

2. välikoe ti 10.11.2015, Opettaja: Matti Laaksonen

Ratkaise 3 tehtävää. Kun käsittelet tehtävän, tee kaikki sen alakohdat. *Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!*

1. a) (4p) Määritä käänteismatriisit matriiseille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

b) (2p) Anna sanallinen perustelu sille, että suoraan matriisista $\mathbf{B}$ näkee sen, että $\mathbf{B}^{-1}$ on olemassa kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

2. a) (3p) Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & p & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & q & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

b) (3p) Anna kolme determinantin ominaisuutta, joita voit käyttää determinantin laskun aikana helpottamassa laskua.

3. a) (4p) Millä vakion R arvoilla seuraavalla yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu?

$$\begin{cases} Rx + 3y - 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + Rz = 0 \end{cases}, \quad R \in \mathbb{R}.$$

b) Määritä yllä olevan yhtälöryhmän kaikki ei-triviaalit ratkaisut, joissa muuttuja z saa arvon $z = 1$.

4. Ratkaise x , y ja z yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x + y - z = b \\ x + 2y + 2z = 0 \\ Kx + y + 4z = 0 \end{cases}, \quad K > 0, \quad b > 0$$

Kaavoja:

Sinilause:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ristitulo:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Determinantit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$$

missä m_{ij} on paikkaan ij liittyvän alimatriisin determinantti, eli *minori*.

Adjungaatti:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Säännöllisyys ja vapaus:

Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen $\Leftrightarrow \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$.

Matriisi $\mathbf{A}$ on vapaa, jos $\text{Det}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \neq 0$

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Pseudoinverssi:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Cramerin kaava:

$$x_k = \frac{D_k}{D}$$