

Seuraavassa tutkimme kuvausta

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto \mathbf{A}\vec{x}$$

Usein tulee vastaan kysymys siitä miten pitkä kuvavektori voi enintään olla suhteessa alkukuvavektoriin.

Jos λ on matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo ja $\vec{v}$ vastaava ominaisvektori, niin

$$\|\mathbf{A}\vec{v}\| = \|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Jos kaikki ominaisarvot tiedetään, tämä yleensä riittää.

Valitettavasti kaikkien matriisien ominaisarvot eivät ole reaalisia ja ominaisvektorit eivät aina ole ortogonaalisia.

Olkoon $\mathbf{A}$ mikä tahansa reaalinen $m \times n$ matriisi (!!!).
Lasketaan kuvavektorin normin sijaan normin neliötä.

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\|^2 = (\mathbf{A}\vec{x})^T (\mathbf{A}\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{x}$$

Matriisi $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ on symmetrinen, joten sen ominaisarvot ovat reaaliset ja sen ominaisvektoreista voidaan muodostaa ortonormitettu kanta. Jos λ_j on matriisin $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ominaisarvo ja $\vec{v}_j$ vastaava normitettu ominaisvektori, niin

$$\|\mathbf{A}\vec{v}_j\|^2 = \vec{v}_j^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{v}_j = \vec{v}_j^T \lambda_j \vec{v}_j = \lambda_j.$$

Ominaisarvot ovat nyt aina olemassa ja ne ovat reaaliset ja positiiviset. Ne yleensä järjestetään suuruusjärjestykseen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n \geq 0$.

Määritelmä $(m \times n)$ -matriisin $\mathbf{A}$ *singulaariarvot* (singular values) ovat

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}, j = 1, \dots, n$$

missä $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ovat matriisin $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ominaisarvot.

Siis $\|\mathbf{A}\vec{v}_j\| = \sigma_j$.

Lause: Jos $(m \times n)$ -matriisin $\mathbf{A}$ säännöllisyysaste on $\text{Rank}(\mathbf{A}) = r$, niin on olemassa hajoitelma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T,$$

missä $\mathbf{U}$ on ortogonaalinen $m \times m$ -matriisi ja

$\mathbf{V}$ on ortogonaalinen $n \times n$ -matriisi ja

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad m \times n$$

Todistus: Todistamme lauseen vaiheittain. Aluksi oletamme, että $m \geq n$. Olkoon

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{E} \mathbf{V}^T$$

symmetrisen matriisin $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ominaisarvohajoitelma, missä $\mathbf{V}$ on ortogonaalinen $m \times m$ ja

$$\mathbf{E} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Sigma}, \quad m \times m$$

missä $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. (Huom. $\sigma_j = 0$, kun $j > r$.) Osoitamme seuraavaksi, että on olemassa $m \times n$ matriisi $\mathbf{W}$, jolle $\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$.

(Tämä ei vielä todista lausetta, sillä matriisit $\mathbf{W}$ ja $\mathbf{\Sigma}$ ovat eri kokoisia, kuin lauseen $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{D}$.)

Suora lasku osoittaa, että

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \Leftrightarrow \mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}.$$

Matriisi $\mathbf{W}$ ei ole neliömatriisi, mutta sen sarakkeet ovat parittain kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita, sillä

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}^T \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T} \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathbf{I}$$

Matriisi $\mathbf{W}$ voidaan täydentää ortogonaaliseksi neliömatriisiksi lisäämällä siihen uusia sarakkeita 'Gram-Schmidt'-algoritilla.

Uusi ortogonaalinen matriisi on

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (m \times m)$$

Tässä siis $\mathbf{U}$ on $m \times m$, $\mathbf{W}$ on $m \times n$, $\mathbf{B}$ on $m \times (m - n)$, ja $\mathbf{W}^T \mathbf{B} = 0$.

Lisätään vastaavasti matriisiin Σ alle $((m - n) \times n)$ blokki nollia.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (m \times n)$$

Nyt

$$\mathbf{UDV}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^T = \mathbf{W} \Sigma \mathbf{V}^T = \mathbf{A}.$$

Konstruktio on valmis tapauksessa $m \geq n$.

Tapauksessa $m < n$ teemme samalla tavalla kuin edellä singulaariarvohajoitelman transpoosille $\mathbf{A}^T$ ($n \times m$)

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}^T\mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{A}^T : (n \times m)$$

$$\mathbf{A} : (m \times n)$$

$$\mathbf{U} : (n \times n)$$

$$\mathbf{V} : (m \times m)$$

$$\mathbf{D} : (n \times m)$$

$$\mathbf{D}^T : (m \times n)$$

$$\mathbf{V}^T : (m \times m)$$

$$\mathbf{U}^T : (n \times n)$$

Lause: Ortogonaalisen matriisin singulaariarvot ovat kaikki ykkösiä.

Perustelu Ortogonaalinen matriisi säilyttää vektorin pituuden

$$\|\mathbf{Q}\vec{x}\| = \|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \Rightarrow \lambda_i = 1, \forall i \Rightarrow \sigma_i = 1, \forall i$$

SVD-hajoitelma on

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{I}^T$$

Lause: Jos $n \times n$ matriisilla $\mathbf{A}$ on n positiivista singlaariarvoa

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

niin $\mathbf{A}$ on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T, \quad \mathbf{\Sigma}^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}),$$

Perustelu: HT