

2.6 Simplex-algoritmin erikoistapauksia

2.6.1 Minimointitehtävä

Edellä kuvatussa maksimointialgoritmista on helppo muuntaa minimointialgoritmi. Minimointialgoritmi on niin lähellä maksimointialgoritmia, että tekniikat helposti sekaantuvat. Jos ei päivittäin sovelle näitä tekniikoita, niin onkin viisainta ajatella seuraavasti:

Jos haluan minimoida tavoitefunktiota z , niin maksimoinkin tavoitefunktiota $-z$.

Esimerkki 2.6.1 Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rcll} \min z & = & -4x_1 & + x_2 \\ \text{ehdoin} & & 2x_1 & + x_2 \leq 8 \\ & & & x_2 \leq 5 \\ & & x_1 & - x_2 \leq 4 \\ & & & x_i \geq 0 \end{array}$$

Muutetaan malli maksimointimalliksi ja lisätään pelivaramuuttujat.

$$\begin{array}{rcll} \max -z & = & + 4x_1 & - x_2 \\ \text{ehdoin} & & 2x_1 & + x_2 + s_1 = 8 \\ & & x_2 & + s_2 = 5 \\ & & x_1 & - x_2 + s_3 = 4 \\ & & & x_i, s_i \geq 0 \end{array}$$

Koska $RHS > 0$ ja jokainen rajoiteyhtälö sisältää slack muuttujan, saamme kanoonisessa muodossa olevan 1. simplex taulun suoraan.

#								
rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-4	1	0	0	0	z =	0
1	0	2	1	1	0	0	s1=	8
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5
3	0	1	-1	0	0	1	s3=	4

$8/2 = 4$

$5/0 = -$

$4/1 = 4$

Suhdetesti antaa sekä s_1 :lle että s_3 :lle arvon 4, joten kumpikin on yhtä suurella syyllä kannasta poistuva muuttuja. Valitsemme kannasta poistuvaksi muuttujaksi s_1 :n, emmekä pohdi valintaa enempää. Niin kauan kun tavoitefunktion arvo kasvaa joka askeleella, olemme etenemässä kohden optimia.

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS	
0	1	0	3	2	0	0	z =	16	<-- OPTIMI
1	0	1	0,5	0,5	0	0	x1=	4	
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5	
3	0	0	-1,5	-0,5	0	1	s3=	0	

Siis optimiratkaisu on $x_1 = 4$, ja $x_2 = 0$. Toista resurssia jää viisi yksikköä käyttämättä, mutta ensimmäinen ja kolmas resurssi kulutetaan kokonaan. Kokeilemme vielä miten algoritmi etenee, jos edellä tehty poistuvan muuttujan valinta tehdäänkin toisin.

#									
rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS	
0	1	-4	1	0	0	0	-z=	0	
1	0	2	1	1	0	0	s1=	8	8/2 = 4
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5	5/0 = -
3	0	1	-1	0	0	1	s3=	4	# 4/1 = 4

#									
rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS	
0	1	0	-3	0	0	4	z =	16	
1	0	0	3	1	0	-2	s1=	0	# 0/3 = 0
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5	5/1 = 5
3	0	1	-1	0	0	1	x1=	4	4/(-1) = -

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS	
0	1	0	0	1	0	2	z =	16	<-- OPTIMI
1	0	0	1	0,3333	0	-0,666	x2=	0	
2	0	0	0	-0,333	1	0,6666	s2=	5	
3	0	1	0	0,3333	0	0,3333	x1=	4	

Vaikka ensimmäisen optimitaulun kanta $\mathbf{BV} = \{x_1, s_2, s_3\}$ eroaa toisen optimitaulun kannasta $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_2\}$, niin kumpikin optimitaulu antaa täsmälleen saman $\mathbb{R}^5$:n käyvän pisteen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Useita optimeja

Tutkiaksemme, miten simplex-algoritmi toimii usean optimiratkaisun tilanteessa, ratkaisemme esimerkin ?? uudelleen.

LP-mallin

$$\begin{array}{ll} \min & z = -6x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

standardimuoto on

$$\begin{array}{llllll} \max & -z & & & & \\ \text{ehdoin} & -z - 6x_1 - 2x_2 & & & & = 0 \\ & 2x_1 + 4x_2 + s_1 & & & & = 9 \\ & 3x_1 + x_2 & & + s_2 & & = 6 \\ & & & & x_i, s_i & \geq 0 \end{array}$$

Simplex-ratkaisun mukaiset taulut ovat

#							
rivi	-z	x1	x2	s1	s2	BV	RHS
0	1	-6	-2	0	0	-z	0
1	0	2	4	1	0	s1=	9
2	0	3	1	0	1	s2=	6

$9/2 = 4.5$
$6/3 = 2$

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	BV	RHS
0	1	0	0	0	2	-z	12
1	0	0	3,3333	1	-0,666	s1=	5
2	0	1	0,3333	0	0,3333	x1=	2

<-- OPTIMI

Saimme siis optimiratkaisun. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa optimiratkaisu, sillä kantaan kuulumattoman muuttujan x_2 kerroin toisen taulun 0-rivillä on 0. Tämä merkitsee sitä, että x_2 :n tuominen kantaan ei paranne mutta ei huononakaan tavoitefunktion arvoa. Saamme siis toisen optimiratkaisun, kun tuomme x_2 :n kantaan.

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	BV	RHS
0	1	0	0	0	2	-z	12
1	0	0	1	0,3	-0,2	x2=	1,5
2	0	1	0	-0,1	0,4	x1=	1,5

<-- OPTIMI

Ainoa kantaan kuulumaton muuttuja, joka nyt voidaan tuoda kantaan on s_1 , ja sen tuominen kantaan johtaa ensin saatuun optimiin. Optimaalisia kantaratkaisuja on siis

kaksi. Näitä kahta käyvän alueen optimaalista nurkkapistettä

$$\mathbf{x}^P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}^Q = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

yhdistävän janan kaikki pisteet ovat myös optimaalisia. Optimiratkaisuvektorit muodostavat siis joukon

$$(2.1) \quad \begin{aligned} [P, Q] &= \{ \lambda \mathbf{x}^P + (1 - \lambda) \mathbf{x}^Q \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda + 1.5(1 - \lambda) \\ 0 + 1.5(1 - \lambda) \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

$$(2.3) \quad = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 + 0.5\lambda \\ 1.5 - 1.5\lambda \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

$$(2.3) \quad = \{ \mathbf{x} \mid x_2 = 6 - 3x_1, 1.5 \leq x_1 \leq 2 \}$$

Kumpikin esityksistä (2.1) ja (2.3) ovat hyviä, ja valinta niiden väliltä on makuasia.

Esitys (2.3) saadaan seuraavasti

Suoran yhtälö: Eliminoidaan yhteenlaskukeinolla λ yhtälöparista

$$\begin{array}{rcl} 1.5 & + & 0.5\lambda = x_1 \quad | \cdot 3 \\ 1.5 & - & 1.5\lambda = x_2 \quad | \quad \Leftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 4.5 & + & 1.5\lambda = 3x_1 \\ + & 1.5 & - 1.5\lambda = x_2 \\ \hline 6 & & = 3x_1 + x_2 \end{array}$$

Rajat x_1 :lle:

$$\begin{aligned} 1.5 & + 0.5\lambda = x_1 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 3 & + \lambda = 2x_1 \\ \Leftrightarrow \lambda & = 2x_1 - 3 & \Rightarrow \end{aligned} \quad \begin{aligned} 0 & \leq 2x_1 - 3 \leq 1 \\ \Leftrightarrow 3 & \leq 2x_1 \leq 4 \\ \Leftrightarrow 1.5 & \leq x_1 \leq 2 \end{aligned}$$

Jos optimaalisia kantaratkaisuja on useampia kuin kaksi, niin optimaaliset ratkaisut saadaan (lähes poikkeuksetta) painotettuna keskiarvona optimaalisista kantaratkaisuisista siten, että painojen summa on 1 ja kaikki painot ovat väliltä $[0, 1]$.

Optimiratkaisujen joukon täsmällinen ilmaiseminen on hankalaa ilman vektoreita tai monen muuttujan yhtälöitä. Asiaa ei kuitenkaan sovi sivuuttaa. Jos ongelmaan on monta ratkaisua, pitää analyytikon tietenkin kertoa se päättäjille. Päättäjien kyvystä ymmärtää matemaattista muotoilua riippuu miten asia voidaan esittää.

Eräs tapa hahmottaa asiaa on seuraava:

- Katso mitkä muuttujat eivät kuulu minkään optimaalisen kantaratkaisun kantaan. Missä tahansa optimiratkaisussa tällaisen muuttujan tulee saada arvo 0.
- Jos kyseinen muuttuja on x_j , sanomme päättäjille, että ”tuotetta j ei tule valmistaa” (tms.)
- Jos kyseinen muuttuja on s_j , sanomme päättäjille, että ” j :s resurssi tulee kuluttaa kokonaan” (tms.)

Edellä olevia lainausmerkein varustettuja ilmaisuja ei tule ottaa liian kaavamaisesti. Ne ovat esimerkkejä ilmaisuista, jotka päättäjä yleensä ymmärtää.

Lasketaan vielä lpi esimerkki, jossa viiden muuttujan LP-mallilla on kolme optimaalista kantaratkaisua.

Esimerkki 2.6.2 Olemme maksimoimassa lineaarista funktiota $f(x_1, x_2, x_3)$. Olkoon standardimuotoisen mallin muuttujat x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 ja optimaaliset kantaratkaisut

$$\mathbf{x}^A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}^C = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Miten tulos raportoidaan esimiehelle?

Ratkaisu $\mathbf{x}$ on optimaalinen, jos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_1 & & & & = 3 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 & + x_2 & & & = 6 \\ -7\lambda_1 - 8\lambda_2 & & + x_3 & & = 0 \\ & & & + s_1 & = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 & & & + s_2 & = 4 \end{cases}$$

”ratkaistaan pivotoimalla” λ :t, x_3 ja s ;t

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \# & & \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_1 & & = 3 \quad \# \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 & + x_2 & = 6 \\ -7\lambda_1 - 8\lambda_2 & & + x_3 = 0 \\ & & + s_1 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 & & + s_2 = 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \# & & \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_1 & & = 3 \\ & + 4\lambda_2 - x_1 + x_2 & = 3 \quad \# \\ & + 6\lambda_2 + 7x_1 & + x_3 = 21 \\ & & + s_1 = 0 \\ -4\lambda_2 - 4x_1 & & + s_2 = -8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & + 1.5x_1 - 0.5x_2 & = 1.5 \\ & \lambda_2 - 0.25x_1 + 0.25x_2 & = 0.75 \\ & + 8.5x_1 - 1.5x_2 + x_3 & = 16.5 \\ & & + s_1 = 0 \\ & - 5x_1 + x_2 & + s_2 = -5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1.5x_1 + 0.5x_2 + 1.5 \\ \lambda_2 = 0.25x_1 - 0.25x_2 + 0.75 \\ x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 5x_1 - x_2 - 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq -1.5x_1 + 0.5x_2 + 1.5 \leq 1 \\ 0 \leq 0.25x_1 - 0.25x_2 + 0.75 \leq 1 \\ x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 5x_1 - x_2 - 5 \end{array} \right.$$

Siis $s_1 = 0$ joten ensimmäinen resurssi käytetään kokonaan. Päättösmuuttujia x_1 ja x_2 sitoo seuraavat ehdot (huomaa ehdot $x_3 \geq 0$ ja $s_2 \geq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1.5x_1 - 0.5x_2 & \leq & 1.5 \\ -1.5x_1 + 0.5x_2 & \leq & 0.5 \\ -0.25x_1 + 0.25x_2 & \leq & 0.75 \\ 0.25x_1 - 0.25x_2 & \leq & 0.25 \\ 8.5x_1 - 1.5x_2 & \leq & 16.5 \\ 5x_1 - x_2 & \geq & 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ 17x_1 - 3x_2 & \leq & 33 \\ 5x_1 - x_2 & \geq & 5 \end{array} \right.$$

Tutkimalla graafisesti epäyhtälöryhman ratkaisuja nähdään, että kaikki epäyhtälöt toteutuvat, jos 1. 3. ja 6. epäyhtälö ovat tosia ja että käyvät $(x_1, x_2)^\top$ -pisteet muodostavat monikulmion, jonka kärkinä ovat pisteet $(1, 0)^\top$, $(2, 5)^\top$ ja $(3, 6)^\top$. Kärkipisteissä

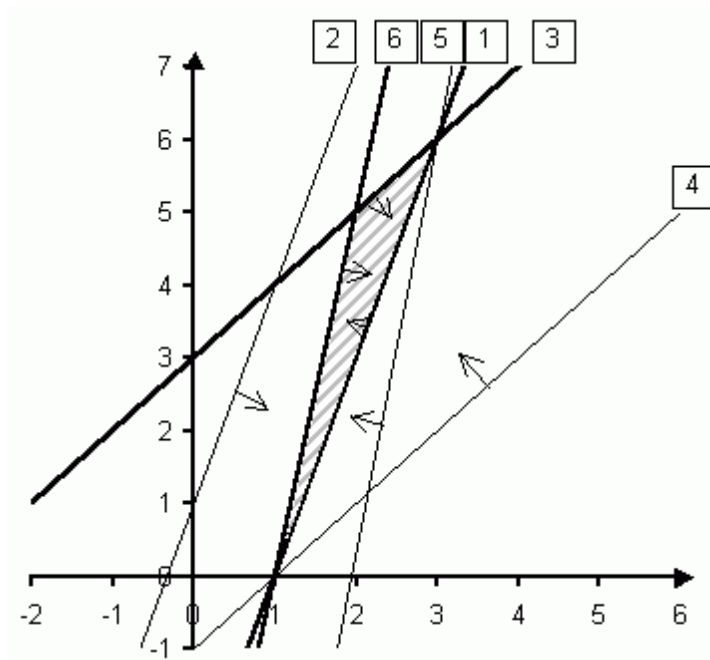


Figure 2.1: Epäyhtälöryhmän graafinen ratkaisu.

muut muuttujat saavat arvoja seuraavasti ($x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5$, $s_1 = 0$ ja $s_2 = 5x_1 - x_2 - 5$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vrt. } \mathbf{x}^B \text{ edellä!})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vrt. } \mathbf{x}^A \text{ edellä!})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\text{vrt. } \mathbf{x}^C \text{ edellä!})$$

Nyt voimme antaa esimiehelle raportin:

(1.) Optimissa $s_1 = 0$, joten ensimmäinen resurssi käytetään kokonaan.

(2.) Optimissa x_1 ja x_2 on valittava siten, että

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 5x_1 - x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

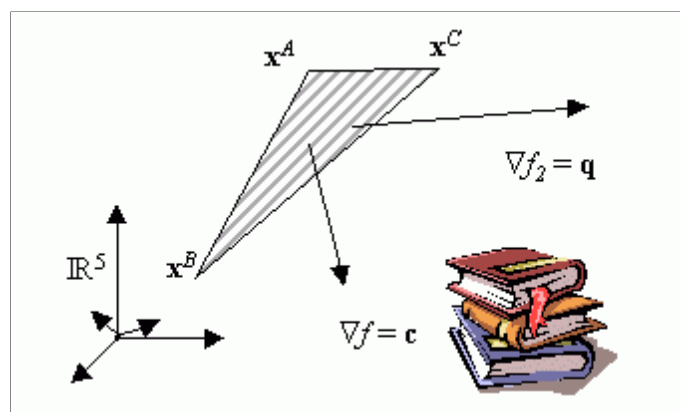


Figure 2.2: Analytikon sielunmaisema.

(3.) Optimipisteessä loput muuttujat saadaan laskettua kaavoista

$$x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5 \quad \text{ja} \quad s_2 = 5x_1 - x_2 - 5$$

Tähän esimies vastaa: ” Jahah, vai on siis monta vaihtoehtoa. Sitten minä haluan, että näistä vaihtoehtoista valitaan se, joka maksimoi lausekkeen $f_2(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}$. Ilmoita tulos mahdollisimman pian! ”

Analytikon ajatukset: On siis ratkaistava LP-malli

$$\begin{array}{ll} \max & z = f_3(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2, -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5) \\ \text{ehdolla} & \mathbf{x} \in K = [A, B, C] \subset \mathbb{R}^5 \end{array}$$

missä K on alkuperäisen LP-mallin optimipisteiden joukko. Mutta K on monikulmio ja lineaarinen funktio saa monikulmiossa suurimman arvonsa jossakin monikulmion kärkipisteessä. Siis analytikko laskee arvot

$$(2.4) \quad f_3(2, 5) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}^A, f_3(1, 0) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}^B \quad \text{ja} \quad f_3(3, 6) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}^C$$

ja ilmoittaa esimiehelleen parhaan pisteistä $\mathbf{x}^A$, $\mathbf{x}^B$, $\mathbf{x}^C$. (Huomaa, että esimiehen antaman lisätehtävän tavoitefunktio f_2 oli nyt lineaarinen. Jos f_2 ei olisi lineaarinen, lisätehtävä vaatisi NP-mallin 2.4 asianmukaisen ratkaisun.

2.6.3 Rajoittamaton optimi

Tutkiaksemme, miten simplex-algoritmi toimii rajoittamattoman optimin tapauksessa, ratkaisemme esimerkin ?? uudelleen. LP-malli on

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Teemme ensin LP-mallista standardi-muotoisen pelivaramuuttujilla ja sitten kanoonisen muodon yhdellä rivioperaatiolla

$$\begin{array}{llllll} \max z, & z & - & x_1 & - & x_2 & & = & 0 \\ \text{ehdoin} & & & x_1 & - & x_2 & - & e_1 & = & 1 \quad \# \\ & & & & & x_2 & & + & s_2 & = & 2 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, e_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \max z, & z & & - & 2x_2 & - & e_1 & & = & 1 \\ \text{ehdoin} & & x_1 & - & x_2 & - & e_1 & & = & 1 \\ & & & & x_2 & & + & s_2 & = & 2 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, e_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \# \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{rivi} & -z & x_1 & x_2 & e_1 & s_2 & \text{BV} & \text{RHS} \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & z = & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & x_1 = & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & s_2 = & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1/(-1) = -1 \\ \# \quad 2/1 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \# \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{rivi} & -z & x_1 & x_2 & e_1 & s_2 & \text{BV} & \text{RHS} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & z = & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & x_1 = & 3 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 = & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{rajoittamaton optimi} \\ 3/(-1) = -- \\ 2/0 = -- \end{array}$$

Kun suhdetesti ei anna mitään kannasta poistuvaa muuttujaa, päättelemme kohdanneemme rajoittamattoman optimin.

Asian voi havainnollistaa itselleen kirjoittamalla viimeisen taulun mukaiset yhtälöt siten, että nollatermit jätetään pois.

$$\left\{ \begin{array}{l} z \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{l} - e_1 \\ - e_1 \\ \end{array} \begin{array}{l} = 5 \\ = 3 \\ = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 5 + e_1 \\ x_1 = 3 + e_1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

Siis excess-muuttujaa e_1 voi kasvattaa rajatta ja samalla kasvavat z ja x_1 eikä x_2 muutu. Koska tavoitefunktion arvo saadaan miten suureksi tahansa, ongelmalla ei ole optimiratkaisua.

2.6.4 Big M mentelmä

Joskus on vaikeuksia muodostaa kanooninen muoto ($RHS > 0$, jokaisella kantamuuttujalla on yhden rivin kerroin 1 ja muiden rivien kertoimet 0 siten, että mainitut ykköset ovat eri riveillä).

Periaatteessa voimme aina järjestää raa'alla voimalla ykkösiä ja nollija haluamiimme kohtiin kerrointauluun, mutta RHS ei välttämättä pysy ei-negatiivisena. Silloin voimme menettellä seuraavasti.

Big M menetelmän vaiheet.

1. Muuta lp-mallin rajoitteiden RHS:t ei-negatiivisiksi. Jos rajoitteen oikea puoli on negatiivinen, vaihdetaan rajoitteen kaikkien termien merkit (kerrotaan -1 :llä).
2. Muuta yhtälöt standardimuotoon lisäämällä pelivaramuuttujat ($s = \text{slack}$, $e = \text{excess}$).
3. Jokaiselle rajoiteriville j (ei 0-riville), jolla ei ole slack-muuttujaa lisätään keinomuuttuja a_j (artificial variable). Keinomuuttuja lisätään siis, kun 1. vaiheen jälkeinen rajoite on tyyppiä " $>$ " tai " $=$ ".
4. Merkitään kirjaimella M hyvin suurta lukua. Jos olemme maksimoimassa (minimoimassa) tavoitefunktiota, lisätään tavoitefunktioon jokaista keinomuuttujaa a_j kohden termi $-Ma_j$ ($+Ma_j$). Tällainen termi on tavoitefunktion arvoa heikentävä, joten keinomuuttujat tulevat nopeasti poistumaan kannasta.
5. Järjestetään nollat 0-rivin keinomuuttujasarakkeisiin. Tämä on välttämätöntä, jotta saisimme aikaan kanoonisen muodon, mutta myös hyvin suoraviivaista eikä se muuta RHS:n arvoja. Saamme näin kanoonisen ratkaisun.

6. Ratkaise saatu kanooninen muoto simplex-algoritmillä. Jos kaikki keinomuuttujat saavat optimiratkaisussa arvon 0, olemme löytäneet alkuperäisen LP-mallin optimiratkaisun. Jos jokin keinomuuttuja saa optimiratkaisussa positiivisen arvon, on alkuperäisen lp-mallin rajoitteet ritiriitaiset.

Esimerkki 2.6.3 Bevco valmistaa 'Oranj'-nimistä appelsiinijuomaa sekoittamalla kahta raaka-ainetta, appelsiinilimonaadia ja mehutiivistettä. Jokainen unssi (oz) limonaadia sisältää 0.5 oz sokeria ja 1 mg C-vitamiinia. Jokainen unssi mehutiivistettä sisältää 0.25 oz sokeria ja 3 mg C-vitamiinia. Bevcolle maksaa 2 ¢/oz valmistaa limonaadia ja 3 ¢/oz valmistaa mehutiivistettä. Bevcon markkinointiosasto vaatii, että jokaisen juomapullon (10 oz) tulee sisältää vähintään 20 mg C-vitamiinia ja korkeintaan 4 oz sokeria. Tutki, miten markkinointiosaston vaatimukset täytetään mahdollisimman pienin kustannuksin.

Ratkaisu:

muuttujat: x_1 = limonaadin määrä Oranj-pullossa
 x_2 = mehutiivisteiden määrä Oranj-pullossa

LP-malli on nyt

$$\begin{array}{llllll} \text{Min } z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 0.5x_1 & + & 0.25x_2 & \leq & 4 \text{ sokeri rajoite} \\ & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 20 \text{ vitamiinirajoite} \\ & x_1 & + & x_2 & = & 10 \text{ pullon sisältö} \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Pelivara- ja keinomuuttujilla täydennetty standardimalli on

$$\begin{array}{llllllllll} \text{Max } -z, & -z & + & 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & Ma_2 & + & Ma_3 & = & 0 \\ \text{ehdoin} & & & 0.5x_1 & + & 0.25x_2 & + & s_1 & & & & & = & 4 \\ & & & x_1 & + & 3x_2 & & & - & e_2 & + & a_2 & = & 20 \\ & & & x_1 & + & x_2 & & & & & + & a_3 & = & 10 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, s_1, e_2, a_2, a_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Vähentämällä 2. ja 3. rajoiterivi M :llä kerrottuna 0-rivistä, saadaan käypä kanooninen simplex-taulu

#											
rivi	-z	x1	x2	s1	e2	a1	a2	BV	RHS		
0	1	-2M+2	-4M+3	0	0	0	0	-z=	-30M		
1	0	1/2	1/4	1	0	0	0	s1=	4	16	
2	0	1	3	0	-1	1	0	a1=	20	#	6,6667
3	0	1	1	0	0	0	1	a2=	10		10

#									
rivi	-z	x1	x2	s1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	$-2M/3+1$	0	0	$-M/3+1$	$4M/3-1$	0	-z=	$-20-10M/3$
1	0	$5/12$	0	1	$1/12$	$-1/12$	0	s1=	$7/3$
2	0	$1/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	x2=	$20/3$
3	0	$2/3$	0	0	$1/3$	$-1/3$	1	a2=	$10/3$

5.6

20

5

rivi	-z	x1	x2	s1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	0	0	0	0,5	$M-0,5$	$4M/3-2$	-z=	-25
1	0	0	0	1	$-1/8$	$1/8$	$-5/6$	s1=	$1/4$
2	0	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	$-2/3$	x2=	5
3	0	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	2	x1=	5

<-- OPTIMI

Koska keinomuuttujat saavat optimissa arvon 0, löysimme alkuperäisen tehtävän optimiratkaisun. Kumpaakin raaka-ainetta pitää käyttää 5 oz /pullo, jolloin juomapullon valmistaminen maksaa 25 €. Koska $s_1 = 1/4$ alitetaan sokerirajoite $1/4$ unssilla. Koska e_2 ei ole kannassa, sen arvo on 0 ja C-vitamiinia on siis juomapullossa täsmälleen vaadittu määrä.

Esimerkki 2.6.4 Dorian Auto valmistaa urheiluautoja ja kuorma-autoja. Yhtiön johto uskoo, että yrityksen potentiaalisimpia asiakkaita ovat varakkaat miehet ja naiset. Saavuttaakseen mainitut kohderyhmät Dorian Auto suunnittelee laajaa TV-mainos-kampanjaa. Yhtiö on päättänyt ostaa minuutin mittaisia mainoksia kahta eri tyyppiä oleviin TV-ohjelmiin: perhesarjoihin ja jalkapallo-otteluihin.

Katsojatutkimusten perusteella yhtiö tietää, että perhesarjan keskelle sijoitetun mainoksen näkee keskimäärin 7 miljoonaa varakasta naista ja 2 miljoonaa varakasta miestä. Jalkapallo-ottelun keskelle sijoitetun mainoksen näkee puolestaan keskimäärin 2 miljoonaa varakasta naista ja 12 miljoonaa varakasta miestä.

Minuutin mittainen mainos keskellä perhesarjaa maksaa keskimäärin 50 000 €, kun taas jalkapallo-ottelun keskelle sijoitettu mainos maksaa keskimäärin 100 000 €.

Dorian Auto haluaa, että mainoksen näkee ainakin 28 miljoonaa varakasta naista ja 24 miljoonaa varakasta miestä. Miten yhtiö kykenee saavuttamaan tavoitteensa minimikustannuksin?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{perhesarjoihin sijoitettavien mainosten lukumäärä} \\ x_2 &= \text{jalkapallo-otteluihin sijoitettavien mainosten lukumäärä} \end{aligned}$$

LP-malli:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 5x_1 + 10x_2 && \text{kampanjan hinta (10,000 €)} \\ \text{ehdoin } 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 && \text{naisten määrä (milj.)} \\ 2x_1 + 12x_2 &\geq 24 && \text{miesten määrä (milj.)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pelivara- ja keinomuuttujilla täydennetty standardimuoto:

$$\begin{aligned} (\text{Max } -z) \quad -z + 5x_1 + 10x_2 &+ Ma_1 + Ma_2 = 0 \\ \text{ehdoin } 7x_1 + 2x_2 - e_1 + a_1 &= 28 \\ 2x_1 + 12x_2 - e_2 + a_2 &= 24 \\ x_i, e_i, a_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Kanooninen standardimuoto saadaan vähentämällä rajoitteet M :llä kerrottuina 0-rivistä:

$$\begin{aligned} \text{Max } -z & \\ -z + (-9M + 5)x_1 + (-14M + 10)x_2 + Me_1 + Me_2 &= -52M \\ \text{st } 7x_1 + 2x_2 - e_1 + a_1 &= 28 \\ 2x_1 + 12x_2 - e_2 + a_2 &= 24 \\ x_i, e_i, a_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Ensimmäinen Simplex-taulu on nyt

#									
rivi	-z	x1	x2	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	-9M+5	-14M+10	M	M	0	0	-z =	-52M
1	0	7	2	-1	0	1	0	a1=	28
2	0	2	12	0	-1	0	1	a2=	24

14
2

 x_2 tulee kantaan ja a_2 poistuu kannasta.

#									
rivi	-z	x1	x2	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	3,3333	0	M	0,8333	0	-0,8333	-z =	-20
		-6,667M			-0,1667M		+1,1667M		-24M
1	0	6,6667	0	-1	0,1667	1	-0,167	a1=	24
2	0	0,1667	1	0	-0,083	0	0,0833	x2=	2

3.6
12

 x_1 tulee kantaan ja a_1 poistuu kannasta.

rivi	-z	x1	x2	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	0	0	0,5	0,75	-0,5	-0,75	-z =	-32
						+M	+M		
1	0	1	0	-0,15	0,025	0,15	-0,025	x1=	3,6
2	0	0	1	0,025	-0,0875	-0,025	0,0875	x2=	1,4

<-- OPTIMI

Saamme siis optimaalisen ratkaisun, jonka mukaan Dorian Auton tulee sijoittaa 3.6 kappaletta mainoksia perhesarjoihin ja 1.4 kappaletta mainoksia jalkapallo-otteluihin. Näin kampanjan hinnaksi tulee 320 000 €. On kyseenalaista kelpaako tämä vastaus johtoryhmälle. Päätösmuuttujien arvot ovat desimaalilukuja, mikä ei nyt oikein tunnu luonteelta. Myöhemmin haemme Dorian Auton ongelmaan ratkaisun, jonka muuttujien arvot ovat kokonaislukuja.

SIMPLEX-muistilista:

1. Jos ongelma on tyyppiä ”Min z ”, niin muuta se muotoon ”Max $-z$ ”. (ks. esimerkki 2.4.)
2. Jos jonkin rajoitteen *RHS* on negatiivinen, muuta se positiiviseksi kertomalla koko rajoite(-epä)yhtälö -1 :llä. (Huomaa, että jokainen kyseisen rivin kerroin vaihtaa merkkiä ja erisuuruusmerkki kääntyy.)
3. Tee LP-mallista standardimuoto, eli muuta epäyhtälöt yhtälöiksi lisäämällä malliin pelivaramuuttujat.

$$\dots \leq b_j \rightarrow \dots + s_j \dots = b_j$$

ja

$$\dots \geq b_j \rightarrow \dots - e_j \dots = b_j$$

4. Tee LP-mallista kanooninen muoto.
 - (4.1) Jos j :nnessä rajoitteessa ei ole slack-muuttujaa s_j , niin lisää siihen keinomuuttuja a_j ja lisää tavoitefunktion lausekkeeseen termi $-Ma_j$.
 - (4.2) Poista keinomuuttujat 0-riviltä.
5. Tee kanoonisen muodon mukainen Simplex-taulu. Taulun kanta sisältää slackit ja keinomuuttujat ja taulu on käypä.
6. Suorita SIMPLEX-algoritmi
 - (6.1) **Valitse kantaan tuleva muuttuja** (pienin negatiivinen kerroin 0-rivillä).

Jos 0-rivillä ei ole negatiivisia kertoimia, niin

(6.1.a) Jos kannassa on jäljellä keinomuuttuja

→ **KÄYPÄ ALUE ON TYHJÄ**

(6.1.b) Jos kannassa ei ole keinomuuttujaa → löytyi optimi.

(6.1.b.1) Jos jokaisen kantaan kuulumattoman muuttujan kerroin
0-rivillä on > 0 , niin löytynyt optimi on ainoa

→ **YKSIKÄSITTEINEN OPTIMI**

(6.1.b.2) Jos löytyy kantaan kuulumaton muuttuja,
jonka kerroin 0-rivillä on $= 0$, niin mallilla on

→ **USEITA OPTIMIRATKAISUJA**

(6.2) **Valitse kannasta poistuva muuttuja suhdetestillä**

Jos suhdetesti epäonnistuu niin, ettei poistuvaa muuttujaa
saada, niin → **RAJOITTAMATON OPTIMI**

(6.3) **Vaihda kanta ja palaa kohtaan 6.1**