

Lineaarialgebra II, MATH.1240

4. harjoitus, (viikko 13, 25.3.–29.3.2019)

R01	ke	14-16	F291
R02	ke	08-10	F291
R03	to	14-16	F425

1. Olkoon

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lausu vektori $\vec{b} = (3 \ 7 \ 5)^T$ v-vektoreiden lineaarikombinaationa. Siis etsi sellaiset kertoimet c_1, c_2 ja c_3 , että

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{b}.$$

b) Pystyykö minkä tahansa vektorin $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ lausumaan v-vektoreiden lineaarikombinaationa?

c) Onko v-vektoreista koostuva joukko lineaarisesti riippumaton?

2. Olkoon $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 2x + y + z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Määritä L :n ydin $\text{Ker } L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

b) Määritä L :n kuva $\text{Im } L = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid L(\vec{x}) = \vec{y} \text{ for some } \vec{x} \in \mathbb{R}^3\}$.

3. Olkoon $\vec{v}_1 = (1 \ 1 \ 0)^T$ ja $\vec{v}_2 = (0 \ 1 \ 1)^T$, ja olkoon $M \subset \mathbb{R}^3$ aliavaruus, jonka $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ virittävät. Siis $M = \text{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$

a) Laske seuraavat lineaarikombinaatiot $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = 3\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$, $\vec{w}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$.

b) Mikä yhteinen ominaisuus näillä vektoreilla on?

c) Säilyykö tämä ominaisuus kahden vektorin yhteenlaskussa?

4. Muodostetaan edellisen tehtävän v-vektoreista matriisi

$$\mathbf{V} = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Projektiokuvaus $\mathbb{R}^3 \rightarrow M, \vec{x} \mapsto \mathbf{P}\vec{x}$, missä $\mathbf{P} = \mathbf{V}(\mathbf{V}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^T$, on lineaarinen kuvaus. Perustelee (todista) seuraavat kolme väitettä:

a) $\mathbf{P}\vec{x} \in M, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) vektori $\vec{x}_{\perp M} = \mathbf{P}\vec{x} - \vec{x}$ on kohtisuorassa vektoreita $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ vastaan.

c) kaikille $\vec{z} \in M$ on totta, että $\vec{x}_{\perp M}$ on kohtisuorassa vektoria $\vec{z}$ vastaan.

(Huom. a-kohta merkitsee sitä, että kuvaus on hyvin määritelty. b-kohdan saat kerralla valmiiksi, kun osoitat että $\mathbf{V}^T\vec{x}_{\perp M} = \vec{0}$)

5. a) Varmista suoralla laskulla, että edellisen tehtävän projektiomatriisi on

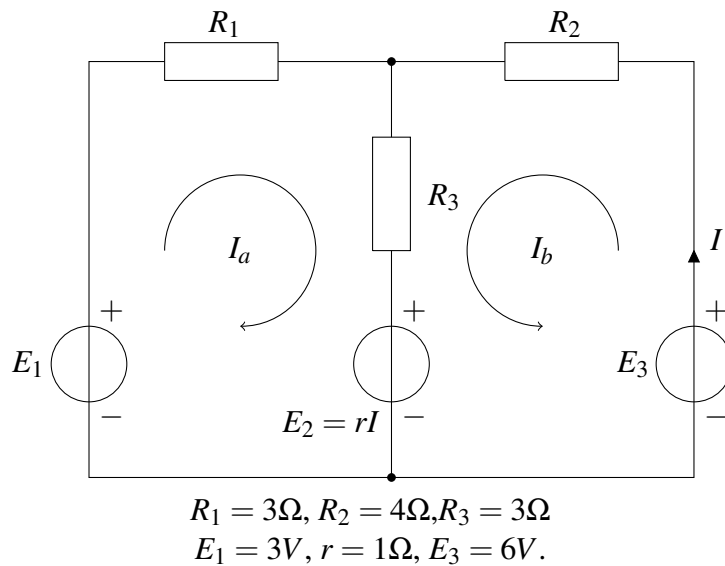
$$\mathbf{P} = \mathbf{V} (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

b) Olkoon $\vec{x} = (3 \quad 6 \quad -3)^T$. Laske $\vec{y}_1 = \mathbf{P}\vec{x}$, $\vec{y}_2 = \mathbf{P}\mathbf{P}\vec{x}$, ja $\vec{y}_3 = \mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{P}\vec{x}$

6. Olkoon vektorit $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ja matriisit $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{P}$ samat kuin edellisessä tehtävässä. Etsi kaikki vektorit $\vec{x}$, joille

$$\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}.$$

7. Tarkastellaan kytkentää



Silmukoita 'a' ja 'b' koskevat Kirchhoffin lain mukaiset jänniteyhtälöt ovat

$$\begin{cases} -E_1 + R_1 I_a + R_3 I_a + rI = 0 \\ -E_3 + R_2 I_b + R_3 I_b + rI = 0 \end{cases}$$

Kirjoita yhtälöryhmä matriisiyhtälöksi ja ratkaise I_a ja I_b .