

2.5 Simplex-algoritmi

Simplex-algoritmin idea on lähteä liikkeelle LP-mallin käyvästä kantaratkaisusta. Normaalitapauksessa joka askeleella siirrytään uuteen parempaan kantaratkaisuun ja askelta toistetaan kunnes saavutaan optimiratkaisuun ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$). Algoritmin kuluessa LP-malli esitetään taulukkona tavalla, josta menossa oleva kantaratkaisu voidaan helposti lukea. Siirryttäessä yhdestä kantaratkaisusta toiseen muutetaan LP-mallin taulukkoesitystä tavalla, joka on meille entuudestaan tuttu yhtälöryhmien ratkaisemisesta (Gaussin menetelmä). Seuraavassa kerrataan Gaussin menetelmä.

2.5.1 Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Seuraavassa ratkaistaan yhtälöryhmä toistamalla kahta perusaskelta

1. Yhtälö voidaan kertoa tai jakaa nolasta eroavalla luvulla.
2. Yhtälöön voidaan lisätä luvulla kerrottu toinen yhtälö.

Tavoite, kun perusaskelia suoritetaan, on saada yhtälöryhmä muotoon, jossa jokaisella rivillä on vain yksi muuttuja jäljellä, ja toisaalta jokainen muuttuja löytyy yhdeltä riviltä. Kun tulkitsemme tavoitteen vasemman puolen kerroinkaavion (matriisin) avulla, niin tavoite on siis se, että jokaisessa kerroinkaavion sarakkeessa on tasan yksi ykkönen ja loput kertoimet ovat nollia, ja nämä ykköset ovat eri riveillä.

Tavoitetta kohden edetään muokkaamalla yhtä saraketta kerrallaan. Tavallisesti aloitamme vasemman puoleisesta sarakkeesta, mutta tämä ei ole pakollista (Voi edetä muussakin järjestyksessä.) Työstettävänä olevaa saraketta sanomme *pivot*-sarakkeeksi ja sitä riviä, jolle aiomme järjestää ykkösen sanomme *pivot*-riviksi. Pivot-rivin ja pivot-sarakkeen leikkauskohdassa on *pivot*-alkio. Pivot-alkio saadaan ykköseksi jakamalla pivot-rivi pivot-alkiolla. Loput pivot-sarakkeen alkioit saadaan nolliksi helposti. (Ks. alla oleva esimerkki.)

Esimerkki 2.5.1

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cccc|l} [x_1] & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -1 & | & \textit{pivot} \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 15 & | & -\textit{pivot} \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 & | & +\textit{pivot} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{cccc|l} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -1 & | & \\ & + & [2x_2] & + & 4x_3 & = & 16 & | & /2 \\ & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -3 & | & \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -1 & | & -2 \cdot pivot \\ & & [x_2] & + & 2x_3 & = & 8 & | & pivot \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -3 & | & -3 \cdot pivot \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & & & - & 6x_3 & = & -9 & | & \\ & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 & & | & \\ & & & - & [9x_3] & = & -27 & | & /(-9) \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & & & - & 6x_3 & = & -17 & | & +6 \cdot pivot \\ & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 & & | & -2 \cdot pivot \\ & & & [x_3] & = & 3 & & | & pivot \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & & = & 2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Edellisen laskun läpiviennissä on noudatettu muutamaa periaatetta. (1) Ei ole tehty liian montaa asiaa yhdellä kerralla. (2) Ensin on tehty pivot-alkio ykköseksi ja tässä vaiheessa ei ole muutettu muita rivejä. Toisessa vaiheessa on pivot-sarakkeen muut alkion saatu nolliksi lisäämää riviin sopivalla luvulla kerrottu pivot-rivi ja tässä operaatioissa ei pivot-riviä muuteta.

Huomautus: Kun lasketaan kynällä ja paperilla, on usein syytä hieman poiketa edellisestä. On mahdollista muuttaa pivot-alkiot ykkösiksi vasta aivan lopussa. Usein on mahdollista lykätä murtolukukertoimien ilmaantumista suosimalla rivien yhteenlaskua kertomisen sijasta. (Menettelyä on turha tiivistää algoritmiksi. Luento-esimerkki riittää.)

Seuraavassa esimerkissä lähestymme tietokoneen esitystä esittämällä yhälöryhmä kerroinkaaviona. Huomaa, että kerroinmatriisitaulukkomme sisältää kaiken tarvittavan tiedon. Myös rivioperaatiot on nyt toteutettu tietokonemaisen mekaanisesti seuraavasti. Samassa askeleessa ensin kerrotaan tai jaetaan pivot-rivi luvulla niin, että pivot-alkio tulee ykköseksi, sitten muihin riveihin lisätään sopivalla luvulla kerrottuna edellä saatu muuttunut pivot-rivi. Kaavion oikealle puolelle on tehty lisämerkinnät, joiden avulla on jälkeenpäin mahdollista tulkita tehtyjä ratkaisuja.

Esimerkki 2.5.2 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

	x1	x2	x3		RHS	
	[2]	-1	1		3	pivot*(1/2)
	-1	1	-1		-2	+1*pivot
	1	2	-1		2	-1*pivot
	1	-1/2	1/2		3/2	+(1/2)*pivot
	0	[1/2]	-1/2		-1/2	pivot*2
	0	5/2	-3/2		1/2	-(5/2)*pivot
	1	0	0		1	
	0	1	-1		-1	+1*pivot
	0	0	[1]		3	pivot
	1	0	0		1	
	0	1	0		2	
	0	0	1		3	

Askelta, jossa kokonainen sarake saadaan haluttuun muotoon kutsutaan *pivotoinniksi*. Pivotoinnissa saattaa tulla ongelmia, jos kaikki mahdolliset jäljellä olevat pivot-alkiot ovat nollia. Tällöin yhtälöryhmällä joko ei ole ratkaisua tai niitä on ääretön määrä.

Pienen tutkimisen jälkeen huomaa, että edellisen esimerkin jokainen vaihe on erinomaisen mekaaninen. Sen jälkeen, kun pivot-alkio on valittu, ovat tarpeelliset rivioperaatiot helppoja. Koska käytännön ongelmat yleensä johtavat desimaalilukuihin ja tarvittavia laskutoimituksia ei enää kannata laskea päässä, käytetään seuraavassa taulukkolaskinta, jolloin vastaavan laskutoimituksen ”kirjanpito” näyttää seuraavalta.

Esimerkki 2.5.3 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 17x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 33 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 102 \\ -8x_1 + 12x_2 + 56x_3 = 21 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä on ratkaistu EXCEL-ohjelmalla. Pivot-rivi ja sarake on merkitty #-merkillä. Rivioperaatioiden kertoimia ei ole merkitty, sillä ne nähdään joka tapauksessa suoraan pivot-sarakkeelta.

	#				
	17	-6	2	33	#
	5	4	-1	102	
	-8	12	56	21	
		#			
	1	-0.3529	0.11765	1.94118	
	0	5.76471	-1.5882	92.2941	#
	0	9.17647	56.9412	36.5294	
			#		
	1	0	0.02041	7.59184	
	0	1	-0.2755	16.0102	
	0	0	59.4694	-110.39	#
	1	0	0	7.62972	
	0	1	0	15.4988	
	0	0	1	-1.8562	

2.5.2 Yhtälöryhmän kantaratkaisu

Tarkastellaan yhtälöryhmää, jossa on

$$\begin{array}{l} n \text{ muuttujaa ja} \\ m \text{ yhtälöä} \end{array}$$

Tapaus $n = m$ Yhtälöryhmä ratkaistaan alkeisrivioperaatioiden avulla. Jos jokin rivioperaatio johtaa riviin, jonka vasen puoli kuihtuu nolaksi ja rivin $RHS \neq 0$, niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Jos jokin rivioperaatio johtaa yhtälöön $0 = 0$, voidaan tämä yhtälö poistaa ryhmästä ja joudutaan tilanteeseen $n > m$. Jos alkeisrivioperaatiot eivät johda edellämainittuihin erikoistapauksiin on yhtälöryhmällä yksikäsitteinen ratkaisu.

Tapaus $n > m$ Yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja. Erikoisessa asemassa ovat ns. kantaratkaisut, jotka saadaan seuraavasti.

Valitaan muuttujien joukosta m kappaletta kantamuuttujia (**BV**, *Basic Variables*, joskus myös *Basis Variables*). Kantaan kuulumattomat muuttujat (**NBV**, *Non Basic Variables*) asetetaan nolliksi. Nyt yhtälöryhmän **NBV**-muuttujia sisältävät termit saavat arvon nolla, joten yhtälöryhmässä on m yhtälöä ja m vapaata muuttujaa. Saatu yhtälöryhmä voidaan ratkaista ja sen yksikäsitteistä ratkaisua sanotaan valittuun kantaan liittyväksi *kantaratkaisuksi*. Lp-analyysin yhteydessä sanotaan, että kantaratkaisu

on käypä kantaratkaisu (**BFS**, *Basic Feasible Solution*), jos kantamuuttujat saavat ei-negatiiviset arvot.

Koska kanta on m -alkioinen kombinaatio n :n muuttujan perusjoukosta, voidaan kanta valita

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

tavalla.

Esimerkki 2.5.4 Listataan seuraavan yhtälöryhmän kantaratkaisut

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Valinnat	Yhtälöryhmä	Kantaratkaisu
$BV = \{x_2, x_3\}$ $NBV = \{x_1\}$	$0 + x_2 = 3$ $-x_2 + x_3 = -1$	$x_1 = 0$ $x_2 = 3$ $x_3 = 2$ BFS
$BV = \{x_1, x_3\}$ $NBV = \{x_2\}$	$x_1 + 0 = 3$ $-0 + x_3 = -1$	$x_1 = 3$ $x_2 = 0$ $x_3 = -1$ ei käypä
$BV = \{x_1, x_2\}$ $NBV = \{x_3\}$	$x_1 + x_2 = 3$ $-x_2 + 0 = -1$	$x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ BFS

2.5.3 LP-mallin standardimuoto

Lp-mallin käsittely on helpompaa, jos rajoitteet ovat yhtälömuotoisia. Tätä varten malli saatetaan nk. *standardimuotoon*, jossa

- kaikki rajoitteet ovat yhtälöitä
- jokaisen yhtälön RHS on ei-negatiivinen

Epäyhtälön muotoinen rajoite saadaan yhtälön muotoon lisäämällä malliin keinotekoinen *pelivaramuuttuja*.

Esimerkki: rajoitteet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 500 \\ x_1 + x_2 &\geq 100 \end{aligned}$$

muutetaan muotoon

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 500 \\ x_1 + x_2 - e_2 &= 100 \end{aligned}$$

missä s_1 (*slack variable*) kuvaa miten paljon resurssia jäi käyttämättä ja e_2 (*excess variable*) kuvaa miten paljon vähimmäismäärä ylitettiin.

Huomaa: (1) Pelivaramuuttujatkin saavat vain ei-negatiivisia arvoja. (2) Pelivaramuuttujien indeksi kertoo mihin resurssiin pelivara liittyy!

Esimerkki 2.5.5 Leather Limited valmistaa kahdenlaisia nahkavöitä: deluxe-mallia ja regular-mallia. Molempiin vöihin kuluu 1 metri nahkaremmiä per kappale. Regular-mallisen vyön valmistaminen kestää yhden tunnin, kun taas deluxe vaatii kaksi tuntia. Väiden valmistamiseen on viikossa käytettävissä 40 metriä nahkaremmiä ja 60 työtuntia. Jokaisesta regular-vyöstä saadaan voittoa 3 € ja deluxe-vyöstä 4 €. Maksimoi voitto.

Ratkaisu: Olkoon

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{valmistetut delux-vyöt} / \text{vko} \\ x_2 &= \text{valmistetut regular-vyöt} / \text{vko} \end{aligned}$$

Lp-malli on

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & x_1 + x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Mallin graafiseen ratkaisemiseen liittyvät rajoitesuorat ja käypä alue on piirretty kuvan 2.8. Täydennämme mallin pelivaramuuttujilla standardimuotoon.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\ & x_k, s_k \geq 0 \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{käyttämättä jäänyt nahkamateriaali (metriä remmiä} / \text{vko)} \\ s_2 &= \text{käyttämättä jäänyt työresurssi (työtuntia} / \text{vko)} \end{aligned}$$

Rajoiteyhtälöitä on nyt kaksi ($m = 2$) ja muuttujia on neljä ($n = 4$). Ratkaisemme seuraavaksi kaikki

$$\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

kantaratkaisua. Taulukkoon on tällä kertaa lisätty käypien kantaratkaisujen kohdalle tavoitefunktion arvo sekä kirjain, joka viittaa kuvan 2.8 pisteisiin.

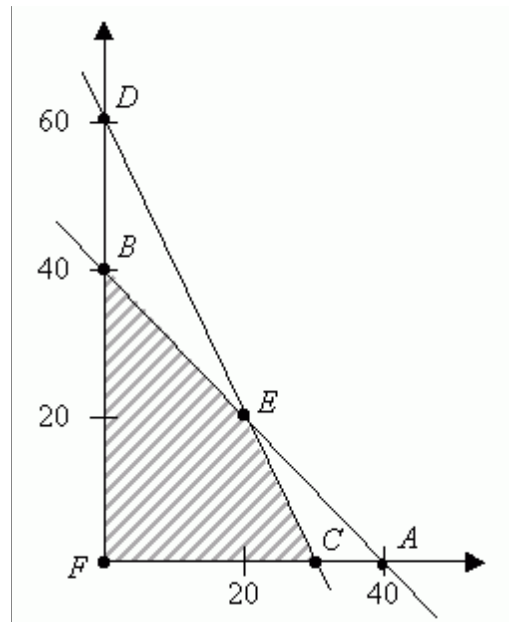


Figure 2.8: Esimerkin 2.5.5 kantaratkaisut.

Kanta	Yhtälöryhmä	x_1	x_2	s_1	s_2		z	piste
$\{s_1, s_2\}$	$0 + 0 + s_1 = 40$ $0 + 0 + s_2 = 60$	0	0	40	60	BFS	0	F
$\{x_2, s_2\}$	$0 + x_2 + 0 = 40$ $0 + x_2 + s_2 = 60$	0	40	0	20	BFS	120	B
$\{x_2, s_1\}$	$0 + x_2 + s_1 = 40$ $0 + x_2 + 0 = 60$	0	60	-20	0	-	-	D
$\{x_1, s_2\}$	$x_1 + 0 + 0 = 40$ $2x_1 + 0 + s_2 = 60$	40	0	0	-20	-	-	A
$\{x_1, s_1\}$	$x_1 + 0 + s_1 = 40$ $2x_1 + 0 + 0 = 60$	30	0	10	0	BFS	120	C
$\{x_1, x_2\}$	$x_1 + x_2 + 0 = 40$ $2x_1 + x_2 + 0 = 60$	20	20	0	0	BFS	140	E

2.5.4 SIMPLEX-algoritmi

Kun vertaamme edellisen esimerkin kantaratkaisujen antamia arvoja muuttujille x_1 ja x_2 graafisen ratkaisun käyvän alueen nurkkapisteisiin, havaitsemme niiden vastaavan toisiaan. Kun muuttujien määrä kasvaa suureksi voidaan kanta valita hyvin monella tavalla, jolloin kaikkien kantaratkaisujen tutkiminen käy työlääksi.

Georg Dantzig kehitti 1940-luvun lopulla LP-mallin ratkaisualgoritmin, joka tun-

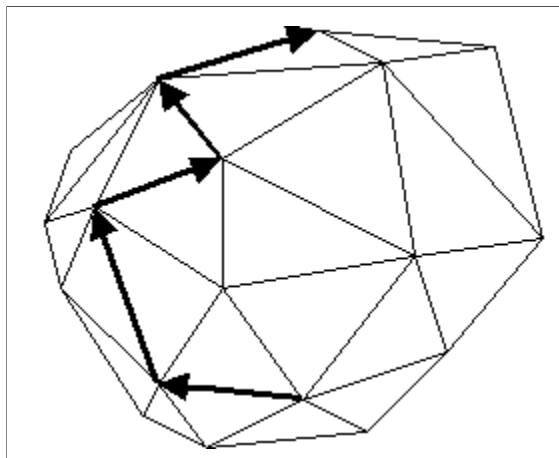


Figure 2.9: Käypä alue, kun muuttujia on paljon.

netaan SIMPLEX-menetelmän nimellä.

SIMPLEX-menetelmä on tehokas, koska se ei tutki kaikkia kantaratkaisuja. Simplex algoritmin periaate voidaan lyhyesti kuvata seuraavasti

1. Valitaan jokin BFS (käypä kantaratkaisu)
2. Selvitetään, onko kyseinen BFS optimiratkaisu
3. Jos se ei ole optimiratkaisu, niin siirrytään sellaiseen viereiseen BFS:ään, johon siirtyminen parantaa eniten tavoitefunktion arvoa. Palataan kohtaan 2.

Siirtyminen viereiseen käypään kantaratkaisuun tapahtuu tuomalla uusi muuttuja kantaan ja poistamalla yksi vanha kantamuuttuja pois kannasta.

Seuraavassa esittelemme simplex-algoritmin yksinkertaisen esimerkin avulla. Esimerkissämme ensimmäinen ns. kanoonisessa muodossa oleva taulu löytyy helposti. Tämä ei aina ole yhtä helppoa ja myöhemmin pohdimme asiaa uudelleen.

Esimerkki 2.5.6 Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rcll}
 \max z = & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 \\
 \text{ehdoin} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 8 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 5 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
 \end{array}$$

1) Muutetaan malli standardimuotoon siten, että tavoitefunktion määrittelevä yhtälö on mukana:

$$\begin{array}{rclclclclclcl}
 z & - & 60x_1 & - & 30x_2 & - & 20x_3 & & & & = & 0 \\
 & & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & = & 48 \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & & + & s_2 & = & 20 \\
 & & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & & & + & s_3 & = & 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & + & s_4 & = & 5
 \end{array}$$

Yhtälöryhmän jokaisessa yhtälössä on muuttuja, jonka kerroin on 1 ja joka ei esiinny muissa yhtälöissä (z, s_1, s_2, s_3, s_4). Tällaista muotoa sanotaan *kanooniseksi*. Valitaan mainitut muuttujat kantamuuttujiksi ja laaditaan seuraava taulu.

rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS
0	1	-60	-30	-20	0	0	0	0	z =	0
1	0	8	6	1	1	0	0	0	s1=	48
2	0	4	2	1,5	0	1	0	0	s2=	20
3	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	s3=	8
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5

Taulun kahdesta oikeanpuoleisimmasta sarakkeesta voidaan välittömästi lukea kantaan $\mathbf{BV} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ liittyvä kantaratkaisu. Ensimmäinen taulu kuvaa siis käypää kantaratkaisua. Tällainen tulo löytyi nyt koska LP-mallin rajoitteet ovat tyyppiä " $\leq$ " ja RHS on ei-negatiivinen.

2) Onko esitetty käypä ratkaisu optimiratkaisu?

Ratkaisu ei ole optimiratkaisu, sillä 0-rivillä on $\mathbf{NBV}$ -muuttujan x_1 kerroin negatiivinen. Tämä päättely saa perustelunsa kohdassa 4)

3) Valitaan kantaan tuotava muuttuja:

Valitaan kantaan tuotavaksi muuttujaksi x_1 , koska sen kerroin 0-rivillä on pienin.

4) Valitaan kannasta poistuva muuttuja:

Poikkeuksellisesti näemme nyt hieman ylimääräistä vaivaa ja kirjoitamme uudelleen taulun mukaiset yhtälöt. jätämme kuitenkin kirjoittamatta ne termit, jotka tiedämme nolliksi (kerroin on nolla tai muuttujan arvo on nolla).

$$\begin{array}{rcl}
 z & -60x_1 & = 0 \\
 8x_1 & + s_1 & = 48 \\
 4x_1 & + s_2 & = 20 \\
 2x_1 & + s_3 & = 8 \\
 0x_1 & + s_4 & = 5
 \end{array}$$

Yhtälöistä näemme heti, että muuttujan x_1 arvoa voi ja kannattaa kasvattaa. Jos arvoa kasvattaa liikaa, menee jonkin vanhan kantamuuttujan arvo negatiiviseksi, mitä emme voi sallia. Jokainen riveistä 1-4 antaa oman ehtonsa x_1 :n kasvuvuvaralle.

yhtälö	kasvuvuara
$8x_1 + s_1 = 48$	$48/8 = 6$
$4x_1 + s_2 = 20$	$20/4 = 5$
$2x_1 + s_3 = 8$	$8/2 = 4 \leftarrow ***$
$0x_1 + s_4 = 5$	$5/0 = \text{ääretön}$

Siis muuttujan x_1 arvoa voidaan kasvattaa arvoon $x_1 = 4$, jolloin s_3 saa arvon $s_3 = 0$. Tämä merkitsee, että

x_1 tulee kantaan ja s_3 poistuu kannasta.

5) Vaihdetaan kanta:

Tehdään uusi kanooninen taulu, jossa kantana on $\mathbf{BV} = \{s_1, s_2, x_1, s_4\}$. Tähän päästään, kun alkeisrivioperaatioilla järjestetään x_1 -sarakkeen riville 3 kertoimeksi ykkönen ja saman sarakkeen muille riveille kertoimiksi nollat. Uusi SIMPLEX-taulu on

rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS
0	1	0	15	-5	0	0	30	0	z =	240
1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	s1=	16
2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	s2=	4
3	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	x1=	4
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5

2) Onko optimiratkaisu? Ei ole optimi, sillä x_3 :n kerroin 0-rivillä on -5 .

3) Tuodaan x_3 kantaan. Sillä on 0-rivillä itseisarvoltaan suurin negatiivinen kerroin.

4) Valitaan kannasta poistuva muuttuja. Lasketaan riveille 1-4 suhde $\text{RHS}/(x_3\text{:n kerroin})$. Kun suhteet merkitään taulukon oikeaan reunaan, näyttää taulukko seuraavalta

*										
rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS
0	1	0	15	-5	0	0	30	0	z =	240
1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	s1=	16
2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	s2=	4
3	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	x1=	4
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5

$16/(-1) = --$
 $4/0,5 = 8 *$
 $4/0,25 = 16$
 $5/0 = --$

Jos suhde on ääretön tai negatiivinen, ei kyseinen yhtälö (rivi) aseta mitään rajaa kantaan tuotavan muuttujan arvolle. Tarkastellaan esimerkkinä 1. riviä. Kun unohdamme 0-termit saamme rivin yhtälöksi

$$-x_3 + s_1 = 16$$

Jos x_3 nyt kasvaa, niin myös s_1 kasvaa, eikä x_3 :n kasvulle tule mitään rajoittavaa ehtoa. Pienin positiivinen suhde on 8 rivillä 2, joten kannasta poistuu muuttuja s_2 .

5) Vaihdetaan kanta. Pivot-sarake on x_3 :n sarake ja pivot-rivi on rivi 2. Rivioperaatioiden jälkeen taulu menee muotoon:

rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS	
0	1	0	5	0	0	10	10	0	z =	280	← OPTIMI
1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	s1=	24	
2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	x3=	8	
3	0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	x1=	2	
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5	

2) Ratkaisu on optimiratkaisu, sillä 0-rivillä ei ole negatiivista kerrointa **NBV**-muuttujalla.

Optimiratkaisu on siis $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ ja tavoitefunktion optimiarvo $z = 280$. Slack muuttujien arvot $s_1 = 24$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 5$ kertovat, että rajoitteisiin 1 ja 4 liittyviä resursseja ei optimiratkaisussa käytetä loppuun mutta rajoitteisiin 2 ja 3 liittyvät resurssit kulutetaan kokonaan.

Esimerkki 2.5.7 Ratkaistaan Giapetton puuleluesimerkki (kappaleesta NN) käyttäen SIMPLEX-algoritmia.

Ratkaisu: LP-malli on

$$\begin{array}{llll}
 \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 \text{ehdoin} & 2x_1 & + & x_2 \leq 100 & \text{viimeistelytyö (h/vko)} \\
 & x_1 & + & x_2 \leq 80 & \text{puutyö (h/vko)} \\
 & x_1 & & \leq 40 & \text{max.kysyntä (kpl/vko)} \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Slack-muuttujien avulla standardimuotoon saatettu malli on

$$\begin{array}{llllll}
 \max z & & & & & \\
 \text{ehdoin} & z & - & 3x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\
 & & & 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = & 100 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & & + & s_2 & = & 80 \\
 & & & x_1 & & & & + & s_3 & = & 40 \\
 & & & & & & & & x_i, s_i & \geq & 0
 \end{array}$$

Koska $RHS > 0$ ja jokainen rajoite sai slack-muuttujan, saamme kanoonisessa muodossa olevan 1. simplex taulun vaivatta.

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-3	-2	0	0	0	z =	0
1	0	2	1	1	0	0	s1=	100
2	0	1	1	0	1	0	s2=	80
3	0	1	0	0	0	1	s3=	40

#

$100/2 = 50$
 $80/1 = 80$
 $40/1 = 40$

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	-2	0	0	3	z =	120
1	0	0	1	1	0	-2	s1=	20
2	0	0	1	0	1	-1	s2=	40
3	0	1	0	0	0	1	x1=	40

#

$20/1 = 20$
 $40/1 = 40$
 $40/0 = --$

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	2	0	-1	z =	160
1	0	0	1	1	0	-2	x2=	20
2	0	0	0	-1	1	1	s2=	20
3	0	1	0	0	0	1	x1=	40

#

$20/(-2) = --$
 $20/1 = 20$
 $40/1 = 40$

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1	1	0	z =	180
1	0	0	1	-1	2	0	x2=	60
2	0	0	0	-1	1	1	s3=	20
3	0	1	0	1	-1	0	x1=	20

←

OPTIMI

Ratkaisuksi saamme, että puusotilaita valmistetaan 20 kappaletta viikossa ($x_1 = 20$) ja puujunia valmistetaan 60 kappaletta viikossa ($x_2 = 60$). Puutyöresurssi ja viimeistelytyöresurssi käytetään kokonaan ($s_1 = 0$, $s_2 = 0$). Markkinarajoite ei ole aktiivinen ($s_3 = 20$).