

Lineaarialgebra, kertausta

aiheita

Matriisit ja determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen riippumattomuus

$\text{Rank}(A)$

pseudoinverssi

Lineaarinen kuvaus

Kanta ja dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

$\text{Rank}(A)$

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

- ▶ Matriisitulo
- ▶ käänteismatriisi
- ▶ determinantin kehittäminen
- ▶ determinantin ominaisuudet
- ▶ adjungaatti ja Cramerin kaavat

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

- ▶ yhtälöryhmän eri esitystavat
- ▶ Gauss-Jordan -algoritmi
- ▶ Cramerin kaavat
- ▶ Erikoistapaukset

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Lineaarinen riippumattomuus

Määritelmä

(1) Vektorisysteemi $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton (eli vapaa), jos

$$(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}) \Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0) \quad (1)$$

(2) Vektorisysteemi $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ on vapaa, jos mitään vektoreista ei voida lausua muiden lineaarikombinaationa.

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Lineaarinen riippumattomuus

Lauseita

Olkoon $\mathbf{U}$ matriisi $(m \times n)$, jonka sarakkeissa on vektorit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$.

(3) Jos $m = n$, niin $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ on vapaa, jos ja vain jos

$$\det(\mathbf{U}) \neq 0.$$

(4) Jos $m > n$, niin $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ on vapaa, jos ja vain jos

$$\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) \neq 0.$$

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Rank(A)

Määritelmä

Matriisin säännöllisyysaste on sen vapaiden sarakkeiden lukumäärä.

$n \times n$ neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}(\mathbf{A}) = n$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ on "a matrix of full rank".}$$

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Rank(A)

Olkoon $m > n$. Silloin $m \times n$ matriisille $\mathbf{A}$ on voimassa

$$\begin{aligned}\text{Rank}(\mathbf{A}) &= n \\ \Leftrightarrow \text{Det}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) &\neq 0\end{aligned}$$

Olkoon $m = n$. Silloin $n \times n$ matriisille $\mathbf{A}$ on voimassa

$$\begin{aligned}\text{Rank}(\mathbf{A}) &= n \\ \Leftrightarrow \text{Det}(\mathbf{A}) &\neq 0\end{aligned}$$

Olkoon $m < n$. Silloin $m \times n$ matriisille $\mathbf{A}$ on voimassa

$$\text{Rank}(\mathbf{A}) \leq m < n$$

Aiheet

Matriisit ja determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen kuvaus

Kanta ja dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Rank(A)

Vapaaksi karsiminen

- ▶ Tarvittaessa matriisin sarakkeet saadaan karsittua vapaaksi Gaussin algoritmilla.
- ▶ Vapaaksi karsimalla saadaan sarakeavaruuden $\text{Col}(A)$ kanta.
- ▶ Tarvittaessa tämä kanta voidaan ortonormittaa **Gramm-Schmidt** algoritmilla

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Pseudoinverssi

määritelmä

- ▶ Milloin on olemassa?
- ▶ Miten lasketaan?
- ▶ Miten käytetään?

Jos $m \times n$ matriisin $\mathbf{A}$ säännöllisyysaste on n , niin pseudoinverssi on

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Pseudoinverssi

Käyttö

Jos yhtälöryhmällä

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, niin

$$\vec{x} = \mathbf{A}^\dagger \vec{b}$$

Jos

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \cdots + c_n \vec{a}_n = \mathbf{A}\vec{c} = \hat{\vec{y}} \approx \vec{y}$$

niin parhaat kertoimet (PNS) saadaan kaavalla

$$\vec{c} = \mathbf{A}^\dagger \vec{y}, \quad \hat{\vec{y}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \vec{y}$$

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Lineaarinen kuvaus

määritelmiä

- ▶ Lineaarikuvauksen määritelmä
- ▶ Lineaarikuvauksen ydin ja kuva
- ▶ Lineaarikuvauksen matriisi
- ▶ Matriisin sarakeavaruus
- ▶ Matriisin ydin

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

**Lineaarinen
kuvaus**

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Kanta ja dimensio

Määritelmiä

Lineaariavaruuden kanta

- (1) on vapaa ja
- (2) virittää koko lineaariavaruuden

- ▶ Kantavektoreiden lukumäärä on dimensio.
- ▶ Jos vektoreita on liikaa, systeemi voidaan karsia vapaaksi
→ saadaan selville dimensio

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Kannanvaihto

Koordinaatit kannassa

Vektorin $\vec{a}$ koordinaattivektori kannassa $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ on $\vec{c}$, jos

$$\begin{aligned}\vec{a} &= c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_n \vec{u}_n \\ &= \mathbf{U} \vec{c}\end{aligned}$$

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Kannanvaihto

Kaavat

Olkoon U ja W kaksi kantaa ja

$$U = WA$$

Jos

$$\vec{a} = U\vec{c}_u = W\vec{c}_w,$$

niin

$$\vec{c}_w = A\vec{c}_u, \quad \text{ja} \quad \vec{c}_u = A^{-1}\vec{c}_w.$$

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Similaarisuus

Määritelmä

Olkoon T säännöllinen matriisi. Matriisit A ja B ovat similaariset, jos ja

$$A = T^{-1}BT$$

- ▶ Similaarisilla matriiseilla on samat ominaisarvot
- ▶ Diagonalisointi

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Ortogonaalisuus

- ▶ Q on ortogonaalinen, jos $Q^T = Q^{-1}$
- ▶ Ortogonaalisen matriisin sarakkeet muodostavat ortonormitetun kannan.
- ▶ Ortonormitus: Gramm-Schmidt
- ▶ QR -hajotelma
- ▶
- ▶

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

- ▶ Ominaisarvotehtävä
- ▶ Defektiivisyys
- ▶ Symmetrisen reaalisen matriisin ominaisarvotehtävä helppo!
- ▶ Yhteys singulaariarvohajoitelman
- ▶
- ▶

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

- ▶ Singulaariarvohajoitelma
- ▶ Matriisinormit
- ▶ Matriisin kuntoluku

Neliömuodot

- ▶ Miten laaditaan neliömuotoon liittyvä symmetrinen matriisi?
- ▶ Miten symmetrisen matriisin definiittisyys tutkitaa?
- ▶ Ominaisarvojen tulo on $\text{Det}(A)$
- ▶ Ominaisarvojen summa on $\text{Trace}(A)$
- ▶
- ▶

Aiheet

Matriisit ja determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen riippumattomuus

$\text{Rank}(A)$

pseudoinverssi

Lineaarinen kuvaus

Kanta ja dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta

Pienimmän Neliösumman Menetelmä (OLS)

- ▶ Selitettävä vektori $\mathbf{y}$ (aikasarja)
- ▶ Selittävät vektorit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ (aikasarjat)
- ▶ Selitysmalli $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{X}\mathbf{c}$.
- ▶ yhteys ortonaaali-projektioon
- ▶ Yhteys pseudoinverssiin ($\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{y}$)
parhaat kertoimet ovat $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{y}$
- ▶ Mallin antama estimaatti $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{c}}$ on lähinnä selitettävää aikasarjaa $\mathbf{y}$ oleva lineaarikombinaatio selittävistä aikasarjoista $\mathbf{x}_i$.

Aiheet

Matriisit ja
determinantit

Yhtälöryhmät

Lineaarinen
riippumattomuus

Rank(A)

pseudoinverssi

Lineaarinen
kuvaus

Kanta ja
dimensio

Kannanvaihto

Similaarisuus

Ortogonaalisuus

Ominaisarvot

muuta