

Määritelmä (a). Neliömatriisi $\mathbf{Q}$ on *ortogonaalinen*, jos $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Määritelmästä voidaan antaa samaa tarkoittavat, mutta erilaiselta näyttävät muodot:

Määritelmä (b). $n \times n$ neliömatriisi $\mathbf{Q}$, jonka sarake-vektorit ovat $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$, on *ortogonaalinen*, jos

$$\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}$$

Määritelmä (c). Neliömatriisi $\mathbf{Q}$ on *ortogonaalinen*, jos sen sarakkeet muodostavat ortonormitetun vektorisysteemin. (Ts. sarakkeet ovat keskenään kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita.)

Kun peruskurssilla harjoitellaan matriisilaskuja matriisit ovat yleensä pieniä kokonaislukukaavioita. Ortogonaalin matriisin kaikki alkiot ovat ykköstä pienempiä. Tarkoilla arvoilla laskeminen on usein työlästä.

Esimerkki 1:

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.707107 & 0.000000 & -0.632456 & 0.316228 \\ 0.000000 & 0.707107 & 0.316228 & 0.632456 \\ 0.707107 & 0.000000 & 0.632456 & -0.316228 \\ 0.000000 & -0.707107 & 0.316228 & 0.632456 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Koneella laskettaessa desimaalien määrällä ei ole väliä. Muut asiat tulevat tärkeämmiksi.

Ortogonaaliset
matriisit

Ortogonaalisten
matriisien
ominaisuuksia

Ortogonaalisilla matriiseilla on hyviä ominaisuuksia.
Seuraavassa niistä joitakin:

Olkoon seuraavassa $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ reaalisia ortogonaalisia matriiseja. Silloin

(1) $\mathbf{Q}$ on lineaarisesti riippumaton, eli vapaa.

Perustelu: Aiemmin opimme, että matriisin $\mathbf{A}$ vapaus tutkitaan laskemalla joko $\text{Det}(\mathbf{A})$ tai $\text{Det}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$.

Determinantin $\text{Det}(\mathbf{Q})$ arvoa ei näe suoraan, mutta $\text{Det}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})$ on helppo laskea

$$\text{Det}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \text{Det}(\mathbf{I}) = 1 \neq 0,$$

joten $\mathbf{Q}$ on vapaa.

(2) **$\mathbf{Q}$:n determinantti on $+1$ tai -1 .**

Perustelu: Neliömatriiseille tiedämme, että

$\text{Det}(\mathbf{A}^T) = \text{Det}(\mathbf{A})$ ja $\text{Det}(\mathbf{AB}) = \text{Det}(\mathbf{A})\text{Det}(\mathbf{B})$. Silloin

$$1 = \text{Det}(\mathbf{I}) = \text{Det}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \text{Det}(\mathbf{Q}^T) \text{Det}(\mathbf{Q}) = (\text{Det}(\mathbf{Q}))^2$$

(3) **$\mathbf{Q}$:n käänteismatriisi on $\mathbf{Q}^T$.**

Perustelu: Edellisen perusteella $\mathbf{Q}$ on säännöllinen, joten käänteismatriisi $\mathbf{Q}^{-1}$ on olemassa. Nyt

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1}) = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}.$$

(4) $\mathbf{Q}^T$ on ortogonaalinen.

Perustelu: Edellisen perusteella $\mathbf{Q}^T$ on $\mathbf{Q}$:n käänteismatriisi. Silloin

$$(\mathbf{Q}^T)^T(\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Siis $\mathbf{Q}^T$ on ortogonaalinen. Silloin $\mathbf{Q}$:n rivit muodostavat ortonormitetun systeemin.

(5) Kahden ortogonaalisen matriisin tulo on ortogonaalinen.

Perustelu:

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^T(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2) = \mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}.$$

(6) A on lineaarisesti riippumaton, jos ja vain jos QA on lineaarisesti riippumaton.

Perustelu: HT.

(7) Jos matriisilla A on QR-hajoitelma $A = QR$, niin A on lineaarisesti riippumaton, jos ja vain jos R on lineaarisesti riippumaton.

Perustelu: HT.

(8) Rank(A) = Rank(QA)

Perustelu: Olkoon $m \times n$ matriisin **A** säännöllisyysaste

$\text{Rank}(\mathbf{A}) = r \leq n$. Silloin vaihtamalla sarakkeiden järjestystä matriisi **A** voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{AS} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{BC}),$$

missä **B** on vapaa (lineaarisesti riippumaton) $m \times r$ matriisi ja **C** on $r \times (n - r)$ matriisi. **B** on siis vapaa ja loput sarakkeet ovat lineaarikombinaatioita sen sarakkeista. Nyt

$$\mathbf{QAS} = (\mathbf{QB} \quad \mathbf{QBC}),$$

missä **QB** on vapaa ja loput sarakkeet ovat lineaarikombinaatioita sen sarakkeista. siis $\text{Rank}(\mathbf{QA}) = r$.

(9) Jos matriisilla $\mathbf{A}$ on QR-hajoitelma $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, niin $\text{Rank}(\mathbf{A}) = \text{Rank}(\mathbf{R})$.

Perustelu: Seuraa edellisestä.

(10) Jos $n \times n$ matriisilla $\mathbf{A}$ on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria (eli $\mathbf{A}$ ei ole defektiivinen), niin $\text{Rank}(\mathbf{A})$ on nollasta eroavien ominaisarvojen kertalukujen summa. *Perustelu:* Jokainen ominaisarvoon 0 liittyvä ominaisvektori kuuluu ytimeen, joten ytimen dimensio on ominaisarvon 0 kertaluku. Siis

$$\text{Rank}(\mathbf{A}) = n - \text{Dim}(\text{Ker}(\mathbf{A})) = \#\{\lambda_i \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

(11) **Kuvaus $\vec{x} \mapsto \mathbf{Q}\vec{x}$ säilyttää vektorin pituuden ja kahden vektorin välisen kulman.**

Perustelu:

Pistetulo säilyy:

$$(\mathbf{Q}\vec{a}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{b}) = (\mathbf{Q}\vec{a})^T (\mathbf{Q}\vec{b}) = \vec{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Pituus säilyy:

$$|\mathbf{Q}\vec{x}| = \sqrt{(\mathbf{Q}\vec{x}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{x})} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = |\vec{x}|$$

Kulma säilyy:

$$\cos(\angle(\mathbf{Q}\vec{a}, \mathbf{Q}\vec{b})) = \frac{(\mathbf{Q}\vec{a}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{b})}{|\mathbf{Q}\vec{a}| \cdot |\mathbf{Q}\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

Koordinaatiston akselit valitaan jos mahdollista niin, että koordinaattiakselien suuntavektorit (kantavektorit) ovat pareittain kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita. Sanomme silloin, että kanta on *ortonormeerattu*.

(12) Olkoon $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ ja $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ kaksi ortonormeerattua kantaa ja $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ vastaavat matriisit.

(a) Silloin $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ ovat ortogonaaliset.

(b) Jos $\mathbf{A}$ on kannan-vaihto -matriisi kantojen $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$ välillä, eli $\mathbf{U} = \mathbf{VA}$, niin $\mathbf{A}$ on ortogonaalinen.

Perustelu:

(a) seuraa suoraan määritelmästä.

(b)

$$\mathbf{U} = \mathbf{VA} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{V}^T \mathbf{U}$$

Matriisi $\mathbf{V}^T \mathbf{U}$ on ortogonaalinen kohtien (4) ja (5) perusteella.

Esimerkki 2: Etsi symmetrinen, reaallinen, positiivisesti definiitti ja ortogonaalinen matriisi $\mathbf{Q}$.

Koska $\mathbf{Q}$ on symmetrinen, sillä on reaaliset ominaisarvot $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Koska ortogonaalisen matriisin generoima kuvaus $\vec{x} \mapsto \mathbf{Q}\vec{x}$ säilyttää vektorin pituuden, ovat kaikki ominaisarvot itseisarvoltaan ykkösoä, $|\lambda_i| = 1, \forall i$.

Koska $\mathbf{Q}$ on positiivisesti definiitti, ovat kaikki ominaisarvot positiivisia, $\lambda_i = 1, \forall i$.

Jos löytyy ominaisvektorit $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$, jotka muodostavat ortonormitetun systeemin, niin $\mathbf{Q}$:lle on ominais-hajoitelma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}.$$