

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen kolmio

Kolmiolauseet

Aste, 1° (engl. degree) Kun kellon viisari kiertyy yhden kierroksen, sanomme, että se kääntyy 360° (360 astetta). Ajatus täyden kierroksen jakamisesta 360 asteeseen, juontaa kaldealaiseen astrologiaan. Yhdessä vuorokaudessa aurinko siirtyy noin yhden asteen tähtikuvioiden joukossa.

Oikeastaan täysi kierros tulisi jakaa 365 osaan, mutta sekään ei karkausvuosien takia anna täysin oikeata jakoa. 360 jako-osien määränä on käytännöllinen, koska se on helppo jakaa pienempiin osiin. Yksi aste jaetaan 60 kulmaminuuttiin ($1^\circ = 60'$) ja yksi kulmaminuutti jaetaan 60 kulmasekuntiin ($1' = 60''$). Siis aurinko kiertää yhden kulmaminuutin kulman 24 minuutissa, ja yhden kulmasekunnin kulman 24 sekunnissa.

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Gradiaani, grad, eli gooni (engl. grad, ransk grade, saks. gon, ruots. gon) on $1/400$ täydestä kierroksesta.

grad, grade [1], gradian, or gon (1^g or gr or grd) is a unit of angle measurement equal to $1/400$ circle, 0.01 right angle, 0.9° , or $54'$. This unit was introduced in France, where it is called the grade, in the early years of the metric system. The grad is the English version, apparently introduced by engineers around 1900. The name gon is used for this unit in German, Swedish, and other northern European languages in which the word grad means degree. Although many calculators will display angle measurements in grads as well as degrees or radians, it is difficult to find actual applications of the grad today.

<http://www.unc.edu/~rowlett/units/dictG.html>

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Piiru, Kompassipiiru on $1/32$ täydestä kierroksesta. Siis $1 \text{ piiru} = 11,25^\circ$. Kompassipiiru näkyy edelleen merenkulun säädöksissä.

Tykistön piiru on karkeasti se kulma, jossa metrin kokoinen esine näkyy kilometrin päästä katsottuna. Siis täysi kierros on noin $1000 \cdot 2\pi$ piirua $\approx 6283,2$ piirua. Eri armeijat jakavat täyden kierroksen piiruiksi hiukan eri tavoin. Täysi kierros on 6000 piirua (venäjä), 6300 piirua (Ruotsi) tai 6400 piirua (Nato). Suomessa ollaan siirtymässä venäläisestä piirusta nato-piiruun.

Radiaani, rad, on kulman ympyrästä erottaman kaaren pituuden suhde ympyrän säteeseen (kun ympyrän keskipiste on kulman kärjessä). Täysi kierros on silloin 2π radiaania. Suorakulma on $\frac{\pi}{2}$ rad.

$$360^\circ = 400 \text{ grad} = 2\pi \text{ rad} = 6400 \text{ piirua}$$

Kun tiedämme, mitä täysi kierros on valitussa kulma-asteikossa, niin *oikokulma* on $1/2$ täydestä kierroksesta ($180^\circ = 200 \text{ grad} = \pi \text{ rad} = 3200 \text{ piirua}$), ja *suorakulma* on $1/4$ täydestä kierroksesta ($90^\circ = 100 \text{ grad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1600 \text{ piirua}$).

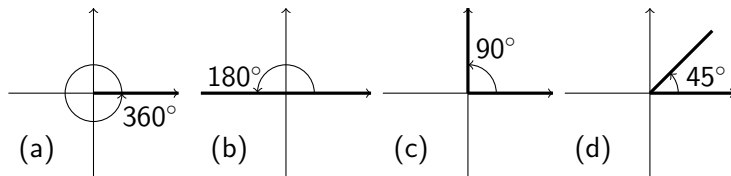
Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet



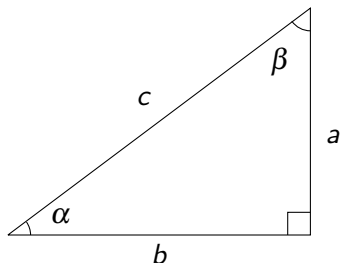
Kuva: (a) täysi kierros 2π , (b) oikokulma π , (c) suora kulma $\pi/2$, (d) suoran kulman puolikas $\pi/4$.

Kulma α on *terävä*, jos $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ($0 \leq \alpha < \pi/2$).

Kulma α on *tylppä*, jos $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\pi/2 < \alpha < \pi$).

- ▶ Tällä kurssilla käytetään kulmayksikkönä joko astetta tai radiaania.
- ▶ Piiru voi jossakin erikoistilanteessa esiintyä, mutta gradia emme käytä koskaan.
- ▶ Opettele omassa laskimessasi tarkistamaan laskimen kulmayksikkö-asetus ja tarvittaessa muuttamaan se. Kokeessa ei nyt väärän vastauksen selitykseksi kelpaa, että "Tein kyllä kaiken oikein, mutta laskimessa olikin grad-asetus päällä."

- ▶ Kolmion kulmia merkitsemme kreikkalaisin kirjaimin α , β , γ , jne. Suoraa kulmaa ei aina merkitä kirjaimella, vaan se merkitään kuvaan pienellä neliöllä.
- ▶ Kolmion sivuja ja sivujen pituuksia merkitsemme tavallisin kirjaimin a , b , c , jne.



$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 90^\circ \\ c^2 &= a^2 + b^2 \\ \sin \alpha &= a/c \\ \cos \alpha &= b/c \\ \tan \alpha &= a/b \\ \cot \alpha &= b/a\end{aligned}$$

Kuva: Suorakulmainen kolmio.

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

- ▶ Ensimmäisessä kuvassa kulmaa α vastassa on sivu a , kulmaa β vastassa on sivu b jne. Kun ensimmäistä kuvaa analysoidaan jakamalla kolmioita pienempiin osiin, joudutaan tästä periaatteesta yleensä luopumaan.
- ▶ Suoran kulman kyljet ovat kateetit a ja b , ja suoraa kulmaa vastassa on hypotenuusa c .

Suorakulmaisen kolmion terävälle kulmalle määritellään seuraavat trigonometriset funktiot:

Sini = vastainen kateetti jaettuna hypotenuusalla

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Kosini = viereinen kateetti jaettuna hypotenuusalla

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Tangentti = vastainen kateetti jaettuna viereisellä kateetilla

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Kotangentti = viereinen kateetti jaettuna vastaisella kateetilla

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Funktioiden arvot eivät riipu kolmion suuruudesta. Pienessä ja suuressa suhteet ovat samat.

Aiheet

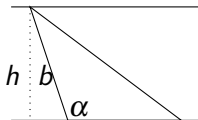
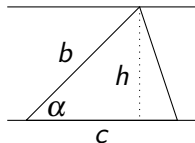
Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Kolmion ala on puolet kahden sivun pituuksien ja niiden välisen kulman sinin tulosta. (Kaavana: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$.)



$$A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Perustelu: Kuvan mukaisesti kolmion huipun kautta piirretään kannan suuntainen suora. Piirretyn suoran ja kannan välinen etäisyys on kolmion korkeus h . Olkoon α kannan c ja kyljen b välinen kulma. Silloin kolmion korkeus on $h = b \sin(\alpha)$. Kolmion pinta-ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta, eli

$$A = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Sinilause:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

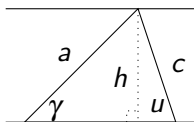
Perustelu: Edellisen lauseen mukaan kolmion kaksinkertainen pinta-ala voidaan laskea seuraavilla tavoilla:

$bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma$. Väite seuraa, kun lausekkeet jaetaan abc :lla ja siirrytään käänteislausekkeisiin. $\square$

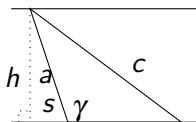
Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Perustelu:



Tapaus: "Terävä γ "
 $b - u = a \cos \gamma$



Tapaus: "Tylppä γ "
 $s = -a \cos \gamma$

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + u^2 \\ &= a^2 - (b - u)^2 + u^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2bu \\ &= a^2 + b^2 - 2b(b - u) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 - s^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2bs \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet

Aiheet

Kulmayksiköt, aste

Radiaani

Suorakulmainen
kolmio

Kolmiolauseet