Luku 2

Lineaariset yhtälöryhmät

2.1 Rivioperaatiot

Sovitaan ensin merkintätavoista. Ratkaisemme ensin yksinkertaisen yhtälöparin

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ -2x & + & y & = & 4 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Lisäämme ensimmäisen yhtälön kahdella kerrottuna toiseen, jolloin yhtälöryhmä menee muotoon, josta ratkaisu on helppo saada esiin. (Huomaa merkinnät, jotka on tehty yhtälöryhmän oikealle puolelle.)

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ -2x & + & y & = & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} +2 \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ & & 5y & = & 10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \tag{2.3}$$

Yhtälöstä (2) saadaan arvo $y = 2$ ja sijoittamalla tämä arvo yhtälöön (1) saadaan

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 2 &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x = -1$, $y = 2$.
Edellä käytetty rivioperaatio oli rivin lisääminen luvulla kerrottuna toiseen.

Seuraavassa esimerkissä käytämme samaa rivioperaatiota toistuvasti. Jokaisessa välimuodossa on yksi termi merkitty hakasuluin. Tätä termiä sanomme *pivot-termiksi.* Rivioperaatioiden kertoimet valitaan niin, että pivot-termin alapuolella olevat samanmuotoiset termit häviävät. Pivot-termin valintaa ja sitä seuraavia rivioperaatioita sanomme *pivotoinniksi.*

Esimerkki 11.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} {[x]} & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ -x & & & + & 3z & - & w & = & 6 \\ & - & y & + & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & - & w & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} +1 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.4}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ & & {[y]} & + & 2z & + & w & = & 8 \\ & - & y & + & 2z & + & 3w & = & 2 \\ & - & y & + & 4z & - & 5w & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} & \\ +1 & +1 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.5}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & w & = & 8 \\ & & & & {[4z]} & + & 4w & = & 10 \\ & & & & 6z & - & 4w & = & 5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c} \\ \\ -3/2 \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.6}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & w & = & 8 \\ & & & & 4z & + & 4w & = & 10 \\ & & & & & - & 10w & = & -10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \tag{2.7}$$

$$\begin{array}{lll} (4) & \longrightarrow & w = 1 \\ (3) & \longrightarrow & 4z + 4 \cdot 1 = 10 \quad \Leftrightarrow z = 1.5 \\ (2) & \longrightarrow & y + 2 \cdot 1.5 + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow y = 4 \\ (1) & \longrightarrow & x + 4 - 1.5 + 2 \cdot 1 = 2 \quad \Leftrightarrow x = -2.5 \end{array}$$

Jatkossa tulemme käyttämään seuraavia rivioperaatioita:

Rivin lisääminen toiseen riviin luvulla kerrottuna. On selvää, että tämä rivioperaatio ei muuta yhtälöryhmän ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmässä (2.4) pivot-rivi (rivi 1) lisätään yhdellä kerrottuna riviin 2 ja pivot-rivi vähennetään kahdella kerrottuna rivistä 4. Huomaa, miten pivotoinnissa käytetyt kertoimet nähdään pivot-sarakkeen (x-sarake) vastaavan rivin kertoimista. Varmista edellisen esimerkin avulla, että varmasti ymmärrät rivioperaatiot.

Yhtälöryhmän (2.5) neljäs yhtälö syntyy seuraavasti

termi	4. rivi (2.4)	$-2\cdot$	pivot (2.4)	$=$	4. rivi (2.5)
x-termi	$2x$	$-2\cdot$	x	$=$	
y-termi	y	$-2\cdot$	y	$=$	$-y$
z-termi	$2z$	$-2\cdot$	$(-z)$	$=$	$4z$
w-termi	$-z$	$-2\cdot$	$2w$	$=$	$-5w$
RHS	1	$-2\cdot$	2	$=$	-3

Nyrkkisääntö: Rivioperaatiota tehtäessä käydään läpi kaikki sarakkeet, myöskin RHS.

Rivin kertominen (tai jakaminen) nollasta eroavalla luvulla.

Kahden rivin vaihtaminen.

On selvää, että rivioperaatiot eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisua. Tavoite onkin nyt muuttaa yhtälöryhmän muotoa muuttamatta ratkaisua. Pyrimme siihen, että muoto saadaan sellaiseksi, että viimeisessä yhtälössä on vain yksi muuttuja w, joka saadaan ratkaistua tästä yhtälöstä. Kun toiseksi viimeinen yhtälö viedään muotoon, jossa esiintyy edellisen muuttujan lisäksi vain yksi muu muuttuja (tässä w:n lisäksi z), niin sijoittamalla w:n arvo yhtälöön saadaan uusi muuttuja z ratkaistua.

Useimmissa tapauksissa tavoittelemamme muoto saadaan helposti suorittamalla peräkkäiset pivotoinnit seuraavasti. Ensimmäiseksi pivot-termiksi valitaan ensimmäisen yhtälön x-termi. Toiseen pivotointiin valitsemme pivot-termiksi toisen yhtälön y-termin. Kolmanteen pivotointiin valitsemme pivot-termiksi kolmannen yhtälön z-termin. Jne. Normaali ratkaisu onkin siis valita seuraavaksi pivot-termiksi ”seuraava muuttuja seuraava rivi”. Näin jatkaen yhtälöryhmä saa tavanomaiselle ratkaisulle tyypillisen kolmiomaisen muodon.

Joskus ”seuraava muuttuja seuraava rivi” -periaatteen mukaisessa paikassa on tyhjää; haluttu termi puuttuu. Silloin on etsittävä haluttua muuttujaa sisältävää yhtälöä alemmilta riveiltä. Jos tällainen rivi löytyy, vaihdetaan se pivot-rivin paikalle ja jatketaan normaalisti. Jos muuttujaa ei esiinny millään jäljellä olevalla rivillä, niin siirrymme seuraavaan muuttujaan (sarakkeeseen). Jos jouduimme hyppäämään pivotoinneissa yhden sarakkeen yli, on tämä merkille pantava asia. Pivotoimaton sarake kannattaa merkitä käsin laskettaessa, jotta varmasti muistaa jatkossa huomioida sen oikein. Tämän kappaleen esimerkeissa pivot-termit on merkitty hakasuluin. Pivotoinneissa ylihypätty sarake erottuu siitä, ettei sillä ole viimeisessä esityksessä pivot-merkintää.

Seuraavat esimerkit valaisevat asiaa.

Esimerkki 12.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} [x] & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ -3x & - & 3y & & & - & w & = & 1 \\ & + & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & + & 10w & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} +3 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.8}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5w & = & 4 \\ & & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & y & + & z & + & 6w & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \textit{vaihdetaan} \tag{2.9}$$

Uudeksi pivot-termiksi ei nyt voida ottaa toisen yhtälön y-termiä. Koska haluamme edetä systemaattisesti, vaihdamme toisen ja kolmannen rivin keskenään ja jatkamme *sen jälkeen systemaattisesti.*

$$\leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & [y] & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & 3z & + & 5w & = & 4 \\ & & y & + & z & + & 6w & = & -1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \leftarrow \end{array} \right. \tag{2.10}$$

$$\leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & (y) & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & [3z] & + & 5w & = & 4 \\ & & & & 3z & + & 3w & = & 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \\ \\ -1 \\ \leftarrow \end{array} \right. \tag{2.11}$$

$$\leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & (y) & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & (3z) & + & 5w & = & 4 \\ & & & & & & [-\ 2w] & = & -4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \right. \tag{2.12}$$

$$(4) \quad \rightarrow \quad w = (-4)/(-2) = 2 \tag{2.13}$$

$$(3) \quad \rightarrow \quad z = (4 - 5 \cdot 2)/3 = -2 \tag{2.14}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad y = -1 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = -11 \tag{2.15}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad x = 1 - (-11) - (-2) - 2 \cdot 2 = 10 \tag{2.16}$$

*Saatu ratkaisu kannattaa aina tarkistaa sijoittamalla saadut arvot **alkuperäiseen** yhtälöryhmään:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 10 & + & (-11) & + & (-2) & + & 2 \cdot 2 & = & 1 \\ -3 \cdot 10 & - & 3(-11) & & & - & 2 & = & 1 \\ & + & (-11) & - & 2(-2) & + & 3 \cdot 2 & = & -1 \\ 2 \cdot 10 & + & 3(-11) & + & 3(-2) & + & 10 \cdot 2 & = & 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} ok \\ ok \\ ok \\ ok \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Joskus käy niin, että jostakin yhtälöstä häviävät kaikki muuttujat. Jos syntyvä yhtälö on tyyppiä $0 = 0$, niin se on (triviaalisti) tosi. Vaihdetaan tämä yhtälö ryhmän viimeiseksi ja jatketaan normaalisti.

Jos yhtälö on tyyppiä $0 = a$ $(\neq 0)$, niin yhtälö on epätosi ja yhtälöryhmällä ei voi olla yhtään ratkaisua, joten ratkaisun etsiminen voidaan lopettaa.

Jos on syntynyt epätosi yhtälö, tai kaikki pivotoimattomat yhtälöt ovat triviaaleja, päättelemme seuraavasti:

(1) Jos on syntynyt epätosi yhtälö,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & 0 & = & 5 \quad \text{epätosi} \rightarrow \text{ei ratkaisua} \\ \star & + & \star & + & \ldots & + & \star & = & \star \\ \star & + & \star & + & \ldots & + & \star & = & \star \end{array} \right.$$

niin lopetamme ratkaisun etsimisen ja ilmoitamme, että **ratkaisujoukko on tyhjä**.

(2) Jos ei-triviaaleja yhtälöitä on yhtä monta kuin muuttujaa,

$$\begin{cases} (a_{11}x_1) & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & (a_{22}x_2) & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & (a_{nn}x_n) & = & b_n \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

niin ratkaisemme muuttujien arvot palautuvien sijoitusten avulla.

(3) Jos ei-triviaaleja yhtälöitä on m kappaletta ja muuttujia on n kpl ja $m < n$, niin siirrämme RHS:iin muuttujat, joita ei esiinny pivot-termeissä. Pivotoinnissa mukana olleet muuttujat ratkaistaan peräkkäisillä sijoituksilla.

$$\begin{cases} (a_{11}x_1) & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & a_{1(m+1)}x_{m+1} & \dots & a_{1n}x_n & + & b_1 \\ & & (a_{22}x_2) & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & a_{2(m+1)}x_{m+1} & \dots & a_{2n}x_n & + & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & & & (a_{mm}x_m) & = & a_{2(m+1)}x_{m+1} & \dots & a_{2n}x_n & + & b_m \\ & & & & & & 0 & = & 0 & & & & \end{cases}$$

Ratkaisuja on nyt ääretön määrä. On kuitenkin oltava huolellinen vastausta kirjoittaessa. Yhtälöryhmä ei ole aina tosi. Periaate on se, että muuttujille $x_{m+1}, \dots, x_n$ voidaan antaa mitkä tahansa numeroarvot ja tämän jälkeen muuttujien $x_1, \dots, x_m$ arvot saadaan palautuvilla sijoituksella viimeisestä yhtälöryhmän muodosta.

Seuraavissa esimerkeissä tulevat vastaan kaikki edellä esitetyt tapaukset. Esimerkeissä yksinkertaistetaan välimuotoja siirtymällä kerroin-kaavio -esitykseen. Tämä merkitsee sitä, että jätämme muuttujat kirjoittamatta. Kertoimen paikka kaaviossa kertoo minkä muuttujan kerroin se on (sarake) ja mihin yhtälöön se kuuluu (rivi).

Esimerkki 13.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} [x] & - & y & + & z & = & 5 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 3 \\ & & 2y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right. \tag{2.18}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cc} +3 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.19}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \rightarrow \textit{epätosi, ei ratkaisua} \\ \\ \\ \end{array} \tag{2.20}$$

Vastaus: yhtälöryhmän ratkaisujoukko on tyhjä.

Esimerkki 14.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} [x] & - & y & + & z & = & -1 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 3 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \tag{2.21}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} +3 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.22}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow \ \textit{vaihdetaan} \\ \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.23}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ -2 \\ \\ \end{array} \tag{2.24}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & [1] & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -2 \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \tag{2.25}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & (1) & 5 & 6 \\ 0 & 0 & (-12) & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \tag{2.26}$$

$$(3) \quad \rightarrow \quad z = 1 \tag{2.27}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad y = 6 - 5 \cdot 1 = 1 \tag{2.28}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad x = -1 + 1 - 1 = -1 \tag{2.29}$$

Vastaus: $x = -1$, $y = 1$ *ja* $z = 1$.

Esimerkki 15.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ -3x & - & 3y & - & z & & & = & 1 \\ & + & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \end{array}\right. \tag{2.30}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \left|\begin{array}{l} +3 \\ \leftarrow \\ \end{array}\right. \tag{2.31}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \left|\begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}\right. \textit{vaihdetaan} \tag{2.32}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & [2] & 6 & 4 \end{array}\right) \tag{2.33}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 & - & 2w \\ & & y & - & 2z & = & -1 & - & 3w \\ & & & & 2z & = & 4 & - & 6w \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\right. \tag{2.34}$$

$$(3) \quad \rightarrow \quad z = (4-6w)/2 = 2-3w \tag{2.35}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad y = (-1-3w+2(2-3w)) = 3-9w \tag{2.36}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad x = (1-2w-(3-9w)-(2-3w)) = -4+10w \tag{2.37}$$

Vastaus

$$\left\{\begin{array}{rcc} x & = & -4+10w \\ y & = & 3-9w \\ z & = & 2-3w \\ w & = & w \end{array}\right.$$

Esimerkki 16.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & z & + & 2w & = & 1 \\ -3x & + & 3y & & & - & 5w & = & 1 \\ & & y & + & z & & & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 6w & = & 5 \end{array}\right. \tag{2.38}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|c|c} +3 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.39}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|l} \\ \leftarrow \; \textit{vaihdetaan} \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \tag{2.40}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & [1] & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|c|c} & \\ +3 & -5 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.41}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|c} \\ \\ -2 \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.42}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.43}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcc} (x) & - & 2y & + & 2w & = & 1+z \\ & & (y) & & & = & -1-z \\ & & & & (w) & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{|c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \\ \end{array} \tag{2.44}$$

$$(3) \quad \rightarrow \quad w = 4 \tag{2.45}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad y = -1 - z \tag{2.46}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad x = 1 + z + 2(-1 - z) - 2 \cdot 4 = -9 - z \tag{2.47}$$

Vastaus

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -9-z \\ y & = & -1-z \\ z & = & z \\ w & = & 4 \end{array}\right.$$

2.2 Gaussin eliminointikeino

Seuraavaksi muotoilemme algoritmin yhtälöryhmän ratkaisemiseksi. Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. . \tag{2.48}$$

Muuttujia on n kappaletta ja yhtälöitä on m kappaletta. Kerroin a_{ij} on muuttujan x_j kerroin i:nnessä yhtälössä. Keskitymme algoritmissa kertoimiin, joten esitämme yhtälöryhmän kerroinkaaviona

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Yhtälöryhmän i:nnettä yhtälöä vastaa kaavion i:s rivi

$$w_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

Algoritmi muokkaa kaaviota kierros kierrokselta ja merkitsemme tarvittaessa kaavion järjestysnumeron $k = 1, 2, \dots$ yläindeksinä. (a_{ij}^k on siis muuttujan x_j kerroin k:nnen kaavion i:nnessä yhtälössä.)

Koska lopullinen algoritmi sisältää lukuisia poikkeustapausten aiheuttamia varmistuksia ja on siksi kummallisen tuntuinen ensi lukemalta, esitämme ensin erikoistapauksen, jolla saa tuntuman perusratkaisuun.

2.2.1 Algoritmi, Gaussin eliminointi, helppo tapaus.

Seuraava algoritmi olettaa, että muuttujia ja yhtälöitä on sama määrä ($m = n$), ja minkään yhtälön LHS:ia ei voida lausua muiden yhtälöiden LHS:ien lineaarikombinaationa. Oletus merkitsee, että yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu ja monet yleisen algoritmin tarkistukset voidaan jättää pois.

Gaussin algoritmi, versio I helpossa tapauksessa.

(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) `for` $k = 1$ `to` $n - 1$
(3)   *% (Etsitään pivot-alkio)*
(4)   `if` $a_{kk}^k = 0$
(5)   `then`
(6)   etsi samasta sarakkeesta alemmalta riviltä alkio

    $a^k_{tk} \neq 0, t > k$ ja vaida rivit w_t ja w_k.
  `endif`
  % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
  `for` $j = 1$ `to` k
    $w^{k+1}_j = w^k_j$;
  `endfor`
  `for` $j = k + 1$ `to` m
    $w^{k+1}_j = w^k_j - (a^k_{jk}/a^k_{kk}) \cdot w^k_k$;
  `endfor`
`endfor`
(% Palautuvat sijoitukset)
`for` $p = n$ `downto` 1
  $x_p = (b^k_p - \sum_{j=p+1}^{n} a^k_{pj} x_j)/(a^k_{pp})$
`endfor`

Gaussin algoritmi, versio II helpossa tapauksessa.

Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
`for` $k = 1$ `to` $n - 1$
  % (Etsitään pivot-alkio)
  `if` $a^k_{kk} = 0$
  `then`
    etsi samasta sarakkeesta alemmalta riviltä alkio
    $a^k_{tk} \neq 0, t > k$ ja vaida rivit w_t ja w_k.
  `endif`
  % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
  `for` $j = 1$ `to` $k - 1$
    $w^{k+1}_j = w^k_j - (a^k_{jk}/a^k_{kk}) \cdot w^k_k$;
  `endfor`
  $w^{k+1}_k = w^k_k$;
  `for` $j = k + 1$ `to` m
    $w^{k+1}_j = w^k_j - (a^k_{jk}/a^k_{kk}) \cdot w^k_k$;
  `endfor`
`endfor`
(% Muuttujien arvot)
`for` $p = 1$ `to` n
  $x_p = b^k_p/a^k_{pp}$
`endfor`

Versio II:ssa ei tarvita palautuvia sijoituksia. Sen vuoksi moni pitää toista versiota parempana. Kuitenkin se on herkempi pyöristysvirheille ja veriota I pidetään siksi teoreettisesti parempana.

Esimerkki 17. *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ x - 2y + z = -5 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \tag{2.51}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä kummallakin edellä esitetyllä algoritmilla.
Versio I:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|cc} -1 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.52}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|l} \\ \leftarrow \text{ vaihdetaan} \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.53}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 3 & -3 \\ 0 & (5) & -8 & 7 \\ 0 & 0 & (-2) & -2 \end{array}\right) \tag{2.54}$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \tag{2.55}$$
$$y = (7 - (-8) \cdot 1)/5 = 3 \tag{2.56}$$
$$x = (-3 - (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 1)/1 = 0 \tag{2.57}$$

Versio II:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|c|c} -1 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.58}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|l} \\ \leftarrow \text{ vaihdetaan} \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.59}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 3 & -3 \\ 0 & [5] & -8 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|l} \leftarrow \\ +0.4 \\ \\ \end{array} \tag{2.60}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & (5) & -8 & 7 \\ 0 & 0 & [-2] & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|c|c} \leftarrow & \\ & \leftarrow \\ -0.1 & -4 \end{array} \tag{2.61}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5) & 0 & 15 \\ 0 & 0 & (-2) & -2 \end{array}\right) \tag{2.62}$$

$$x = 0/1 = 0 \tag{2.63}$$
$$y = 15/5 = 3 \tag{2.64}$$
$$z = (-2)/(-2) = 1 \tag{2.65}$$

Edellä esitetyissä algoritmeissa on vielä yksi merkittävä heikkous. Jos a_{kk} on pieni, mutta nollasta eroava (esim. $a_{kk} = 1.23 \cdot 10^{-10}$ niin version I rivillä (4) ehto on tarkkaan ottaen epätosi, vaikka useimmiten pivot-alkio pitäisi hakea alemmalta riviltä.

Selkein ja helposti ohjelmoitava ratkaisu on hakea itseisarvoltaan suurin kerroin joukosta $\{a_{kk}, a_{(k+1)k}, \ldots, a_{nk}\}$. Jos itseisarvoltaan suurin kerroin on a_{qk} rivillä q, niin vaihdetaan rivit w_k ja w_q. Käsin laskettaessa tällainen rivinvaihto on usein tarpeetonta, mutta ohjelmoitaessa algoritmi tietokoneelle, tämä rivinvaito on ehdottomasti tehtävä versio III:n mukaisesti.

Gaussin algoritmi, versio III helpossa tapauksessa.

Muuttuneet rivit (verrattuna versioon I) on merkitty tähdellä.

(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) `for` $k = 1$ `to` $n - 1$
(3*)   *% (Etsitään pivot-rivi)*
(4*) $q = k$;
(5*)   `for` $i = k + 1$ `to` n
(6*)   `if` $|a_{ik}| > |a_{qk}|$
(7*)   `then`
(8*)   q=i;
(9*)   `endif`
(10*)   `endfor`
(11*)   vaihda rivit w_k ja w_q
(12)   *% (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)*
(13)   `for` $j = 1$ `to` k
(14) $w_j^{k+1} = w_j^k$;
(15)   `endfor`
(16)   `for` $j = k + 1$ `to` m
(17) $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$;
(18)   `endfor`
(19) `endfor`
(20) *(% Palautuvat sijoitukset)*
(21) `for` $p = n$ `downto` 1
(22) $x_p = (b_p^k - \sum_{j=p+1}^{n} a_{pj}^k x_j)/(a_{pp}^k)$
(23) `endfor`

Esimerkki 18. *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.66}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä muutetulla algoritmilla.

Versio III:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|l} \leftarrow|_{vaihdetaan} \\ \\ \leftarrow| \end{array} \tag{2.67}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [2] & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|l|l} -0.5 & -0.5 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \tag{2.68}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (2) & 1 & -2 & 1 \\ 0 & [-2.5] & 4 & -3.5 \\ 0 & -2.5 & 2 & -5.5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{|l} \\ -1 \\ \leftarrow \end{array} \tag{2.69}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (2) & 1 & -2 & 1 \\ 0 & (-2.5) & 4 & -3.5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \tag{2.70}$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \tag{2.71}$$

$$y = (-3.5 - 4 \cdot 1)/(-2.5) = 3 \tag{2.72}$$

$$x = (1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1)/2 = 0 \tag{2.73}$$

2.2.2 Algoritmi, Gaussin eliminointi, yleinen tapaus.

Seuraavaksi muotoilemme yleisemmän algoritmin, joka toimii kaikissa tilanteissa. Emme kirjoita täydellistä ohjelmaa, vaan tarkoitus on saada luettava esitys, josta ohjelmointitaitoinen lukija pystyy kirjoittamaan toimivan koodin.

Oletamme, että yhtälöitä on m kappaletta ja muuttujia on n kappaletta. Kun kirjoitamme algoritmin, varaudumme erityisesti seuraaviin erikoistapahtumiin.

- Pivotointi epäonnistuu jossakin sarakkeessa.
- Yhtälöt loppuvat ennen kuin kaikki sarakkeet on pivotoitu.
- Syntyy epätosi yhtälö.
- Syntyy triviaali yhtälö $0 = 0$.

Tulemme algoritmissa joskus vaihtamaan sarakkeiden järjestystä. Jotta syntyvät kaaviot olisivat helpposti luettavissa lisäämme kaavioon otsikko-rivin, jolta käy ilmi muuttuja, jonka kertoimista on kysymys. Tämä ei ole oikea-oppista, mutta harjoitteluvaiheessa tarpeellista. Erityisesti tulemme siirtämään kokonaisia sarakkeita RHS:ään. Siirron jälkeen yhtälöryhmän jokaisen yhtälön oikea puoli ei ole enää reaaliluku, vaan lineaarikombinaatio ykkösestä ja siirretyista muuttujista. Vastaava kaavion rivin RHS-vektori on tämän lineaarikombinaation kerroinvektori. Käytämme tästä rivin k RHS-vektorista merkintää $\vec{r}_k$. Seuraava esimerkki valaisee asiaa. Esimerkki on käyty läpi sekä yhtälöryhmä- että kaaviomuodossa.

Esimerkki 19.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} [x] & + & 2y & - & z & = & 6\\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 0\end{array}\right. \quad\sim\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & rhs\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & -1 & 6\\ 2 & 6 & 4 & 0\end{array}\right)\end{array} \begin{array}{|l} \\ -2 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (x) & + & 2y & - & z & = & 6\\ & & [2y] & + & 6z & = & -12\end{array}\right. \quad\sim\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & rhs\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & -1 & 6\\ 0 & [2] & 6 & -12\end{array}\right)\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (x) & + & 2y & = & 6 & + & z\\ & & (2y) & = & -12 & - & 6z\end{array}\right. \quad\sim\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & rhs & z\end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} (1) & 2 & 6 & 1\\ 0 & (2) & -12 & -6\end{array}\right)\end{array} \begin{array}{|l} \\ \\ :2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (x) & + & 2y & = & 6 & + & z\\ & & (y) & = & -6 & - & 3z\end{array}\right. \quad\sim\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & rhs & z\end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} (1) & 2 & 6 & 1\\ 0 & (1) & -6 & -3\end{array}\right)\end{array} \begin{array}{|l} \\ \leftarrow \\ -2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (x) & & & = & 18 & + & 7z\\ & & (y) & = & -6 & - & 3z\end{array}\right. \quad\sim\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & rhs & z\end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} (1) & 0 & 18 & 7\\ 0 & (1) & -6 & -3\end{array}\right)\end{array}$$

Vastaus:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 18+7z\\ y & = & -6-3z\end{array}\right.$$

Gaussin algoritmi, versio IV, yleinen tapaus.

Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
$k = 1, siirretyt = 0$
`repeat`
    % (Etsitään pivot-alkio)
    määritä rivi q siten, että alkio a^k_{qk} on itseisarvoltaan
    suurin alkioista $\{a^k_{kk}, a^k_{(k+1)k}, \ldots, a^k_{mk}\}$
    `if` $a^k_{qk} = 0$
    `then`
        siirrä sarake k RHS:iin
        $siirretyt = siirretyt + 1;$
    `else`
        vaida rivit w_q ja w_k.
        % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
        `for` $j = 1$ `to` k
            $w^{k+1}_j = w^k_j;$
        `endfor`
        `for` $j = k+1$ `to` m
            $w^{k+1}_j = w^k_j - (a^k_{jk}/a^k_{kk}) \cdot w^k_k;$
        `endfor`

```
            k = k + 1;
        endif
until k > m or k + siirretyt > n
% (Onko jäljellä pivotoimattomia sarakkeita?)
if k + siirretyt ≤ n
then
        siirrä pivotoimattomat LHS:n sarakkeet RHS:iin
endif
% (Onko jäljellä pivotoimattomia rivejä?)
if k ≤ m
then
        jos jokin pivotoimattomista yhtälöistä on epätosi,
        niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. (LOPETA)
endif
% (Ratkaise LHS:n muuttujien arvot.)
for q = k − 1 downto 1
        w_q = w_q/a_qq;
        for i = 1 to q − 1
            w_i = w_i − a_iq w_q;
        endfor
endfor
Tulkitse tulos.
```

2.3 Pythonilla tehty pivotointirutiini

Tämä kurssi ei ole ohjelmointikurssi, ja siksi emme nyt ala ohjelmoida täydellistä ohjelmaa lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseksi. Aihe voisi olla hyvä harjoitustyön aihe, mutta luentoaikaa emme siihen käytä. Myöhemmin opimme matriisien determinanteista ja käänteismatriiseista asioita, joiden avulla useimmat lineaariset yhtälöryhmät ratkeavat helposti.

Seuraavaksi tutkimme pythonilla tehtyä ohjelmaa, jolla Gaussin eliminointi voidaan tehdä vaihe kerrallaan siten, että tietokone tekee rutiinilaskut ja ihmiselle jää prosessin ohjaaminen ja siihen kuuluvat päätökset.

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöryhmää

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right. \tag{2.74}$$

Seuraavassa on interaktiivisen python-session tuloste kokonaisuudessaan, ja tulosteen jälkeen kommentit vaihe vaiheelta.

```
>>> from numpy import *
>>> from LAtools import gauss
```

```
>>> A = matrix([[1,-2,3,-3],[1,-2,1,-5],[2,1,-2,1]],float)
>>> print A
[[ 1. -2.  3. -3.]
 [ 1. -2.  1. -5.]
 [ 2.  1. -2.  1.]]
>>> # pivot (1,1) on OK
...
>>> A = gauss(A,'pivot',1,1)

[[ 1. -2.  3. -3.]
 [ 0.  0. -2. -2.]
 [ 0.  5. -8.  7.]]
>>> # pivot (2,2) ei ole OK --> vaihda rivit 2 ja 3
...
>>> A = gauss(A,'swap',2,3)

[[ 1. -2.  3. -3.]
 [ 0.  5. -8.  7.]
 [ 0.  0. -2. -2.]]
>>> # kaavio on kolmiomuodossa --> solve
...
>>> A = gauss(A,'solve')

x1 = 0.0
x2 = 3.0
x3 = 1.0

>>>
```

Kommentit yllä olevaan sessio-tulosteeseen:

- Aluksi kaksi ensimmäistä riviä lataavat "numpy"- ja "gauss"-paketit.
- Toiseksi talletaan yhtälöryhmän kerroinkaavio matriisiin $\boldsymbol{A}$. Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinkaavio on isompi kuin kerroinmatriisi. Matriisin $\boldsymbol{A}$ viimeinen sarake on yhtälöryhmän RHS.
- `A = gauss(A,'pivot',1,1)` Ensin pivotoidaan paikan (1,1) suhteen. Pivot-alkiona on 1, joka käsin laskettaessa on aina hyvä asia. Koneella laskettaessa ykkönen ei ole kakkosta parempi. Mitä suurempia lukuja diagonaalille jää pivotoinnin jälkeen, sitä vähemmän laskujen aikana tapahtuneet pyöristysvirheet vaikuttavat lopputulokseen. Tämän vuoksi olisi teoriassa hyvä vaihtaa ensimmäisen ja kolmannen rivin paikat. Emme nyt päättäneet tehdä niin.

- `A = gauss(A,'swap',2,3)` Toisessa vaiheessa luonnollinen pivot-paikka on (2,2). Mutta tässä paikassa on nyt 0, mikä ei lainkaan käy laatuun. Siksi vaihdamme rivit 2 ja 3.

- `gauss(A,'solve')` Tässä vaiheessa kerroinkaavio on kolmiomuodossa, joten teemme palautuvat sijoitukset "gauss"-rutiinin 'solve' -toiminnolla.

Esimerkki 20. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} 2.50x & - & 0.30y & + & 7.45z & + & 0.60w & = & 2.30 \\ & & y & - & 2.00z & + & 0.55w & = & 0.00 \\ 1.50x & + & 1.75y & + & 5.20z & + & 0.25w & = & 4.25 \\ 3.00x & - & 3.00y & + & 6.25z & + & 0.45w & = & 7.30 \end{cases}$$

```
>>> from numpy import *
>>> from LAtools import gauss
>>> A = matrix(\
... [[2.50,-0.30, 7.45, 0.60, 2.30],\
...  [0.00, 1.00,-2.00, 0.55, 0.00],\
...  [1.50, 1.75, 5.20, 0.25, 4.25],\
...  [3.00,-3.00, 6.25, 0.45, 7.30]],float)
>>> A = gauss(A,'pivot',1,1)

[[ 2.5  -0.3   7.45  0.6   2.3 ]
 [ 0.    1.   -2.    0.55  0.  ]
 [ 0.    1.93  0.73 -0.11  2.87]
 [ 0.   -2.64 -2.69 -0.27  4.54]]
>>> A = gauss(A,'pivot',2,2)

[[ 2.5    -0.3     7.45    0.6     2.3   ]
 [ 0.      1.     -2.      0.55    0.    ]
 [ 0.      0.      4.59   -1.1715  2.87  ]
 [ 0.      0.     -7.97    1.182   4.54  ]]
>>> A = gauss(A,'pivot',3,3)

[[ 2.5         -0.3         7.45        0.6         2.3       ]
 [ 0.          1.         -2.          0.55        0.        ]
 [ 0.          0.          4.59       -1.1715      2.87      ]
 [ 0.          0.          0.         -0.8521732   9.52342048]]
>>> A = gauss(A,'solve')

x1 = 10.4417348954
x2 = 1.69244977918
x3 = -2.22702433225
x4 = -11.1754517158
>>>
```

Esimerkki 21. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & & y & + & z & + & w & = & 5 \\ x & + & 5y & + & 3z & + & 3w & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 7z & + & 4w & = & -2 \end{cases}$$

```
>>> from numpy import *
>>> from LAtools import gauss
>>> A = matrix(\
... [[ 2, 3,-1, 2, 4],\
...  [ 0, 1, 1, 1, 5],\
...  [ 1, 5, 3, 3, 0],\
...  [ 3,-1,-7, 4,-2]],float)
>>> A = gauss(A,'pivot',1,1)

[[ 2.   3.  -1.   2.   4. ]
 [ 0.   1.   1.   1.   5. ]
 [ 0.   3.5  3.5  2.  -2. ]
 [ 0.  -5.5 -5.5  1.  -8. ]]
>>> A = gauss(A,'pivot',2,2)

[[  2.    3.   -1.    2.    4. ]
 [  0.    1.    1.    1.    5. ]
 [  0.    0.    0.   -1.5 -19.5]
 [  0.    0.    0.    6.5  19.5]]
>>> A = gauss(A,'pivot',3,4)

[[  2.    3.   -1.    2.    4. ]
 [  0.    1.    1.    1.    5. ]
 [  0.    0.    0.   -1.5 -19.5]
 [  0.    0.    0.    0.  -65. ]]
>>> A = gauss(A,'solve')

Ratkaisujoukko on tyhja.
>>>
```

Esimerkki 22. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & & y & + & z & + & w & = & 5 \\ x & + & 5y & + & 3z & + & 3w & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 7z & - & w & = & -2 \end{array}\right.$$

```
>>> from numpy import *
>>> from LAtools import gauss
>>> A = matrix(\
... [[ 2, 3,-1, 2, 4],\
...  [ 0, 1, 1, 1, 5],\
...  [ 1, 5, 3, 3, 0],\
...  [ 3,-1,-7,-1,-2]],float)
>>> A = gauss(A,'pivot',1,1)

[[ 2.   3.  -1.   2.   4. ]
```

```
 [ 0.   1.   1.   1.   5. ]
 [ 0.   3.5  3.5  2.  -2. ]
 [ 0.  -5.5 -5.5 -4.  -8. ]]
>>> A = gauss(A,'pivot',2,2)

[[  2.    3.   -1.    2.    4. ]
 [  0.    1.    1.    1.    5. ]
 [  0.    0.    0.   -1.5 -19.5]
 [  0.    0.    0.    1.5  19.5]]
>>> A = gauss(A,'pivot',3,4)

[[  2.    3.   -1.    2.    4. ]
 [  0.    1.    1.    1.    5. ]
 [  0.    0.    0.   -1.5 -19.5]
 [  0.    0.    0.    0.    0. ]]
>>> A = gauss(A,'solve')

x1 = 1.0+2.0*x3
x2 = -8.0-1.0*x3
x3 = x3
x4 = 13.0

>>>
```

Yhtälöryhmän ratkaisujoukko on siis

$$\begin{aligned} Rj &= \{(x,y,z,w)^T \mid x = 1+2z,\ y = -8-z,\ w = 13\ \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Esimerkki 23. *Ratkaise uudelleen edellisen tehtävän yhtälöryhmä, kun muuttujat on kirjoitettu yhtälöihin muutetussa järjestyksessä (z,x,y,w)*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -z & + & 2x & + & 3y & + & 2w & = & 4 \\ z & & & + & y & + & w & = & 5 \\ 3z & + & x & + & 5y & + & 3w & = & 0 \\ -7z & + & 3x & - & y & - & w & = & -2 \end{array} \right.$$

Pivotointi-rutiini antaa nyt vastauksena

```
x1 = -8.0-1.0*x3
x2 = -15.0-2.0*x3
x3 = x3
x4 = 13.0
```

(Muista, että muuttujien järjestys muuttui, joten $x1 \leftrightarrow z$, $x2 \leftrightarrow x$, $x3 \leftrightarrow y$ ja $x4 \leftrightarrow w$). Ratkaisujoukko on siis

$$\begin{aligned} Rj &= \{(x,y,z,w)^T \mid x = -15 - 2y,\ z = -8 - y,\ w = 13\,\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \tag{2.76}$$

Esimerkkien (22) ja (23) Yhtälöryhmät ovat täsmälleen samat, sillä muuttujien järjestyksen vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisujoukkoa. Vaikka vastaukset (2.75) ja (2.76) saattavat näyttää erilaisilta, ne määrittelevät täsmälleen saman vektorijoukon. Tässä vaiheessa voi olla vaikea nähdä vastausten identtisyyttä. Myöhemmin palaamme esimerkkipariin uudelleen sen jälkeen, kun olemme käsitelleet $\mathbb{R}^n$:n suorat.

2.4 Yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä

Edellä käsitelty yhtälöryhmien ratkaisumenetelmä, Gaussin algoritmi, on yleispätevä. Sillä voidaan ratkaista mikä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä. Lisäksi se on numeerisesti hyvä. Tulemme jatkossa käyttämään Gaussin algoritmin muunnelmaa erilaisissa tilanteissa, joten algoritmi tulee nyt opetella. Kappaleen lopussa on esimerkkiyhtälöryhmiä, jotka kaikki voidaan ratkaista Gaussin algoritmilla. Ratkaise niistä niin monta, että varmasti tiedät osaavasi menetelmän.

Yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä paljastuu Gaussin algoritmin kuluessa, mutta usein ratkaisujen lukumäärää on vaikea nähdä suoraan alkuperäisestä yhtälöryhmästä. Kun jatkossa ratkaisemme yhtälöryhmää, se yleensä kuuluu johonkin erikoistapaukseen. Eräissä erikoistapauksissa voidaan ratkaisujen lukumäärästä sanoa enemmän kuin edellä. Aluksi sovimme muutamia sanoja, joita tulemme käyttämään.

Määritelmä 24. *Tarkastellaan yhtälöryhmää*

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}, \tag{2.77}$$

jossa on m yhtälöä ja n muuttujaa. Matriisi $\boldsymbol{A}$ on siis $m \times n$ matriisi ja $\vec{x}$ ja $\vec{b}$ ovat $m \times 1$ -sarakevektoreita. Olkoon lisäksi $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}\ \vec{b})$. Matriisin $\boldsymbol{G}$ ensimmäiset n saraketta ovat siis samat kuin yhtälöryhmän kerroinmatriisissa ja viimeinen sarake on yhtälöryhmän RHS. (Toisin sanoen $\boldsymbol{G}$ on se kaavio, jota Gaussin algoritmissa lähdetään muokkaamaan.)

1. *Sanomme, että yhtälöryhmä (2.77) on* ***kvadraattinen****, jos $m = n$, eli yhtälöitä on yhtä monta kuin muuttujaa.*

2. *Sanomme, että yhtälöryhmä (2.77) on* ***homogeeninen****, jos $\vec{b} = \vec{0}$, eli jokaisen yhtälön RHS on nolla.*

3. *Jos $\vec{x} = \vec{0}$ on yhtälöryhmän ratkaisu, niin sanomme ratkaisua '**triviaaliksi**'. Jos yksikin muuttuja saa ratkaisuvektorissa $\vec{x}$ nollasta eroavan arvon, niin sanomme ratkaisua '**ei-triviaaliksi**'.*

4. *Jos yhtälöryhmällä on yksi ja vain yksi ratkaisu, niin sanomme että yhtälöryhmän ratkaisu on* ***yksikäsitteinen (uniikki)****.*

5. *Sanomme, että matriisi* $\boldsymbol{A}$ *on* ***vapaa****, jos mitään sen saraketta ei voida lausua matriisin muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa. Jos matriisi ei ole vapaa, sanomme sen olevan* ***sidottu****.*

6. *Sanomme, että yhtälöryhmä* $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ *on* ***vapaa****, jos mitään sen yhtälöä ei voida lausua ryhmän muiden yhtälöiden lineaarikombinaationa. Jos yhtälöryhmä ei ole vapaa, sanomme sen olevan* ***sidottu****. (Huomaa, että yhtälöryhmä (2.77) on vapaa, jos ja vain jos matriisi* $\boldsymbol{G}^T$ *on vapaa.)*

Suurin osa käsittelemistämme yhtälöryhmistä ovat kvadraattisia. Neliömatriisin vapaus voidaan helposti tutkia determinantin avulla. (Opimme myöhemmin laskemaan matriisin determinantin.) Siksi seuraavat lauseet ovat hyödylliset.

Lause 25. *Olkoon* $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ *kvadraattinen yhtälöryhmä. Silloin yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos kerroinmatriisi* $\boldsymbol{A}$ *on vapaa.*

Todistus. Lauseen todistaminen tässä vaiheessa on mahdollista, mutta mutkikas juttu. Palaamme todistukseen hieman myöhemin, kun olemme ensin oppineet lisää matriiseista. □

Lause 26. *Olkoon* $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ *kvadraattinen homogeeninen yhtälöryhmä. Silloin*
(1) homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu, ja
(2) homogeenisella yhtälöryhmällä on myös ei-triviaali ratkaisu, jos ja vain jos kerroinmatriisi $\boldsymbol{A}$ *on sidottu.*

Todistus. (1) Väite on selvä. (2) Toinen kohta seuraa lauseesta (8(2)). □

Matematikassa ei ole tavallista, että muotoillaan täsmällinen lause, ja sitten jätetään se todistamatta. Nyt teimme näin koska on hyvä verrata kahta edellistä lausetta vierekkäin. Yhtälöryhmää ratkaiseva ihminen on kuin etsijä, joka etsii ja toivoo löytävänsä. Ei-homogeenista yhtälöryhmää ratkaiseva yleensä toivoo löytävänsä yksikäsitteisen ratkaisun, koska se yleensä helpottaa tuloksen tulkintaa (ehto: $\boldsymbol{A}$ vapaa). Homogeenista yhtälöryhmää ratkaiseva yleensä toivoo löytävänsä ei-triviaalin ratkaisun (ehto: $\boldsymbol{A}$ sidottu).

Seuraavaksi muotoilemme tuloksen, jonka avulla voidaan erotella eri vaihtoehdot ratkaisujen lukumäärän suhteen. Määrittelemme ensin matriisin rangin. Rangi tullaan myöhemmin määrittelemään toisellakin tavalla, mutta kumpikin tapa antaa rangille saman numeroarvon.

Määritelmä 27. *Tarkastellaan* $m \times n$ *-matriisia* $\boldsymbol{A}$*. Viedään* $\boldsymbol{A}$ *kolmiomuotoon Gaussin algoritmilla. Ei-triviaalien rivien lukumäärä Gaussin algoritmin mukaisessa viimeisessä kaaviossa (row echelon form) on matriisin rangi, Rank*$(\boldsymbol{A})$.

Esimerkki 28. *Määritä rangi matriisille*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Viedään matriisi kolmiomuotoon pivotointityökalulla:

```
>>> from numpy import *
>>> from LAtools import gauss
>>> A = matrix(\
... [[ 1, 0, 1, 2],\
...  [ 0, 1, 1, 3],\
...  [ 2, 3, 5, 6],\
...  [-1, 1, 0, 1]], float)
>>> A = gauss(A,'pivot',1,1)

[[ 1.  0.  1.  2.]
 [ 0.  1.  1.  3.]
 [ 0.  3.  3.  2.]
 [ 0.  1.  1.  3.]]
>>> A = gauss(A,'pivot',2,2)

[[ 1.  0.  1.  2.]
 [ 0.  1.  1.  3.]
 [ 0.  0.  0. -7.]
 [ 0.  0.  0.  0.]]
>>>
```

Viimeisestä kaaviosta näemme, että $\boldsymbol{Rank}(\boldsymbol{A}) = 3$.

Lause 29. *Tarkastellaan yhtälöryhmää* $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$*, jossa on* m *yhtälöä ja* n *muuttujaa. Olkoon* $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}\ \vec{b})$*.*

1. *Jos* $\mathit{Rank}(\boldsymbol{G}) > \mathit{Rank}(\boldsymbol{A})$*, niin yhtälöryhmän ratkaisujoukko on tyhjä.*
2. *Jos* $\mathit{Rank}(\boldsymbol{G}) = \mathit{Rank}(\boldsymbol{A}) = n$*, niin yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu.*
3. *Jos* $\mathit{Rank}(\boldsymbol{G}) = \mathit{Rank}(\boldsymbol{A}) < n$*, niin yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja.*

Todistus. Emme nyt anna pikkutarkkaa todistelua, vaan sanallisen perustelun, joka yhdessä kappaleen lopussa olevien esimerkkien avulla auttaa ymmärtämään asian.
Kohta (1). Jos $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{G}) > \mathrm{Rank}(\boldsymbol{A})$, niin ratkaistaessa yhtälöryhmää Gaussin algoritmilla, viimeisen kaavion viimeinen ei-triviaali yhtälö on muotoa $0 = b, (b \neq 0)$. Mutta tämä tarkoittaa sitä, että ratkaisujoukko on tyhjä.
Kohta (2). Jos $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{G}) = \mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}) = n$, niin ratkaistaessa yhtälöryhmää Gaussin algoritmilla, viimeisessä kaaviossa on n riviä ja kerroinosa on kolmiomuodossa siten, että kaikki diagonaalialkiot eroavat nollasta. Silloin ratkaisu on yksikäsitteinen.

Kohta (3). Jos $\text{Rank}(\boldsymbol{G}) = \text{Rank}(\boldsymbol{A}) < n$, niin silloin ei Gaussin algoritmin kuluessa pivotoida kaikissa sarakkeissa. Ristiriitaista yhtälöä ei ole, joten ratkaisuja on ääretön määrä. $\square$

Ratkaise seuraavista yhtälöryhmistä niin monta, että algoritmi tulee tutuksi. Voit laskea rivioperaatiot käsin, tai voit käyttää pivotointi-työkalua.

Esimerkki 30. *Ratkaise*

a)

$$\begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + y + 3z = 13 \end{cases}, \qquad \textit{vastaus:} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -y + 3z = -5 \\ 2x + y - 3z = 11 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}, \qquad \textit{vastaus:} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ y + 4z = -3 \\ x + 4y + 2z = -1 \end{cases}, \qquad \textit{vastaus:} \begin{cases} x = 11 + 14z \\ y = -3 - 4z \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}, \qquad \textit{vastaus: Ratkaisujoukko on tyhjä}$$

e)

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}, \qquad \textit{vastaus:} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x + 3y - z + 2w = 2 \\ 2x - y + 2w = 5 \\ -x + 4y - z = 0 \end{cases}, \qquad \textit{vastaus: Rj on tyhjä}$$