

Lineaarialgebra II, MATH.1240**6. harjoitus**, (viikko 15, 8.4.–12.4.2019)

R1	ke	14–16	F291
R2	ke	08–10	F291
R3	to	14–16	F425

1. Merkitään S :llä reaalisten symmetristen 2×2 matriisien vektoriavaruutta

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ Näytä, että kolme matriisia}$$

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

muodostavat S :n kannan.

2. Olkoon S sama reaalisten symmetristen 2×2 matriisien vektoriavaruus kuin edellisessä tehtävässä. Olkoon f lineaarinen kuvaus, jolle

$$f: S \rightarrow S, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 3b+2c \\ 3b+2c & a+2b \end{pmatrix}.$$

Määritä lineaarikuvauksen f matriisi $\mathbf{F}$ kannassa $\mathcal{M}$.

3. Määritä edellisessä tehtävässä löydetyn matriisin $\mathbf{F}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

4. Etsi matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit. Tarkista tulos.

Vihje: Ne voivat olla kompleksisia.

5. Olkoot vektorit $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ matriisin

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

sarakkeet. Laske $\mathbf{Q}^T \vec{q}_k$.

6. Olkoon

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T, \text{ missä } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ja $\mathbf{Q}$ on sama matriisi kuin edellisessä tehtävässä. Laske $\mathbf{M}\vec{q}_k$.

7. Olkoot $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ja $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ kaksi $\mathbb{R}^2$:n kantaa, joille

$$\begin{cases} \vec{u}_1 &= 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$$

a) laske vektorin $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{V}$.

b) laske vektorin $\vec{b} = 2\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{U}$.