

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Riviooperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
riviooperaatioiden
avulla

Käänteismatriisin määritelmä

Käänteismatriisin ominaisuuksia

Riviooperaatiot matriisitulona

Matriisin kääntäminen riviooperaatioiden avulla

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Tässä kalvosarjassa käsittelemme neliömatriiseja. Ilman asian jatkuvaa toistamista oletamme seuraavassa, että kaikki käsittelemämme matriisit ovat neliömatriiseja.

Määritelmä. Olkoon A neliömatriisi. Jos matriisille B on voimassa

$$AB = I, \quad \text{ja} \\ BA = I,$$

niin sanomme, että B on matriisin A *käänteismatriisi*.

esimerkki 1. Matriisi $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{pmatrix}$ on matriisin $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi, sillä

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmäKäänteismatriisin
ominaisuuksiaRivioperaatiot
matriisitulonaMatriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 1. Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa A :n käänteismatriisi, niin se on yksikäsitteinen. (Ts. ei ole olemassa kahta erilaista käänteismatriisia.)

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 1. Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa A :n käänteismatriisi, niin se on yksikäsitteinen. (Ts. ei ole olemassa kahta erilaista käänteismatriisiä.)

Todistus: Olkoon B ja C kaksi käänteismatriisiä. (Ts. siis $AB = I$ ja $BA = I$ ja toisaalta myös $AC = I$ ja $CA = I$).

Nyt oletuksista seuraa, että

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 1. Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa A :n käänteismatriisi, niin se on yksikäsitteinen. (Ts. ei ole olemassa kahta erilaista käänteismatriisia.)

Todistus: Olkoon B ja C kaksi käänteismatriisia. (Ts. siis $AB = I$ ja $BA = I$ ja toisaalta myös $AC = I$ ja $CA = I$).

Nyt oletuksista seuraa, että

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

Määritelmä. Jos neliömatriisille A on olemassa käänteismatriisi, niin käytämme käänteismatriisille merkintää A^{-1} ja sanomme, että matriisi A on *säännöllinen*. (Engl. "*A matrix of full rank*".)

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 2. Jos neliömatriisi A on säännöllinen, niin myös sen käänteismatriisi on säännöllinen ja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 2. Jos neliömatriisi A on säännöllinen, niin myös sen käänteismatriisi on säännöllinen ja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Perustelu:

Asian perustelu on helppo, mutta 'point' jää helposti näkemättä merkintä-kikkailun takia. Jotta asia olisi aivan selvä, merkitsemme nyt tämän perustelun aikana käänteismatriisia A kirjaimella K . Nyt siis on osoitettava, että $K^{-1} = A$ (eli $KA = I$ ja $AK = I$). Mutta tämä on selvää, sillä

$$KA = A^{-1}A = I, \quad \text{ja}$$

$$AK = AA^{-1} = I.$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 3. Jos A ja B ovat säännöllisiä (ja samankokoisia) matriiseja, niin myös niiden tulo AB on säännöllinen, ja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(Huomaa järjestys! Tämä tulee muistaa!)

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 3. Jos A ja B ovat säännöllisiä (ja samankokoisia) matriiseja, niin myös niiden tulo AB on säännöllinen, ja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(Huomaa järjestys! Tämä tulee muistaa!)

Perustelu: Merkitään tämän perustelun ajan $K = B^{-1}A^{-1}$.

Nyt on osoitettava, että $(AB)K = I$ ja $K(AB) = I$.

Tämä on selvästi totta, sillä

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 3. Jos A ja B ovat säännöllisiä (ja samankokoisia) matriiseja, niin myös niiden tulo AB on säännöllinen, ja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(Huomaa järjestys! Tämä tulee muistaa!)

Perustelu: Merkitään tämän perustelun ajan $K = B^{-1}A^{-1}$. Nyt on osoitettava, että $(AB)K = I$ ja $K(AB) = I$.

Tämä on selvästi totta, sillä

$$(AB)K = (AB)B^{-1}A^{-1} = A\underbrace{BB^{-1}}_{=I}A^{-1} = AA^{-1} = I, \quad \text{ja}$$

$$K(AB) = B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{=I}B = B^{-1}B = I$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 4. Jos A on säännöllinen, niin myös sen transpoosi on säännöllinen ja

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmäKäänteismatriisin
ominaisuuksiaRivioperaatiot
matriisitulonaMatriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 4. Jos A on säännöllinen, niin myös sen transpoosi on säännöllinen ja

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Perustelu: Merkitään tämän perustelun ajan $K = (A^{-1})^T$.
Nyt on osoitettava, että $A^T K = I$ ja $K A^T = I$.

Tämä on selvästi totta, sillä

Lause 4. Jos A on säännöllinen, niin myös sen transpoosi on säännöllinen ja

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Perustelu: Merkitään tämän perustelun ajan $K = (A^{-1})^T$.
Nyt on osoitettava, että $A^T K = I$ ja $K A^T = I$.

Tämä on selvästi totta, sillä

$$A^T K = A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I^T = I \quad \text{ja}$$

$$K A^T = (A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I^T = I$$

Esimerkki Jos haluamme vaihtaa kahden ensimmäisen rivin paikat kaaviossa

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

niin se onnistuu kätevästi laskemalla matriisitulo

$$M_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{1,2,\text{vaihda}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rivinvaihto onnistuu kertomalla matriisilla $R_{p,q,vaihda}$, joka saadaan yksikkömatriisista vaihtamalla p :nnen ja q :nnen rivin paikat.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Riviooperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
riviooperaatioiden
avulla

Rivinvaihto onnistuu kertomalla matriisilla $R_{p,q,vaihda}$, joka saadaan yksikkömatriisista vaihtamalla p :nnen ja q :nnen rivin paikat.

Lause 5. Rivinvaihto-matriisi $R_{p,q,vaihda}$ on säännöllinen ja se on itse oma käänteismatriisinsa.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmäKäänteismatriisin
ominaisuuksiaRiviooperaatiot
matriisitulonaMatriisin
kääntäminen
riviooperaatioiden
avulla

Rivinvaihto onnistuu kertomalla matriisilla $R_{p,q,vaihda}$, joka saadaan yksikkömatriisista vaihtamalla p :nnen ja q :nnen rivin paikat.

Lause 5. Rivinvaihto-matriisi $R_{p,q,vaihda}$ on säännöllinen ja se on itse oma käänteismatriisinsa.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rivin p lisääminen luvulla a kerrottuna riviin q onnistuu kertomalla matriisilla $R_{a,p,q,lisaa}$, joka saadaan yksikkömatriisista asettamalla a sen paikkaan (q,p) .

Aiheet

Käänteismatriisin
määrittelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Rivin p lisääminen luvulla a kerrottuna riviin q onnistuu kertomalla matriisilla $R_{a,p,q,lisaa}$, joka saadaan yksikkömatriisista asettamalla a sen paikkaan (q,p) .

Esimerkki Lähdetään edellisen esimerkin kaaviosta M_1 .

Ensin lisäämme rivin 1 luvulla -2 kerrottuna riviin 2.

Toisessa vaiheessa lisäämme rivin 1 luvulla -3 kerrottuna riviin 3.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmäKäänteismatriisin
ominaisuuksiaRivioperaatiot
matriisitulonaMatriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Rivin p kertominen luvulla a onnistuu kertomalla matriisilla $R_{a,p,kerro}$, joka saadaan yksikkömatriisista asettamalla a sen paikkaan (p,p) .

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivoperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivoperaatioiden
avulla

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmäKäänteismatriisin
ominaisuuksiaRivoperaatiot
matriisitulonaMatriisin
kääntäminen
rivoperaatioiden
avulla

Rivin p kertominen luvulla a onnistuu kertomalla matriisilla $R_{a,p,kerro}$, joka saadaan yksikkömatriisista asettamalla a sen paikkaan (p,p) .

lause 6. Rivoperaatiomatriisit $R_{a,p,q,lisaa}$ ja $R_{a,p,kerro}$ ovat säännöllisiä ja niiden käänteismatriisit ovat

$$R_{a,p,q,lisaa}^{-1} = R_{-a,p,q,lisaa} \quad \text{ja}$$

$$R_{a,p,kerro}^{-1} = R_{\frac{1}{a},p,kerro}$$

Lause 7. Jos A tai B on säännöllinen ja $BA = I$, niin kumpikin matriisi on säännöllinen ja $A^{-1} = B$ ja $B^{-1} = A$.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 7. Jos A tai B on säännöllinen ja $BA = I$, niin kumpikin matriisi on säännöllinen ja $A^{-1} = B$ ja $B^{-1} = A$.

Todistus: On todistettava, että $AB = I$.

Jos A on säännöllinen, niin

$$AB = ABI = A \underbrace{BA}_{=I} A^{-1} = AA^{-1} = I$$

Jos B on säännöllinen, niin

$$AB = IAB = B^{-1} \underbrace{BA}_{=I} B = B^{-1}B = I$$

Lause 8. Olkoon A neliömatriisi. Jos sarja rivioperaatioita muuttaa A :n yksikkömatriisiksi, niin sama sarja rivioperaatioita muuttaa yksikkömatriisin A :n käänteismatriisiksi.

$$R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A = I \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 I = A^{-1} \quad (2)$$

Perustelu: Jos A on säännöllinen, niin yhtälöt (1) ja (2) ovat yhtäpitävät. Kun yhtälön (1) kumpikin puoli kerrotaan oikealta A^{-1} :llä saadaan yhtälö (2). Kun yhtälön (2) kumpikin puoli kerrotaan oikealta A :lla saadaan yhtälö (1).

Aiheet

Käänteismatriisin
määrittelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lause 8. Olkoon A neliömatriisi. Jos sarja rivioperaatioita muuttaa A :n yksikkömatriisiksi, niin sama sarja rivioperaatioita muuttaa yksikkömatriisin A :n käänteismatriisiksi.

$$R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A = I \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 I = A^{-1} \quad (2)$$

Perustelu: Jos A on säännöllinen, niin yhtälöt (1) ja (2) ovat yhtäpitävät. Kun yhtälön (1) kumpikin puoli kerrotaan oikealta A^{-1} :llä saadaan yhtälö (2). Kun yhtälön (2) kumpikin puoli kerrotaan oikealta A :lla saadaan yhtälö (1). Jos emme voi olla varmoja A :n säännöllisyydestä, niin sitten vetoamme siihen, että $B = R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1$ on säännöllisten matriisien tulona säännöllinen. Silloin lauseen 7 mukaan yhtälöstä (1) seuraa se, että B on A :n käänteismatriisi, eli yhtälö (2) on voimassa.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmäKäänteismatriisin
ominaisuuksiaRivioperaatiot
matriisitulonaMatriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Edellinen lause antaa nyt keinon määrittää käänteismatriisi, eli "**kääntää matriisi**".

- Tee iso kaavio, jossa ovat käännettävä matriisi vasemmalla ja saman kokoinen yksikkömatriisi oikealla rinnakkain.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Edellinen lause antaa nyt keinon määrittää käänteismatriisi, eli "**kääntää matriisi**".

- ▶ Tee iso kaavio, jossa ovat käännettävä matriisi vasemmalla ja saman kokoinen yksikkömatriisi oikealla rinnakkain.
- ▶ Ensimmäinen "Pivot" on paikassa (1,1). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin alapuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Edellinen lause antaa nyt keinon määrittää käänteismatriisi, eli "**kääntää matriisi**".

- ▶ Tee iso kaavio, jossa ovat käännettävä matriisi vasemmalla ja saman kokoinen yksikkömatriisi oikealla rinnakkain.
- ▶ Ensimmäinen "Pivot" on paikassa (1,1). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin alapuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.
- ▶ Seuraava "Pivot" on paikassa (2,2). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin ala- ja yläpuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Edellinen lause antaa nyt keinon määrittää käänteismatriisi, eli "**kääntää matriisi**".

- ▶ Tee iso kaavio, jossa ovat käännettävä matriisi vasemmalla ja saman kokoinen yksikkömatriisi oikealla rinnakkain.
- ▶ Ensimmäinen "Pivot" on paikassa (1,1). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin alapuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.
- ▶ Seuraava "Pivot" on paikassa (2,2). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin ala- ja yläpuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.
- ▶ Jatka kunnes kaikki sarakeet on käsitelty.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Edellinen lause antaa nyt keinon määrittää käänteismatriisi, eli "**kääntää matriisi**".

- ▶ Tee iso kaavio, jossa ovat käännettävä matriisi vasemmalla ja saman kokoinen yksikkömatriisi oikealla rinnakkain.
- ▶ Ensimmäinen "Pivot" on paikassa (1,1). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin alapuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.
- ▶ Seuraava "Pivot" on paikassa (2,2). Tee rivioperaatioita niin, että pivotin ala- ja yläpuolella olevat kaavion luvut muuttuvat kaikki nolliksi.
- ▶ Jatka kunnes kaikki sarakeet on käsitelty.
- ▶ Lopuksi muuta diagonaalilla olevat luvut ykkösiksi. Tämän jälkeen kaavion oikea puoli on etsitty käänteismatriisi.

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Esimerkki. Käännetään matriisi $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Aiheet

Käänteismatriisin
määrittelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Esimerkki. Käännetään matriisi $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Tehdään ensin kaavio, jossa on A ja I rinnakain

$$M_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määrittelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Esimerkki. Käännetään matriisi $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Tehdään ensin kaavio, jossa on A ja I rinnakain

$$M_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Lisätään ensimmäinen rivi $-3/4$:llä kerrottuna toiseen riviin

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lisätään toinen rivi -4 :llä kerrottuna ensimmäiseen riviin

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lisätään toinen rivi -4 :llä kerrottuna ensimmäiseen riviin

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lopuksi kerrotaan 1 rivi $1/4$:llä

$$\begin{aligned} M_3 &= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määrittelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla

Lisätään toinen rivi -4 :llä kerrottuna ensimmäiseen riviin

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lopuksi kerrotaan 1 rivi $1/4$:llä

$$\begin{aligned} M_3 &= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Siis } \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aiheet

Käänteismatriisin
määritelmä

Käänteismatriisin
ominaisuuksia

Rivioperaatiot
matriisitulona

Matriisin
kääntäminen
rivioperaatioiden
avulla