kaavalla

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})[i, j] = a_{ij} + b_{ij}.$$

(2) Olkoon $\mathbf{A}$ $m \times n$ matriisi ja $r \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Silloin reaaliluvun ja matriisin tulo $r\mathbf{A}$ on myös $m \times n$ matriisi, jonka alkiot ovat

$$(r\mathbf{A})[i, j] = r \cdot a_{ij}.$$

(3) Olkoon $\mathbf{A}$ $m \times n$ matriisi ja olkoon $\mathbf{B}$ $n \times p$ matriisi. Silloin matriisien tulo $\mathbf{AB}$ on $m \times p$ matriisi, jonka alkiot ovat

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})[i, j] &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

(4) Kaksi $m \times n$ matriisia $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat samat, eli $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jos ja vain jos

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$$

Esimerkki 3. a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -3+2 & 1+4 \\ 0-1 & 4+3 & 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix},$$

b)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 0 & 12 & 15 \end{pmatrix},$$

c)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \\ 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 & 5 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 13 \\ 2 & -7 & -4 \\ 10 & 1 & 25 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 29 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkin (3) (sivu 3) kohdissa c) ja d) on laskettu kaksi matriisi tuloa. d-kohtaan on vahvennettu alkiot, joita lasketaan laskettaessa tulon alkioita $[i][j]$. Huomaa, että lauseke on summa tuloista, missä tulojen ensimmäiset tekijät ovat ensimmäisen matriisin riviltä $[i]$ ja tulon toiset tekijät ovat toisen matriisin sarakkeesta $[j]$.

Pienen harjoittelun jälkeen lähes kaikki oppivat laskemaan yksinkertaiset matriisitulot päässälaskuna. Kokeile saatko päässälaskuna saman tuloksen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} \\ 1 & -\mathbf{1} \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \mathbf{11} \\ 29 & 16 \end{pmatrix}$$

MUISTISÄÄNTÖ: Laskettaessa alkio paikkaan $[i][j]$, tarvitaan ensimmäisestä matriisista rivi $[i]$ ja toisesta matriisista sarake $[j]$.

Jos muistat koulussa opetetun vektoreiden pistetulon, niin muistisääntö voidaan myös sanoittaa muotoon: tulomatriisin paikkaan $[i][j]$ tulee ensimmäisen matriisin rivin $[i]$ ja toisen matriisin sarakkeen $[j]$ pistetulo.

1.1.2 Vektorit

Matriisi, jossa on vain yksi sarake, on sarakevektori. Matriisi, jossa on vain yksi rivi, on rivivektori. Koulussa vektori kirjoitettiin tavallisesti rivivektorina. Tässä materiaalissa noudatamme merkintäsääntöä, jonka mukaan vektori on ellei toisin ilmoiteta aina sarake-vektori

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Kun sovimme, että kantavektorit $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ovat myös sarakevektoreita, niin koulusta tuttu kantavektorimerkintä on edelleen toimiva.

$$5\vec{i} + 7\vec{j} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Jotta näyttötila saataisiin tehokkaasti käytettyä, kirjoitetaan joskus vektorin sijasta sen transpoosi. Sarake-vektorin $\vec{a}$ *transpoosi* $\vec{a}^T$ on samat koordinaatit sisältävä rivivektori

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}^T = (2 \ 4).$$

Vastaavasti rivi-vektorin transpoosi on sarake-vektori. Tekstissä siis voimme ilmoittaa edellä mainitut vektorit $\vec{a} = (2 \ 4)^T$ ja $\vec{u} = (5 \ 7)^T$ ilman, että rivivälit kasvaisivat kohtuuttomasti.

Kaikki mahdolliset n reaalista koordinaattia sisältävät vektorit $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$, muodostavat reaalisten n -vektoreiden joukon $\mathbb{R}^n$. ***** Koska n -vektori on erikoistapaus matriisista, ne perivät yhteenlaskusäännön ja reaaliluvulla kertomisen matriiseilta seuraavasti:

¹## Tarkenna $\mathbb{R}^n$:n maarittelyä myöhemmin ##

Määritelmä 4. (1) Olkoon $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, ja $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Silloin

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

(2) Olkoon $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, ja $r \in \mathbb{R}$. Silloin

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ \vdots \\ r \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

(3) Olkoon $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, ja $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Silloin

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}.$$

Huomautus 5. (a) Vektori määriteltiin nyt matriisin erikoistapauksena. Valittu määrittelytapa on seuraavissa luvuissa tarvittavien merkintöjen kannalta helppo ja kätevä, mutta ei mitenkään kovin syvällinen. On olemassa hyvin erilaisia olioita, joita saa sanoa vektoreiksi. Myöhemmin opimme tietämään millä ehdolla jonkin oliojoukon olioita saa kutsua vektoreiksi.

(b) Koska vektorit määriteltiin matriisin erikoistapauksina, 'periytyy' yhteenlasku vektoreille luonnollisella tavalla. Kertolasku ei kuitenkaan periydy. Jos $\vec{a}$ on n -vektori (eli $n \times 1$ matriisi) ja $\vec{b}$ on n -vektori (eli $n \times 1$ matriisi), niin niille ei ole määritelty matriisituloa.

(c) Neliömatriisien joukossa $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \text{ on } n \times n \text{ matriisi}\}$ matriisikertolasku on "laskutoimitus" eli kuvaus $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, joka toteuttaa tietyt laskutoimitukselta vaaditut ominaisuudet. Erityisesti ehto $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ on tosi kaikille neliömatriiseille. Koulusta tuttu vektoreiden pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}^T \vec{b})[1, 1]$ ei ole "laskutoimitus" edelläkuvatussa mielessä.

1.1.3 Termejä ja merkintöjä

Sovimme joillekin erikoisille matriiseille ja vektoreille omat merkintänsä.

Neliömatriisi. Matriisi, jossa on n riviä ja n saraketta on $n \times n$ neliömatriisi.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriisin diagonaali. Matriisin $\mathbf{A}$ diagonaali $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ muodostuu niistä matriisin alkioista, joiden rivi- ja sarakeindeksit ovat samat

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -2 & 0 \\ 5 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 4 & \mathbf{7} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 & 3 & 6 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -\mathbf{1} & 8 \end{pmatrix}.$$

Neliömatriisin diagonaali alkaa vasemmasta ylänurkasta ja päättyy oikeaan alanurkaan.

Diagonaalimatriisi. Neliömatriisi, jonka diagonaalin ulkopuoliset alkiot ovat nollia on diagonaalimatriisi, jota merkitsemme $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$\text{diag}(2, 1, 7) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Nollamatriisi ja nollavektori. Matriisille, jonka jokainen alkio on nolla ja vektorille, jonka kaikki koordinaatit ovat nollia käytämme merkintöjä

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Yksikkömatriisi. Yksikkömatriisi $\mathbf{I}$ on diagonaalimatriisi, jonka kaikki diagonaalialkiot ovat ykösä.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kanooniset kantavektorit. $n \times n$ yksikkömatriisin k :s sarakevektori on kantavektori $\vec{e}_k$, jolle

$$\vec{e}_k[j] = \begin{cases} 0, & \text{kun } j \neq k \\ 1, & \text{kun } j = k \end{cases}$$

Esimerkiksi, kun $n = 4$ ja $k = 2$, niin $\vec{e}_2 = (0; 1; 0; 0)^T$.

1.2 Vektorien ja matriisien luominen pythonilla

Tällä kurssilla opitaan laskemaan vektoreilla ja matriiseilla. Perinteisesti esimerkkien ja harjoitusten on ollut pakko perustua yksinkertasiin ja numeerisesti helppoihin ongelmiin. Nyt otamme käyttöön yksinkertaisen Python-modulin vektorilaskuja varten.

```
[ 1.]
>>> u[2]=5
>>> print u
[[ 2.]
 [ 0.]
 [ 5.]]
>>> print u[1]
[[ 0.]]
>>> print float(u[1])
0.0
>>>
```

Nollavektori $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ on sarakematriisi täynnä nollia, ja se luodaan komennolla

```
a = matrix(zeros((n,1)))
```

Ei ole katsottu tarpeelliseksi varata omaa sanaa, joka tarkoittaisi kanoonista kanta-vektoria. Tarvittaessa 5-vektori $\vec{e}_3$ voidaan luoda kahden komennon yhdisteellä:

```
e3 = matrix(zeros((5,1))); e3[2]=1;
```

1.3 Lineaarikombinaatit

Tässä kappaleessa esitellään termi 'lineaarikombinaatio', joka esiintyy jatkossa hämmästyttävän usein. Vaikka asia on yksinkertainen, siitä pitää oppia käyttämään oikeita ilmaisuja.

Määritelmä 6. (1) *Lineaarikombinaatiolla tarkoitetaan muotoa*

$$r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2 + \cdots + r_p\vec{u}_p$$

olevaa lauseketta, missä $r_1, r_2, \dots, r_p \in \mathbb{R}$ ovat reaalityyppisiä (p kappaletta), ja vastavasti $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$ ovat n-vektoreita (myös p kappaletta).

(2) *Jos $\vec{a} = r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2 + \cdots + r_p\vec{u}_p$, niin sanomme, että vektori $\vec{a}$ on lausuttu vektoreiden $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ lineaarikombinaationa.*

(3) *Jos lineaarikombinaation kaikki kertoimet ovat nollia, niin lineaarikombinaatio on triviaali. Jos ainakin yksi kertoimista poikkeaa nolasta, niin lineaarikombinaatio on ei-triviaali.*

Tulemme jonkin aikaa käsittelemään yhtälöryhmiä. Jo tässä yhteydessä matriisit, vektorit ja lineaarikombinaatit tulevat esiin.

Esimerkki 7. Soveltamalla määritelmää (2 sivu 2) seuraavien rivien matriisi- ja vektorimerkintöihin näemme, että jokainen rivi sanoo muuttujista x , y ja z saman:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 10 \\ 2x + 5y + 2z = 6 \\ x + 6y + 4z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Yhtälöryhmä voidaan siis kirjoittaa myös matriisiyhtälöksi tai vektori yhtälöksi. Tämä ei ole nyt saivartelua, vaan tärkeä opittava asia. Myöhemmin kurssilla siirrytään yhdestä esitysmuodosta toiseen ilman suuria selityksiä.

Yhtälöryhmän matriisimuodossa on vasemmalla kerroinmatriisin ja muuttuja-vektorin tulo ja oikealla on vektori, josta tavallisesti käytetään ilmaisu RHS (Right Hand Side). Yhtälön vasen puoli on vastaavasti LHS (Left Hand Side). Kerroinmatriisin ensimmäisessä sarakkeessa ovat ensimmäisen muuttujan x kertoimet, toisessa sarakkeessa ovat toisen muuttujan y kertoimet, jne. Jos muuttujaa ei jossakin yhtälössä ole, niin vastaava kerroin on 0. Edellä olevat yhtälöryhmän kanssa yhtäpitävät yhtälöt voidaan tiivistää sanallisesti seuraavasti:

"kerroinmatriisi kertaa muuttujavektori = RHS",

"RHS = lineaarikombinaatio kerroinmatriisin sarakkeista, kertoimina muuttujat".

Lause 8. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

(1) Jos RHS voidaan lausua kerroinmatriisin sarakkeiden lineaarikombinaationa, niin yhtälöryhmällä on ratkaisu.

(2) Jos yhtälöryhmällä on ratkaisu, niin se on ainoa ratkaisu, jos nollavektoria ei voida lausua kerroinmatriisin sarakkeiden ei-triviaalina lineaarikombinaationa.

Todistus: Kohta (1) on selvä lausetta edeltävän esimerkin perusteella. Kohdan (2) todittamiseksi riittää osoittaa, että jos yhtälöryhmällä on kaksi toisistaan eroavaa ratkaisua $\vec{x}$ ja $\vec{w}$, niin nollavektori voidaan lausua kerroinmatriisin sarakkeiden ei-triviaalina lineaarikombinaationa. Olkoot $\vec{x}$ ja $\vec{w}$ kaksi erilaista yhtälöryhmän ratkaisuvektoria. Silloin $\vec{d} = \vec{x} - \vec{w}$ on nollavektorista poikkeava vektori, jolle

$$\mathbf{A}\vec{d} = \mathbf{A}(\vec{x} - \vec{w}) = \mathbf{A}\vec{x} - \mathbf{A}\vec{w} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Mutta tämä merkitsee sitä, että nollavektori on lausuttavissa $\mathbf{A}$:n sarakkeiden ei-triviaalina lineaarikombinaationa. $\square$

Esimerkki 9. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y - 3z = 5 \\ -x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Eräs yhtälöryhmän ratkaisu on $\{x = 2, y = 0, z = -1\}$. Toisaalta nollavektori voidaan lausua kerroinmatriisin sarakkeiden lineaarikombinaationa seuraavasti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Edellä olleen lauseen mukaan yhtälöryhmällä on oltava enemmän kuin yksi ratkaisu. Merkitään nyt kerroinmatriisia $\mathbf{A}$:lla ja RHS-vektoria $\vec{b}$:llä. Edellä saadusta ratkaisusta teemme ratkaisuvektorin $\vec{x}_0 = (2; 0; -1)^T$. Edellä olleen lineaarikombinaation ker-toimista teemme vektorin $\vec{w} = (1; 2; 1)^T$. Jokaiseen yhtälöryhmään liitetään "homogee-ninen yhtälöryhmä", joka on muuten sama ryhmä mutta RHS=nollavektori. Vektori $\vec{w}$ on esimerkin yhtälöryhmää vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän ei-triviaali rat-kaisu, sillä $\mathbf{A}\vec{w} = \vec{0}$.

Nyt voimme valita vapaasti reaaliluvun $t \in \mathbb{R}$, ja suora lasku osoittaa, että

$$\mathbf{A}(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{w}) = \vec{b}.$$

Siiis jokaista reaalilukua t kohti yhtälöryhmällä on ratkaisu $\{x = 2 + t, y = 2t, z = -1 + t\}$.

Huomautus 10. Edellä löysimme yhden ratkaisuvektorin ja yhden ei-triviaalin ho-mogeenisen yhtälöryhmän ratkaisuvektorin, ja niiden avulla muodostimme äärettömän monta ratkaisua. Tämä ei suinkaan ole täydellinen analyysi. Voisihan yhtälöryhmäl-lä olla vieläkin enemmän ratkaisuja. Seuraavassa pääkappaleessa tutkimme tämänkin esimerkin ratkaisut täydellisesti.