

Lineaarikuvaukset

aiheita

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen matriisi

Lineaarikuvausten ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisi

Lineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Matematiikassa sana "lineaarinen" liitetään kahden lineaariavaruuden väliseen kuvaukseen.

Määritelmä Olkoon $(L, +, \circ)$ ja $(M, \hat{+}, \hat{\circ})$ reaalisia lineaariavaruuksia, ja olkoon $f : L \rightarrow M, \vec{u} \mapsto f(\vec{u})$ kuvaus. f on lineaarinen eli lineaarikuvaus, jos

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) \hat{+} f(\vec{b}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in L, \text{ ja}$$

$$f(\lambda \circ \vec{a}) = \lambda \hat{\circ} f(\vec{a}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in L.$$

Esimerkki Jokainen $m \times n$ -matriisi $\mathbf{A}$ määrittelee kuvauksen $f_{\mathbf{A}} : E^n \rightarrow E^m, \vec{u} \mapsto \mathbf{A}\vec{u}$. Tämä kuvaus on lineaarinen, sillä

$$f_{\mathbf{A}}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{A}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{A}\vec{a} + \mathbf{A}\vec{b} = f_{\mathbf{A}}(\vec{a}) + f_{\mathbf{A}}(\vec{b}), \text{ ja} \\ f_{\mathbf{A}}(\lambda \circ \vec{a}) = \mathbf{A}(\lambda \vec{a}) = \lambda(\mathbf{A}\vec{a}) = \lambda \circ f_{\mathbf{A}}(\vec{a}).$$

Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\vec{a} + \vec{b}) &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (a_1 + b_1) - 3 \cdot (a_2 + b_2) \\ 2 \cdot (a_1 + b_1) + 1 \cdot (a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 - 3a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 - 3b_2 \\ 2b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\vec{a} + \mathbf{A}\vec{b} \end{aligned}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisi

Lineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Lause 1 Olkoon $f : E^n \rightarrow E^m$, $\vec{u} \mapsto f(\vec{u})$ lineaarinen kuvaus. Silloin on olemassa $m \times n$ -matriisi $\mathbf{A}$, jolle

$$f(\vec{v}) = \mathbf{A}\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in E^n.$$

Todistus. Käytetään seuraavassa konstruktiossa vektoreita $\vec{e}_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{nk})^T$. Jos siis esimerkiksi $n = 4$, niin

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ja } \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Muodostamme matriisin $\mathbf{A}$ siten, että sen k :s sarake on $f(\vec{e}_k) = \vec{a}_k$. Olkoon nyt $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in E^n$ mikä tahansa vektori. Suora lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n) \\ &= v_1 f(\vec{e}_1) + v_2 f(\vec{e}_2) + \dots + v_n f(\vec{e}_n) \\ &= v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2 + \dots + v_n \vec{a}_n \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \vec{v} \end{aligned}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvauksen
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Huomaa, että edellinen lause koskee vain Euklidisia vektoriavaruuksia E^n .

Syy on tietenkin se, että esimerkiksi funktioavaruuksien tapauksessa funktion kertominen matriisilla ei ole hyvin määriteltä. Sen jälkeen, kun kanta ja dimensio on määriteltä, voidaan väite yleistää äärellisulotteisille lineaariavaruuksille.

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Esimerkki: Lineaarikuvauksesta $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiedetään kolme arvoa

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lineaarikuvauksen matriisin ensimmäinen sarake on

$$\vec{a}_1 = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lineaarikuvauksen matriisin toinen sarake on

$$\begin{aligned}\vec{a}_2 &= f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisi

Lineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Lineaarikuvauksen matriisin kolmas sarake on

$$\begin{aligned}\vec{a}_3 &= f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ja kuvauksen matriisi on siis

$$\mathbf{A} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisi

Lineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Tarkistus

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{Ok}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{Ok}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Ok}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Lause 2 Kahdesta lineaarikuvauksesta yhdistämällä saatu yhdistetty kuvaus on myös lineaarikuvaus.

Todistus. HT.

Lause 3 Jos $f : L \rightarrow M$ on lineaarikuvaus, niin $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Todistus. $f(\vec{0}) = f(0 \circ \vec{0}) = 0 \circ f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Esimerkki. Olkoon $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T \in \mathbb{R}^3$ vektori. Kuvaus

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$$

on lineaarinen kuvaus.

Perustelu:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{x} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= +\vec{i}(a_2x_3 - a_3x_2) - \vec{j}(a_1x_3 - a_3x_1) + \vec{k}(a_1x_2 - a_2x_1) \\ &= \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisi

Lineaarikuvauksen
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Kierto kulman α verran origon ympäri.

Määritellään, että piste $\vec{w} = r_\alpha(\vec{z})$ on yhtä kaukana origosta kuin $\vec{z}$, mutta sen paikkavektorin ja x -akselin välinen kulma on α :n verran suurempi kuin vastaava pisteeseen $\vec{z}$ liittyvä kulma.

Jos alkukuva on piste $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

niin trigonometristen kaavojen avulla saamme välittömästi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \varphi) \\ r \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi \\ r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kierto origon ympäri on siis lineaarinen kuvaus!

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvauksen
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Siirto matkan $\vec{d}$ verran.

Siirto

$$s : E^2 \rightarrow E^2, \vec{z} \mapsto \vec{z} + \vec{d}$$

ei ole lineaarikuvaus, sillä $s(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

Siis: kierto origon ympäri on lineaarinen kuvaus, mutta siirto ei ole lineaarinen kuvaus.

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisi

Lineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Kohtisuora projektio aliavaruuteen.

Olkoon $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ vektoreita, $\mathbf{V}$ niistä muodostettu matriisi ja $L = \text{Span}(\mathbf{V})$ v-vektoreiden virittämä aliavaruus.

Jaetaan vektori $\vec{a}$ kahteen osaan

$$\vec{a} = \vec{a}_V + \vec{a}_\perp$$

siten, että $\vec{a}_V \in \text{Span}(\mathbf{V})$ ja $\vec{a}_\perp \perp \vec{v}_k, \forall k$.

Määritelmä Olkoon $f : L_1 \rightarrow L_2$ lineaarikuvaus. Sanomme, että L_1 on kuvauksen lähtöavaruus (engl. domain) ja L_2 on kuvauksen maaliavaruus (engl. codomain).

Lineaarikuvauksen ydin (engl. kernel) on joukko

$$\ker(f) = \{\vec{u} \in L_1 \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\} \subseteq L_1.$$

Lineaarikuvauksen kuva (engl. range) on joukko

$$\text{ran}(f) = \{\vec{w} \in L_2 \mid f(\vec{u}) = \vec{w} \text{ jollakin } \vec{u} \in L_1\} \subseteq L_2.$$

Ydin on siis eräänlainen ”nollakohtien” joukko ja kuva on täsmälleen se mitä peruskurssilla jo on määritelty kuvauksen kuvaksi.

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Lause 4 Olkoon $f : L_1 \rightarrow L_2$ lineaarikuvaus.

Lineaarikuvauksen ydin $\ker(f)$ on L_1 :n lineaarinen aliavaruus,
ja kuva $\operatorname{ran}(f)$ on L_2 :n lineaarinen aliavaruus.

Todistus. HT.



Samoista asioista käytetään hieman erilaisia merkintöjä, kun lineaarikuvaus on matriisin määräämä Euklidisten lineaariavaruuksien välinen kuvaus.

Määritelmä Olkoon $f : E^n \rightarrow E^m, f(\vec{u}) = \mathbf{A}\vec{u}$ lineaarikuvaus. Tämän kuvauksen ydin on matriisin $\mathbf{A}$ ydin (tai nolla-avaruus) (engl. null space)

$$\text{null}(\mathbf{A}) = \{\vec{u} \in E^n \mid \mathbf{A}\vec{u} = \vec{0}\}$$

Kuvauksen kuva on matriisin $\mathbf{A}$ kuva (tai sarake-avaruus) (engl. column space)

$$\text{col}(\mathbf{A}) = \{\vec{v} \in E^m \mid \mathbf{A}\vec{u} = \vec{v}, \text{ jollakin } \vec{u} \in E^n\}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvauksen
matriisiLineaarikuvauksen
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Lause 5 Matriisi $\mathbf{A}$ on vapaa, eli lineaarisesti riippumaton (sen sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman vektorijoukon) jos ja vain, jos sen ydin on triviaali.

Perustelu: Se että Matriisin sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon, merkitsee sitä ettei ole olemassa ei-triviaalia vektoria $\vec{x}$, jolle

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}.$$

Tämä taas tarkoittaa sitä, että ytimessä on vain nolla-vektori.

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Lause 6 Matriisi $\mathbf{A}$ on vapaa jos ja vain, jos $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ on vapaa.

Perustelu: Osoitamme, että matriiseilla on samat ytimet

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}).$$

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) \subset \text{Ker}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$$

$$\vec{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}).$$

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \subset \text{Ker}(\mathbf{A})$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) &\Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\vec{x} = (\mathbf{A}\vec{x})^T \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Matriisin ytimen määrittäminen on hieman mutkikas tehtävä, mutta se perustuu tuttuun tekniikkaan, joten esitämme esimerkin.

Esimerkki Olkoon tutkittavana 4×6 -matriisi

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Määritämme matriisin ytimen. On siis löydettävä kaikki yhtälön $\mathbf{M}\vec{x} = \vec{0}$ ratkaisut. Sitä varten alamme ratkaista tätä yhtälöryhmää. Käytämme rivioperaatioita algortmi-version II mukaisesti, ja aina kun pivotointi epäonistuu, jätämme sarakkeen paikalleen ja jatkamme pivotointia seuraavasta sarakkeesta.

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} [1] & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} -1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \leftarrow \end{array} \right|$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} (1) & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & -8 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ -2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} -2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} +4 \\ \\ \\ \leftarrow \end{array} \right|$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} (1) & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [-2] & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -2 \\ \leftarrow \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ +1 \\ \leftarrow \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \\ \\ +2 \\ \leftarrow \end{array} \right|$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} (1) & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2) & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [4] & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ +1/2 \quad -1/4 \quad : 4 \end{array} \right|$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} (1) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1) & 0 \end{array} \right)$$

Siirretään kolmas ja viides sarake RHS:iin ja kirjoitetaan yhtälöt yhtälöiksi. Lisätään yhtälöihin kaksi triviaalia yhtälöä $x_3 = x_3$ ja $x_5 = x_5$.

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia: (-2)
Lineaarikuvaus

Ydin

Matriisin ydin

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} (1) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1) & 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & -x_3 - x_5 \\ x_2 & = & -x_3 - x_5 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & -x_5 \\ x_5 & = & x_5 \\ x_6 & = & 0 \end{array} \right.$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin

Jos valitsemme arvot $x_3 = a \in \mathbb{R}$ ja $x_5 = b \in \mathbb{R}$, niin ytimeen kuuluvalla vektorilla $\vec{x}$ saadaan esitys

$$\vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

Koska a ja b voidaan valita vapaasti, kuuluvat kaikki mahdolliset vektoreiden $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ lineaarikombinaatiot matriisin $\mathbf{M}$ ytimeen. Siis

$$\text{null}(\mathbf{M}) = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}.$$

Aiheet

Lineaarikuvaus

Lineaarikuvausten
matriisiLineaarikuvausten
ominaisuuksia

Lineaarikuvauksia

Ydin

Matriisin ydin