Vaasan yliopisto, kevät 2018

Lineaarialgebra II, MATH.1240

5. harjoitus, (viikko 14, 2.4.–6.4.2018)

R1	ke	14–16	F425
R2	ke	08–10	F291
R3	to	14–16	F425

1. Olkoon $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ joukko vektoriavaruuden V vektoreita. Näytä, että jos jokainen V:n vektori $\vec{w}$ voidaan tasan yhdellä tavalla esittää S:n vektoreiden lineaarikombinaationa, niin S on V:n kanta

2. Tutkitaan matriiseja

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mille tutkittavista matriiseista on totta, että matriisin sarakkeet muodostavat $\mathbb{R}^3$:n kannan?

3. Laske matriisin $\boldsymbol{M}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Määritä ominaisarvot ja ominaisvektorit matriisille

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Matriisin

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

karakteristinen polynomi on

$$P(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda + 4)(\lambda - 3).$$

Määritä $\boldsymbol{B}$:n ominaisvektorit.

6. Olkoon S reaalisten symmetristen 2×2 matriisien vektoriavaruus ja olkoon L lineaarinen kuvaus, jolle

$$L : S \to S, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 3b + 2c \\ 3b + 2c & a + 2b \end{pmatrix}.$$

Näytä, että $\lambda = 4$ on ominaisarvo ja vektori $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on vastaava ominaisvektori lineaarikuvaukselle $L : S \to S$.

Vaasan yliopisto, kevät 2018

Lineaarialgebra II, MATH.1240

5. harjoitus, (viikko 14, 2.4.–6.4.2018)

R1	ke	14–16	F425
R2	ke	08–10	F291
R3	to	14–16	F425

1. Olkoon $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ joukko vektoriavaruuden V vektoreita. Näytä, että jos jokainen V:n vektori $\vec{w}$ voidaan tasan yhdellä tavalla esittää S:n vektoreiden lineaarikombinaationa, niin S on V:n kanta

On osoitettava, että

(1) S virittää V:n ja
(2) S on vapaa.

(1) Oletuksen mukaan jokainen V:n vektori voidaan esittää S:n vektoreiden lineaarikombinaationa. $\square$

(2) $\overline{0}$ voidaan esittää S:n vektoreiden lineaarikombinaationa.

$$\vec{0} = 0 \cdot \overline{v}_1 + 0 \cdot \overline{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \overline{v}_n$$

Koska tämä on ainoa tapa
S on lineaarisesti riippumaton
(ts $c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + \cdots + c_n\overline{v}_n = \overline{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$)

$\square$

2. Tutkitaan matriiseja

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mille tutkittavista matriiseista on totta, että matriisin sarakkeet muodostavat $\mathbb{R}^3$:n kannan?

P:ssä liian vähän sarakkeita, S:ssä liikaa
$\therefore$ P ja S EI ∇_0
$\det(Q) = 0$ sidottu EI ∇_0
$\det(R) = 2 \neq 0$ vapaa
$\therefore$ R:n sarakkeet muodostavat kannan

3. Laske matriisin $\boldsymbol{M}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Karakteristinen yhtälö

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 4 \cdot 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = 6 \quad \vee \quad \lambda_2 = -3} \quad (\leftarrow \text{ominaisarvot})$$

Ominaisvektorit

$\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 6x_1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 6x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_2 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ 5x_1 = 4x_2 \qquad \overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 4a \\ 5a \end{pmatrix},\ a \neq 0$$

$\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 + 2x_2 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ x_1 = -x_2 \qquad \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

Vastaus

ominaisarvo	ominaisvektori
$\lambda_1 = 6$	$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 4a \\ 5a \end{pmatrix},\ a \neq 0$
$\lambda_2 = -3$	$\overline{x}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},\ b \neq 0$

4. Määritä ominaisarvot ja ominaisvektorit matriisille

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Karakteristinen yhtälö

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot|\because| + 0|\because| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0 \\ &\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm 2}{2} \end{aligned}}$$

Ominaisarvot

$\therefore \lambda_1 = 1$ kertaluku 2

$\lambda_2 = 3$ kertaluku 1

Ominaisvektorit

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ 2x_2 + x_3 = x_2 \\ x_2 + 2x_3 = x_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 \text{ vapaa} \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

$$\therefore \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix}, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$$

$\lambda_2 = 3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_1 \\ 2x_2 + x_3 = 3x_2 \\ x_2 + 2x_3 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}, c \neq 0$$

Vastaus: Ominaisarvot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 3$

Ominaisarvoon $\lambda_1 = 1$ liittyy ominaisvektorit

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \neq 0 \quad \text{ja} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix}, b \neq 0,$$

ominaisarvoon $\lambda_2 = 3$ liittyy ominaisvektori

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}, c \neq 0$$

5. Matriisin

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

karakteristinen polynomi on

$$P(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda + 4)(\lambda - 3).$$

Määritä B:n ominaisvektorit.

Ominaisarvot $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 3$

Ominaisvektorit

$\boxed{\lambda_1 = 6}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 4x_3 = 6x_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 6x_2 \\ 4x_1 + x_2 = 6x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 & \cdot 1 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_3 = 0 & \cdot \frac{1}{5} \quad \cdot \frac{1}{5} \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{5x_1 - 5x_3 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 & \rightarrow x_1 = x_3 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 & \rightarrow x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

$$\boxed{\lambda_2 = -4} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 4x_3 = -4x_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -4x_2 \\ 4x_1 + x_2 = -4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \quad \cdot(-4) \\ \cancel{4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -35x_2 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow x_2 = 0, \quad x_1 = -x_3$$

$$\therefore \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \; b \neq 0$$

$$\boxed{\lambda_3 = 3} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 4x_3 = 3x_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad \cdot 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \cdot(-1) \quad \cdot 3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x_2 + 7x_3 = 0 \quad \cdot(-1/7) \quad \cdot \tfrac{1}{7} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_3 = -x_2, \quad x_1 = -x_2$$

$$\therefore \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ -c \end{pmatrix}, \; c \neq 0$$

$$V: \lambda_1 = 6, \; \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}; \; \lambda_2 = -4, \; \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}; \; \lambda_3 = 3, \; \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ -c \end{pmatrix}$$

6. Olkoon S reaalisten symmetristen 2×2 matriisien vektoriavaruus ja olkoon L lineaarinen kuvaus, jolle

$$L : S \to S, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 3b+2c \\ 3b+2c & a+2b \end{pmatrix}.$$

Näytä, että $\lambda = 4$ on ominaisarvo ja vektori $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on vastaava ominaisvektori lineaarikuvaukselle $L : S \to S$.

$$L\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 & 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$