Vaasan yliopisto, syksy 2015

Lineaarialgebra, math.1150

2. välikoe ti 10.11.2015, Opettaja: Matti Laaksonen

Ratkaise 3 tehtävää. Kun käsittelet tehtävän, tee kaikki sen alakohdat. *Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!*

1. a) (4p) Määritä käänteismatriisit matriiseille

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

b) (2p) Anna sanallinen perustelu sille, että suoraan matriisista $\boldsymbol{B}$ näkee sen, että $\boldsymbol{B}^{-1}$ on olemassa kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu: (Rivioperaatioilla) a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|l} \text{vaihda} \\ \text{vaihda} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|c|c} \leftarrow - & \\ \star 1/2 & \star 1/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \qquad \longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|r|l} \leftarrow + & \\ \star a & \star(-1) \\ & \\ & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|r|l} & \leftarrow - \\ \leftarrow + & \\ \star 1 & \star a \\ & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|l} \\ \\ \\ \star 1/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \qquad \longrightarrow \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(Adjungaatilla) a)

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -2$$

adjungaatit: $\begin{array}{ll} m_{11} = 1, & m_{12} = 1, \\ m_{21} = 2, & m_{22} = 0. \end{array}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2 \tag{1}$$

adjungaatit:

$m_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$	$m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$	$m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$	$m_{14} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$
$m_{21} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a,$	$m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$	$m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$	$m_{24} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$
$m_{31} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a,$	$m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$	$m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$	$m_{34} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$
$m_{41} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$	$m_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$	$m_{43} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$	$m_{44} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} m_{11} = -2, & m_{12} = 0, & m_{13} = 0, & m_{14} = 0 \\ m_{21} = 2a, & m_{22} = 2, & m_{23} = 0, & m_{24} = 0 \\ m_{31} = 2a, & m_{32} = 2, & m_{33} = -2, & m_{34} = 0 \\ m_{41} = 0, & m_{42} = 0, & m_{43} = 0, & m_{44} = -1 \end{array}}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} (-2) & -(2a) & (2a) & -(0) \\ -(0) & (2) & -(2) & (0) \\ (0) & -(0) & (-2) & -(0) \\ -(0) & (0) & 0 & (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. a) (3p) Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & p & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & q & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

b) (3p) Anna kolme determinantin ominaisuutta, joita voit käyttää determinantin laskun aikana helpottamassa laskua.

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & p & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & q & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{(kehitetään toisen rivin suhteen)} \\ &= -0 + 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & q & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \quad \text{(kehitetään toisen sarakkeen suhteen)} \\ &= -3 \cdot \left(-0 + q \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \right) = -3 \cdot q \cdot (4 - (-3)) = -21q \end{aligned}$$

b)

- Kun matriisin kaksi riviä vaihtavat paikkaa, syntyvän uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku.
- Jos kaaviossa on nolla-rivi, niin kaavion determinantti on 0.
- Jos kaavion jokin rivi lisätään luvulla kerrottuna kaavion toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantti on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantti.
- Jos kaavio on kolmiomuodossa, niin kaavion determinantti on diagonaali-alkioiden tulo
- ...

3. a) (4p) Millä vakion R arvoilla seuraavalla yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu?

$$\begin{cases} Rx + 3y - 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + Rz = 0 \end{cases}, \quad R \in \mathbb{R}.$$

b) Määritä yllä olevan yhtälöryhmän kaikki ei-triviaalit ratkaisut, joissa muuttuja z saa arvon $z = 1$.

Ratkaisu: a) Homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu jos ja vain jos kerroinmatriisin determinantti on nolla

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \begin{vmatrix} R & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & R \end{vmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow +(R)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & R \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & R \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow R(2R-1) - 3(-R+2) - 2(1-4) &= 0 \\
\Leftrightarrow 2R^2 + 2R &= 0 \\
\Leftrightarrow R = 0, \text{ tai } R = -1.
\end{aligned}$$

b) Jos $R = 0$ ja $z = 1$, niin

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 3y - 2 \cdot 1 = 0 \\ -x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 0 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \star 2 \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} 3y = 2 & (1) \\ -x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \longrightarrow y = 2/3 \\ (2) & \longrightarrow -x + 2 \cdot 2/3 = 1 \longrightarrow x = 1/3 \end{array}$$

Jos $R=-1$ ja $z=1$, niin

$$\begin{cases} -1\cdot x & + & 3y & - & 2\cdot 1 & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 1 & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 1\cdot 1 & = & 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} \star 1 \\ \leftarrow - \\ \end{array}\right| \begin{array}{c} \star 2 \\ \\ \leftarrow + \end{array} \left| \begin{array}{c} \star(-1) \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x & - & 3y & = & -2 & (1) \\ & & -y & = & -1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (2) & \longrightarrow y=1 \\ (1) & \longrightarrow x-3\cdot 1=-1 \longrightarrow x=2 \end{array}$$

Vastaus: a) Yhtälöryhmällä on ei-triviaaleja ratkaisuja, jos $R=-1$ tai $R=0$.
b) Jos $R=-1$, niin $x=2, y=1, z=1$, jos $R=0$, niin $x=1/3, y=2/3, z=1$.

4. Ratkaise x, y ja z yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & b \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ Kx & + & y & + & 4z & = & 0 \end{cases}, \qquad K>0, \quad b>0$$

Ratkaisu: Käytetään Cramerin kaavoja

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 2 \\ \mathbf{K} & 1 & 4 \end{vmatrix} = +(1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (K)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4K+1 \\
D_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b} & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & 2 & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & 4 \end{vmatrix} = +(b)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 6b \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{b} & -1 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 \\ K & \mathbf{0} & 4 \end{vmatrix} = -(b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ K & 4 \end{vmatrix} + 0 - 0 = b(2K-4) \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{b} \\ 1 & 2 & \mathbf{0} \\ K & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = +(b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ K & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 = b(1-2K)
\end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_1}{D} = \frac{6b}{4K+1} \\
y &= \frac{D_2}{D} = \frac{b(2K-4)}{4K+1} \\
z &= \frac{D_3}{D} = \frac{b(1-2K)}{4K+1}
\end{aligned}$$

Kaavoja:

Sinilause:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Ristitulo:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Determinantit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$$

missä m_{ij} on paikkaan ij liittyvän alimatriisin determinantti, eli *minori*.

Adjungaatti:

$$\mathrm{Adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} &= \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} &= \frac{1}{\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})}\mathrm{Adj}(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

Säännöllisyys ja vapaus:

Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on säännöllinen $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

Matriisi $\boldsymbol{A}$ on vapaa, jos $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \neq 0$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T &= \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \end{aligned}$$

Pseudoinverssi:

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$$

Cramerin kaava:

$$x_k = \frac{D_k}{D}$$