

Esimerkki 1. Tarkastellaan LP-mallia:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & z & = & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{ehdoin} & & & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\
 & & & x_1 + x_2 \leq 80 \\
 & & & x_1 \leq 40 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Lisätään pelivaramuuttujat ja kirjoitetaan kaikki yhtälöinä

max z ehdoin

$$\begin{array}{rcll}
 z & - & 3x_1 & - & 2x_2 & & = & 0 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = & 100 \\
 & & x_1 & + & x_2 & & + & s_2 & = & 80 \\
 & & x_1 & & & & & + & s_3 & = & 40
 \end{array}$$

Tiedämme aiemmasta esimerkistä, että optimikanta on $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$. Kokoamme nyt yhtälöissä kantamuuttujien sarakkeet omaksi ryhmäkseen seuraavasti

z	x_1	x_2	s_3	s_1	s_2	RHS
1	-3	-2	0	0	0	0
0	2	1	0	1	0	100
0	1	1	0	0	1	80
0	1	0	1	0	0	40

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -\vec{c}_{bv} & -\vec{c}_{nbv} & 0 \\ \hline \vec{0} & \mathbf{B} & \mathbf{N} & \vec{b} \end{array} \right) = \mathbf{T}$$

Kantaan $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$ liittyvä kantaratkaisu saadaan nyt, kun Simplex-taulu $\mathbf{T}$ kerrotaan vasemmalta matriisilla

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\vec{c}_{bv} \\ \vec{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{c}_{bv} \mathbf{B}^{-1} \\ \vec{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

Kantaan $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$ liittyvä Simplex-taulu on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\{x_1, x_2, s_3\}} &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{c}_{bv} \mathbf{B}^{-1} \\ \vec{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -\vec{c}_{bv} & -\vec{c}_{nbv} & 0 \\ \hline \vec{0} & \mathbf{B} & \mathbf{N} & \vec{b} \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} & -\vec{c}_{nbv} + \vec{c}_{bv} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} & \vec{c}_{bv} \mathbf{B}^{-1} \vec{b} \\ \hline \vec{0} & \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1} \vec{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyt

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_{bv}\mathbf{B}^{-1}\vec{b} = (3 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = 180$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{c}_{nbv} + \vec{c}_{bv}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = -(0 \quad 0) + (3 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \quad 1) \quad \text{Optimi-kanta!}$$

Kantaan $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$ liittyvä simplex-taulu on siis

z	x_1	x_2	s_3	s_1	s_2	RHS
1	0	0	0	1	1	180 Optimi!
0	1	0	0	1	-1	20
0	0	1	0	-1	2	60
0	0	0	1	-1	1	20

Taulu liittyy optimiratkaisuun, sillä ylimmältä riviltä ei löydy negatiivisia lukuja.

Esimerkki 2. Tarkastellaan samaa LP-mallia kuin edellä.

Miten ratkaisu muuttuu, jos muuttujan x_2 kerroin c_2 tavoitefunktiossa muuttuu vähän?

Lasketaan kantaan liittyvän simplex-taulun lohkot

$$\mathbf{B}^{-1}\vec{b} = \text{ei muutu!}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \text{ei muutu!}$$

$$\vec{c}_{bv}\mathbf{B}^{-1}\vec{b} = (3 \quad c_2 \quad 0) \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = 60 + 60c_2$$

$$\begin{aligned} -\vec{c}_{nbv} + \vec{c}_{bv}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} &= -(0 \quad 0) + (3 \quad c_2 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (3 - c_2 \quad -3 + 2c_2) \quad \text{Optimi, jos } 1.5 \leq c_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Kantaan $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$ liittyvä simplex-taulu on nyt

z	x_1	x_2	s_3	s_1	s_2	RHS
1	0	0	0	$3 - c_2$	$-3 + 2c_2$	$60 + 60c_2$
0	1	0	0	1	-1	20
0	0	1	0	-1	2	60
0	0	0	1	-1	1	20

Tämä on optimitaulu, jos

$$3 - c_2 \geq 0, \text{ ja } -3 + 2c_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 \leq 3, \text{ ja } c_2 \geq 1.5$$

$$\Leftrightarrow 1.5 \leq c_2 \leq 3$$

Esimerkki 3. Tarkastellaan samaa LP-mallia kuin esimerkissä 1. Miten ratkaisu muuttuu, jos toinen resurssi b_2 muuttuu vähän?

Lasketaan kantaan liittyvän simplex-taulun lohkot

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \text{ei muutu}$$

$$-\vec{c}_{nbv} + \vec{c}_{bv}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \text{ei muutu}$$

Kanta on siis edelleen optimaalinen, jos se on käypä, eli kaikkien päätös-muuttujien arvot ovat ei-negatiivisia.

$$\mathbf{B}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ b_2 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - b_2 \\ -100 + 2b_2 \\ -60 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_{bv} \mathbf{B}^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 - b_2 \\ -100 + 2b_2 \\ -60 + b_2 \end{pmatrix} = 100 + b_2$$

Kantaan $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$ liittyvä simplex-taulu on nyt

z	x_1	x_2	s_3	s_1	s_2	RHS
1	0	0	0	1	1	$100 + b_2$
0	1	0	0	1	-1	$100 - b_2$
0	0	1	0	-1	2	$-100 + 2b_2$
0	0	0	1	-1	1	$-60 + b_2$

Tämä kantaratkaisu on käypä, jos

$$100 - b_2 \geq 0, \text{ ja } -100 + 2b_2 \geq 0, \text{ ja } -60 + b_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b_2 \leq 100, \text{ ja } b_2 \geq 50, \text{ ja } b_2 \geq 60$$

$$\Leftrightarrow 60 \leq b_2 \leq 100$$