

2. välikoe 12.12.2014

Opettaja: Matti Laaksonen

Ratkaise 3 tehtävää. Kun käsittelet tehtävän, tee kaikki sen alakohdat. *Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!*

1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Laske jos se on mahdollista a) AB , b) BA c) $B^T A$ d) vA , e) $v^T(A - C)$, f) $v^T v$.

2. a) (3p) Määritä determinantti matriisille

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ K & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad K > 0.$$

b) (1p) Onko matriisi Q säännöllinen ("a matrix of full rank")?

c) (2p) Luettele neljä sellaista determinantin ominaisuutta, joista on apua laskettaessa determinantteja.

3. Matriisin M pseudoinverssi $M^\dagger$ lasketaan kaavalla $M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$. Laske pseudoinverssi $M^\dagger$, kun

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. a) (4p) Ratkaise x , y ja z yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x + y - z = b \\ x + 2y + 2z = 0 \\ Kx + y + 4z = 0 \end{cases}, \quad K > 0, \quad b > 0$$

b) (2p) Olkoon $K > 0$ ja $b > 0$ ja olkoon muuttujilla x , y ja z yllä olevan yhtälöryhmän määrittämät arvot. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia? (Perustele vastauksesi.)

(b1:) $x + y > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

(b2:) $x + z > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

(b3:) $y + z > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

(b4:) $x + y + z > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

Kaavoja:

Sinilause:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ristitulo:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Determinantit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$$

missä m_{ij} on paikkaan ij liittyvän alimatriisin determinantti, eli *minori*.

Adjungaatti:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Säännöllisyys ja vapaus:

Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen $\Leftrightarrow \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$.

Matriisi $\mathbf{A}$ on vapaa, jos $\text{Det}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \neq 0$

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Pseudoinverssi:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Cramerin kaava:

$$x_k = \frac{D_k}{D}$$

2. välikoe 12.12.2014**1. Olkoon**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Laske jos se on mahdollista a) AB , b) BA c) $B^T A$ d) vA , e) $v^T(A-C)$, f) $v^T v$.

a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$
 $3 \times 3 \quad 3 \times 2$
 ok

b) BA
 $3 \times 2 \quad 3 \times 3$
 ✓

ei voi laskea B:n rivillä 2 luku
 A:n sarakelehdessä 3 luku → ✓

c) $B^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
 $2 \times 3 \quad 3 \times 3$
 ok

d) vA
 $3 \times 1 \quad 3 \times 3$
 ✓

e) $v^T(A-C) = (1 \ -2 \ 3) \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
 $1 \times 3 \quad 3 \times 3$
 ok
 $= (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (15 \ 16 \ 1)$

f) $v^T v = (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3)$
 $1 \times 3 \quad 3 \times 1$
 ok
 $= 14$

2. a) (3p) Määritä determinantti matriisille

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ K & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad K > 0.$$

b) (1p) Onko matriisi Q säännöllinen ("a matrix of full rank")?

c) (2p) Luettele neljä sellaista determinantin ominaisuutta, joista on apua laskettaessa determinantteja.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ K & 0 & 4 \end{vmatrix} &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ K & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ K & 0 \end{vmatrix} \\ &= 8 + K \end{aligned}$$

b) Koska $\det(Q) = 8 + K \neq 0$ matriisi Q on säännöllinen.

- c)
- (i) jos kaaviossa on nollarivi, niin kaavion determinantti on 0
 - (ii) jos kaaviossa on kaksi täsmälleen samantyyppistä riviä, niin kaavion determinantti on 0
 - (iii) jos kaavion yläriivi lisätään luvulla korotettuna toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantti on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantti
 - (iv) kolmionmuotoon olevan kaavion determinantti on diagonaalielementtien tulo
 - (v) jos kaaviossa vaihdetaan kahden rivin paikat, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
 - (vi) determinantti ei muutu, jos kaavio transponoidaan.

3. Matriisin M pseudoinverssi $M^\dagger$ lasketaan kaavalla $M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$. Laske pseudoinverssi $M^\dagger$, kun

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (M^T M)^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 & -0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & -0,4 & -0,2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. a) (4p) Ratkaise x , y ja z yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x + y - z = b \\ x + 2y + 2z = 0 \\ Kx + y + 4z = 0 \end{cases}, \quad K > 0, \quad b > 0$$

b) (2p) Olkoon $K > 0$ ja $b > 0$ ja olkoon muuttujilla x , y ja z yllä olevan yhtälöryhmän määrämät arvot. Mitkä seuraavista väitteistä ovat totia? (Perustele vastauksesi.)

(b1:) $x + y > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

(b2:) $x + z > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

(b3:) $y + z > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

(b4:) $x + y + z > 0$ kaikilla $K > 0$ ja $b > 0$.

$$\uparrow \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ K & 1 & 4 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + K \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4K$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = +b \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 6b$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & b & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ K & 0 & 4 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ K & 4 \end{vmatrix} + 0 - 0 = b(2K - 4)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 \\ K & 1 & 0 \end{vmatrix} = +b \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ K & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 = b(1 - 2K)$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{D_1}{D} = \frac{6b}{1+4K}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{b(2K-4)}{1+4K}, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{b(1-2K)}{1+4K}$$

b) (b1) on totti, sillä $x = \frac{6b}{1+4K} > 0$ (koska $b > 0$, niin $\frac{6b}{1+4K} > 0$)

$$(b2): x + z = \frac{6b}{1+4K} + \frac{b-2bK}{1+4K} = \frac{7b-2bK}{1+4K} < 0, \text{ jos } K > 3,5$$

$\Rightarrow$ b2 ei ole totti

$$(b3) \quad y + z = \frac{2bK-4b}{1+4K} + \frac{b-2bK}{1+4K} = \frac{-3b}{1+4K} < 0 \text{ aina}$$

$\Rightarrow$ b3 ei ole totti

$$(b4) \quad x + y + z = \frac{6b}{1+4K} + \frac{2bK-4b}{1+4K} + \frac{b-2bK}{1+4K} = \frac{3b}{1+4K} > 0 \text{ aina}$$

$\Rightarrow$ b4 on totti