

Lineaarialgebra II, MATH.1240

7. harjoitus, (viikko 16, 8.4.–12.4.2019)

R1	ke	10–12	F291
R2	ke	08–10	F291
R3	ke	12–14	F425

1. Matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on QR-hajoitelma

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.7 \\ -0.5 & -0.5 & 0.7 & -0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.7 & -0.1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Käyttämällä QR-hajoitelmaa ja laskemalle matriisitulo $\mathbf{Q}^T \vec{b}$ tietokoneella, saamme yhtälöryhmän muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \vec{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{Q}\mathbf{R}\vec{x} &= \vec{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{R}\vec{x} &= \mathbf{Q}^T \vec{b} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6\text{E}-17 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ratkaise yhtälöryhmä, jos mahdollista.

2. Olkoon 3×2 matriisilla $\mathbf{C}$ QR-hajoitelma $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, missä $\mathbf{Q}$ on ortogonaalinen ja

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anna $\mathbf{C}$:n Moore-Penrosen pseudoinverssille $\mathbf{C}^\dagger = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T$ mahdollisimman yksinkertainen esitys.

3. Olkoon

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriisin $\mathbf{B}$ sarakkeissa on lineaarista riippuvuutta. Kolmas sarake on kahden ensimmäisen sarakkeen summa.

Tee Octavella seuraavat komennot. Miten matriisissa oleva lineaarinen riippuvuus näkyy tuloksissa. (Älä yritä todistaa täsmälisesti, vaan tee näkemästäsi hypoteeseja. Voit testata hypoteesejasi Octavella.)

```
>> b1 = [-1 -1 1 1] '
>> b2 = [-1 2 -2 1] '
>> b3 = [-2 1 -1 2] '
>> b4 = [ 1 2 3 4] '
>> B = [b1 b2 b1+b2 b4] # third column is
# sum of first and second
>>
>> M = inv(B)           # inverse
>> d = det(B)           # determinant
>> [Q,R] = qr(B)        # QR-decomposition
>> [V,S] = eigs(B)       # eigen-system
>> [L,U] = lu(B)         # LU-decomposition
>> M = rref(B)           # reduced row echelon form
>> c = cond(B)           # condition number
>> [U,S,V] = svd(B)      # singular value decomposition
>> r = rank(B)           # Rank of the matrix
```

4. Mitkä seuraavista matriiseista ovat positiivisesti definiittisiä?

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ohje: ”Reaalinen symmetrinen matriisi $\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti, jos $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} > 0$ kaikilla $\vec{x} \neq \vec{0}$.”

Jos matriisi on symmetrinen ja reaalinen, niin se on positiivisesti definiitti vain jos sen kaikki ominaisarvot ovat positiivisia ($\lambda_k > 0, \forall k$).

Positiivisesti definiitin symmetrisen matriisin determinantti on positiivinen, jälki on positiivinen ja kaikki pääminorit (principal minors) ovat positiivisia.

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n > 0 \\ \text{Trace}(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n > 0 \\ D_k &= \text{Det}(\mathbf{A}_{1:k,1:k}) > 0 \end{aligned}$$

Parin matriisin kohdalla voit käyttää yllä olevia sääntöjä sulkemaan positiivisen definiittisyyden pois. Jos et näe ratkaisua muuten helposti, niin vähimmällä vaivalla pääset, kun käytät octaven `eigs`-funktiota. Funktio antaa ominaisarvot, joiden avulla definiittisyys ratkeaa.

5. Verrataan kahden yhtälöryhmän ratkaisujen herkkyyttä RHS-vektorin sisältämälle virheelle. Jos yhtälöryhmässä

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

yhtälöryhmän RHS-vektori sisältää virhettä niin, että laskussa käytetty vektori on oikean ja virheen summa, $\vec{b} = \vec{b}_0 + \Delta\vec{b}$, niin myös ratkaisu voidaan jakaa ”oikeaan” ja ”virheeseen”

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}(\vec{b}_0 + \Delta\vec{b}) = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\vec{b}_0}_{=\vec{x}_0} + \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b}}_{=\Delta\vec{x}}$$

Normaalisti ”oikeaa arvoa” ja ”virheen arvoa” ei tiedetä, mutta virheen suuruusluokkaa osataan arvioida.

a) Anna kahden alla olevan yhtälöryhmän tapauksessa yläraja absoluuttisen virheen kasvukertoimelle

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\Delta\vec{b}\|}.$$

Ohje: a-kohdan tarkastelun voit kokonaan perustaa yhtälöryhmien kerrkoinkaavioiden singulaariarvoille, jotka on annettu yhtälöryhmien yhteydessä. Yhtälöryhmän 1 tapauksessa ominaisarvot eivät anna täsmälleen oikeata arvoa, koska kerroinmatriisi ei ole symmetrinen. Yhtälöryhmän 2 tapauksessa ominaisarvot ja singulaariarvot antavat saman arvion.

b) Anna kahden alla olevan yhtälöryhmän tapauksessa yläraja suhteellisen virheen kasvukertoimelle

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|/\|\vec{x}\|}{\|\Delta\vec{b}\|/\|\vec{b}\|}.$$

Ohje: b-kohdassa tulee käyttää kerroinmatriisin kuntolukua, jonka saat octaven cond-funktiolla.

c) Tarkista vielä a- ja b- kohdassa saatujen ylärajojen pätevyys tapauksessa

$$\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \Delta\vec{b} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$

Tehtävän 5 yhtälöryhmät:

Yhtälöryhmä 1:

$$\begin{pmatrix} 1,204 & 1,388 & 1,388 & -1,980 \\ 0,404 & 2,788 & 0,788 & -1,980 \\ 0,004 & 0,988 & 2,988 & -1,980 \\ 0,008 & 1,976 & 1,976 & -1,960 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b}$$

Kerroinmatriisin singulaariarvot ovat $\sigma_1 = 6.4747$, $\sigma_2 = 2.0355$, $\sigma_3 = 1.0539$ ja $\sigma_4 = 0.0058$.

Yhtälöryhmä 2:

$$\begin{pmatrix} 1,750 & 1,750 & 1,250 & -0,750 \\ 1,750 & 1,750 & -0,750 & 1,250 \\ 1,250 & -0,750 & 1,750 & 1,750 \\ -0,750 & 1,250 & 1,750 & 1,750 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b}$$

Kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\sigma_1 = 4$, $\sigma_3 = 2$, $\sigma_3 = 2$ ja $\sigma_4 = 2$.