

Lineaarialgebra II, MATH.1240

5. harjoitus, (viikko 14, 2.4.–6.4.2018)

R1	ke	14–16	F425
R2	ke	08–10	F291
R3	to	14–16	F425

1. Olkoon $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ joukko vektoriavaruuden V vektoreita. Näytä, että jos jokainen V :n vektori $\vec{w}$ voidaan tasan yhdellä tavalla esittää S :n vektoreiden lineaarikombinaationa, niin S on V :n kanta

2. Tutkitaan matriiseja

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mille tutkittavista matriiseista on totta, että matriisin sarakkeet muodostavat $\mathbb{R}^3$:n kannan?

3. Laske matriisin $\mathbf{M}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Määritä ominaisarvot ja ominaisvektorit matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Matriisin

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

karakteristinen polynomi on

$$P(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda + 4)(\lambda - 3).$$

Määritä $\mathbf{B}$:n ominaisvektorit.

6. Olkoon S reaalisten symmetristen 2×2 matriisien vektoriavaruus ja olkoon L lineaarinen kuvaus, jolle

$$L : S \rightarrow S, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 3b+2c \\ 3b+2c & a+2b \end{pmatrix}.$$

Näytä, että $\lambda = 4$ on ominaisarvo ja vektori $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on vastaava ominaisvektori lineaarikuvaukselle $L : S \rightarrow S$.