

Lineaariavaruudet

aiheita

Reaalinen lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

määritelmä Nelikko $(L, \mathbb{R}, +, \circ)$ on reaallinen lineaariavaruus (eli reaallinen vektoriavaruus), jos yhteenlasku

$L \times L \rightarrow L, (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$ ja reaaliluvulla kertominen

$\mathbb{R} \times L \rightarrow L, (\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \circ \vec{u}$ toteuttavat seuraavat ehdot:

$$(A1) \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad \text{kaikilla } \vec{u}, \vec{v} \in L,$$

$$(A2) \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad \text{kaikilla } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in L,$$

(A3) on olemassa (yksikäsitteinen) nolla-alkio $\vec{0} \in L$ siten, että
 $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ kaikilla $\vec{u} \in L$,

luettelo jatkuu seuraavalla kalvolla ...

(A4) jokaista $\vec{u} \in L$ vastaa (yksikäsitteinen) vasta-alkio

$$-\vec{u} \text{ siten, että } \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0},$$

(merkitään $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$)

(A5) $\lambda(\mu \circ \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \circ \vec{u}$, kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u} \in L$,

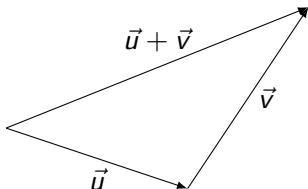
(A6) $(\lambda + \mu) \circ \vec{u} = \lambda \circ \vec{u} + \mu \circ \vec{u}$, kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u} \in L$,

(A7) $\lambda \circ (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \circ \vec{u} + \lambda \circ \vec{v}$, kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in L$,

(A8) $1 \circ \vec{u} = \vec{u}$ kaikilla $\vec{u} \in L$,

Avaruuden L alkioita sanomme vektoreiksi. Jos laskutoimitukset ovat asiayhteydestä selvät sanomme, että " L on reaallinen lineaariavaruus".

esimerkki 1 Tason vektoreiden joukko on reaallinen lineaariavaruus



Tason vektori voidaan esittää lukuparina $\vec{u} = (x, y)$, jolloin $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ja $\lambda \circ (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$.

Suora lasku osoittaa, että nolla-alkio on $(0, 0)$ ja aksioomat (A1 - A8) ovat voimassa.

Esimerkki 2 $m \times n$ -matriisien joukko on reaallinen lineaariavaruus.

Esimerkki 3 Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoon $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ kaikkien kuvausten $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ joukko. Joukko $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ on reaallinen lineaariavaruus, kun määrittelemme

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A$$

$$(\lambda \circ f)(x) = \lambda \cdot f(x), \quad \forall x \in A$$

Lause 1 Olkoon L reaallinen lineaariavaruus. Silloin

$$(1) \quad 0 \circ \vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in L,$$

$$(2) \quad \lambda \circ \vec{0} = \vec{0}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \quad [\lambda \circ \vec{u} = \vec{0}] \Leftrightarrow [\lambda = 0 \text{ tai } \vec{u} = \vec{0}],$$

$$(4) \quad (-1) \circ \vec{u} = -\vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in L.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 \circ \vec{u} &\stackrel{(A3)}{=} 0 \circ \vec{u} + \vec{0} \stackrel{(A4)}{=} 0 \circ \vec{u} + (0 \circ \vec{u} + (-(0 \circ \vec{u}))) \\ &\stackrel{(A2)}{=} (0 \circ \vec{u} + 0 \circ \vec{u}) - (0 \circ \vec{u}) \stackrel{(A6)}{=} (0 + 0) \circ \vec{u} - (0 \circ \vec{u}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Todistus jatkuu

$$\begin{aligned}(4) \quad \vec{u} + (-1) \circ \vec{u} &\stackrel{(A8)}{=} 1 \circ \vec{u} + (-1) \circ \vec{u} \\ &\stackrel{(A6)}{=} (1 + (-1)) \circ \vec{u} = 0 \circ \vec{u} \stackrel{(1)}{=} \vec{0}\end{aligned}$$

Määritelmä Lineaariavaruuden L osajoukko M on lineaarinen aliavaruus, jos

$$(1) \quad \vec{0} \in M$$

$$(2) \quad \vec{u}, \vec{v} \in M \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in M$$

$$(3) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in M \quad \Rightarrow \quad \lambda \circ \vec{u} \in M$$

(Engl. subspace)

Lineaarinen aliavaruus siis sisältää nollavektorin ja se on yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen suljettu osajoukko.

Tyhjä joukko ei ole aliavaruus, mutta pelkän nollavektorin sisältävä joukko $\{\vec{0}\}$ on aliavaruus (triviaali aliavaruus). Koska jokainen aliavaruus sisältää nolavektorin, sisältää kahden aliavaruuden leikkaus aina ainakin nollavektorin.

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Lause 2 Olkoon M_1 ja M_2 kaksi lineaariavaruuden L aliavaruutta. Silloin:

(1) Aliavaruuksien leikkaus

$$M_1 \cap M_2 = \{\vec{u} \in L \mid \vec{u} \in M_1 \text{ ja } \vec{u} \in M_2\}$$

on L :n lineaarinen aliavaruus.

(2) Aliavaruuksien summa

$$M_1 + M_2 = \{\vec{u} + \vec{v} \in L \mid \vec{u} \in M_1 \text{ ja } \vec{v} \in M_2\}$$

on L :n lineaarinen aliavaruus.

Todistus. helppo HT

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Määritelmä Jos M_1 ja M_2 ovat kaksi lineaariavaruuden L aliavaruutta, joiden leikkaus on triviaali ($M_1 \cap M_2 = \{\vec{0}\}$), niin niiden summaa sanotaan suoraksi summaksi ja sitä merkitään

$$M_1 \oplus M_2.$$

Lause 3 Jos lineaariavaruus L on kahden aliavaruutensa M_1 ja M_2 suora summa, eli $L = M_1 \oplus M_2$, niin jokaista vektoria $\vec{u} \in L$ vastaa yhdet ja vain yhdet komponenttivektorit $\vec{u}_1 \in M_1$ ja $\vec{u}_2 \in M_2$ siten, että

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

Todistus. Koska $L = M_1 \oplus M_2$ on olemassa ainakin yhdet komponenttivektorit $\vec{u}_1 \in M_1$ ja $\vec{u}_2 \in M_2$, joille $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. On siis osoitettava, että muita ei löydy.

Olkoon $\vec{w}_1 \in M_1$ ja $\vec{w}_2 \in M_2$ toiset komponentit siten, että $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. Nyt

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\vec{u}_1 - \vec{w}_1}_{\in M_1} = \underbrace{\vec{w}_2 - \vec{u}_2}_{\in M_2}$$

Koska $M_1 \cap M_2 = \{\vec{0}\}$, niin viimeinen yhtälö voi olla tosi vain silloin, kun LHS ja RHS ovat nollavektoreita. Siis $\vec{w}_1 = \vec{u}_1$ ja $\vec{w}_2 = \vec{u}_2$.

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Seuraavassa määritelty joukko on hyvin tärkeä ja usein esiintyvä aliavaruus.

Määritelmä Olkoon L reaalinen lineaariavaruus ja olkoon M sen osajoukko.

Joukon M virittämä aliavaruus, $\text{Span}(M)$, on kaikkien M :n alkioiden äärellisten lineaarikombinaatioiden joukko.
(Engl. subspace spanned by M .)

Sovimme edellisen lisäksi, että tyhjä joukko virittää triviaalin aliavaruuden, $\text{span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Lause 4 Olkoon L reaallinen lineaariavaruus ja olkoon M sen osajoukko. Silloin $\text{span}(M)$ on L :n lineaarinen aliavaruus.

Todistus. Jos $M = \emptyset$, niin $\text{span}(M) = \{\vec{0}\}$ on aliavaruus. Jos $M \neq \emptyset$, niin on olemassa $\vec{u} \in M$ joten $\vec{0} = 0 \circ \vec{u} \in \text{span}(M)$. Siis aliavaruuden määritelmän ehto (1) on voimassa.

(2) Jos $\vec{v}, \vec{w} \in \text{span}(M)$, niin ne voidaan esittää äärellisinä lineaarikombinaatioina

$$\vec{v} = \lambda_1 \circ \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_m \circ \vec{u}_m, \text{ ja}$$

$$\vec{w} = \lambda_{m+1} \circ \vec{u}_{m+1} + \cdots + \lambda_n \circ \vec{u}_n, \text{ joten}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \lambda_1 \circ \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \circ \vec{u}_n \in \text{span}(M)$$

(3) Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $\vec{v} = \lambda_1 \circ \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_m \circ \vec{u}_m$, niin

$$\lambda \circ \vec{v} = (\lambda \cdot \lambda_1) \circ \vec{u}_1 + \cdots + (\lambda \cdot \lambda_n) \circ \vec{u}_n \in \text{span}(M)$$

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Tavallisille $\mathbb{R}^n$:n vektoreille sovimme seuraavaa:

Määritelmä Kahden vektorin $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sisätulo $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$ määritellään kaavalla

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

(Kyseessä on siis jo ennemmin määritelty pistetulo, mutta nyt otamme käyttöön kulmasulku-merkinnän.)

Määritelmästä seuraa välittömästi, että sisätulo on vaihdannainen ja kummankin tekijänsä suhteen lineaarinen. Lisäksi nollavektori on ainoa vektori, jonka sisätulo itsensä kanssa on nolla. Kokoamme nämä selvät ominaisuudet lauseeksi.

Lause 5 Olkoot $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Silloin

$$(S1) \quad \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle,$$

$$(S2) \quad \langle \vec{u} | \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle,$$

$$(S3) \quad \lambda \cdot \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} | \lambda \vec{v} \rangle,$$

$$(S4) \quad \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \geq 0 \text{ ja } \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 \text{ jos ja vain jos } \vec{u} = \vec{0}$$

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Jos kuvaus $f : L \times L \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ toteuttaa lauseen 5 kohdat (S1) - (S4), niin sanomme, että kuvaus on sisätulo ja merkitsemme sen arvoa kulmasulku-merkinnällä kuten edellä ($f(x, y) = \langle x|y \rangle$)

Sisätuloja on muitakin kuin pistetulo. Seuraavilla kalvoilla kulmasulku-merkintä voi tarkoittaa mitä tahansa sisätuloa, mutta ensi-lukemalla kannattaa ajatella sen tarkoittavan pistetuloa.

Määritelmä Vektorit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ovat

(1) kohtisuorassa toisiaan vastaan ($\vec{a} \perp \vec{b}$) eli ortogonaaliset (engl. orthogonal), jos

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = 0.$$

(2) yhdensuuntaiset ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), jos on olemassa reaaliluku $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

(3) samansuuntaiset ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), jos on olemassa positiivinen reaaliluku $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \lambda > 0$$

(4) vastakkaissuuntaiset ($\vec{a} \updownarrow \vec{b}$), jos on olemassa negatiivinen reaaliluku $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \lambda < 0$$

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Olkon $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mitkä tahansa kaksi vektoria. Vektori $\vec{a}$ voidaan aina lausua kahden vektorin summana $\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_\perp$ niin, että ensimmäinen vektoreista on $\vec{b}$:n suuntainen ja toinen on $\vec{b}$:tä vastaan kohtisuorassa. Jos nimittäin asetamme

$$\vec{a}_b = \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b} | \vec{b} \rangle} \vec{b}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_b = \vec{a} - \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b} | \vec{b} \rangle} \vec{b}$$

niin selvästi vektoreiden summa on $\vec{a}$, ensimmäinen vektori on yhdensuuntainen $\vec{b}$:n kanssa ja toinen on kohtisuorassa $\vec{b}$:tä vastaan, sillä

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}_\perp | \vec{b} \rangle &= \left\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b} | \vec{b} \rangle} \vec{b} \middle| \vec{b} \right\rangle \\ &= \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle - \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b} | \vec{b} \rangle} \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Sovimme seuraavasta määritelmästä:

Määritelmä Olkoon $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Vektori

$$\vec{a}_b = \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b} | \vec{b} \rangle} \vec{b}$$

on vektorin $\vec{a}$ projektio vektorin $\vec{b}$ suuntaan
(vektoriprojektio).

Vektoriprojektion pituus on skalaariprojektio.

Vektoreiden $\vec{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ pituudet on koulukurssissa laskettu kaavoilla

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ ja}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Normi yleistää pituuden idean $\mathbb{R}^n$:ään. Perusidea on se, että pienellä vektorilla on pieni normi ja suurella vektorilla on suuri normi. Kaksi vektoria ovat lähellä toisiaan, jos niiden erotuksen normi on pieni.

Määrittelemme kolme erilaista normia.

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinnormit

Matriisinnormit

Määritelmä Vektorin $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 1-normi $\|\vec{a}\|_1$, 2-normi $\|\vec{a}\|_2$ ja ääretön-normi $\|\vec{a}\|_\infty$ määritellään kaavoilla

$$(1) \quad \|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

$$(2) \quad \|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle}$$

$$(3) \quad \|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\} = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

Kakkos-normi on sisätulon indusoima ja se toteuttaa seuraavan tärkeän lauseen

Lause 6 (Cauchy-Schwarz) Kaikille $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa epäyhtälö

$$|\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\|_2 \|\vec{b}\|_2$$

Todistus. Sisätulon ominaisuuksista seuraa, että kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$0 \leq \langle \vec{a} + \lambda \vec{b} | \vec{a} + \lambda \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 + \lambda^2 \|\vec{b}\|^2 + 2\lambda \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$$

Kun tähän sijoitetaan $\lambda = -\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle / \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle$, niin saadaan

$$0 \leq \|\vec{a}\|^2 - \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2},$$

mistä seuraa lauseen väite.

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Aiheet

Reaallinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Lause 7 Kaikilla $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ edellä määritellyt 1-normi, 2-normi ja ääretön-normi toteuttavat seuraavat ehdot

$$(N1) \quad \|\vec{u}\| \geq 0 \text{ ja } \|\vec{u}\| = 0 \text{ jos ja vain jos } \vec{u} = \vec{0}$$

$$(N2) \quad \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|,$$

$$(N3) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \quad (\text{kolmioepäyhtälö})$$

Vektorinormi indusoi matriiseille vastaavan operaattorinormin.

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p} = \max_{\|\vec{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|_p$$

Erityisesti, kun $p = 1$, $p = 2$ tai $p \rightarrow \infty$, saadaan $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ normeille kaavat

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (= \text{itseisarvojen sarakesummien maksimi})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (= \text{itseisarvojen rivisummien maksimi})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \text{määritellään myöhemmin}$$

Aiheet

Reaalinen
lineaariavaruus

Span

Sisätulo

Normi

Matriisinormit

Matriisinormit

Määritelmän seuraa, että matriisin operaattorinormeilla on ominaisuudet

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\vec{x}\|_p &\leq \|\mathbf{A}\|_p \|\vec{x}\|_p \\ \|\mathbf{AB}\|_p &\leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{B}\|_p \\ \|\mathbf{A}^n\|_p &\leq \|\mathbf{A}\|_p^n\end{aligned}$$

[Aiheet](#)[Reaallinen
lineaariavaruus](#)[Span](#)[Sisätulo](#)[Normi](#)[Matriisinormit](#)[Matriisinormit](#)