

Suorat ja tasot, L6

Piste ja Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy -tasossa

Suora xyz -koordinaatistossa

Taso xyz -koordinaatistossa

Tason koordinaattimuotoinen yhtälö

Ristitulo determinantin avulla

Esimerkki tason yhtälöstä

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy -tasossa

Suora xyz -
koordinaatistossa

Taso xyz -
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Näillä kalvoilla käsittelemme kolmen laisia olioita

- ▶ Suora xy -tasossa.
- ▶ Suora xyz -avaruudessa.
- ▶ Taso xyz -avaruudessa.

Emme nyt ryhdy pohtimaan, mitä sanat tarkoittavat, vaan keskitymme määrittämään olion yhtälön, kun riittävä määrä tietoa siitä on olemassa.

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy -tasossa

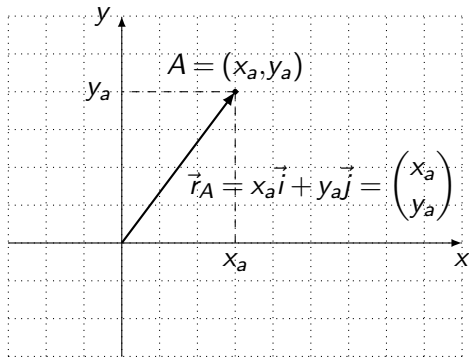
Suora xyz -
koordinaatistossa

Taso xyz -
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä



Jos pisteen A koordinaatit ovat (x_a, y_a) , niin pisteen A paikkavektori (vektori origosta pisteeseen) on

$$\vec{r}_A = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}.$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy -tasossa

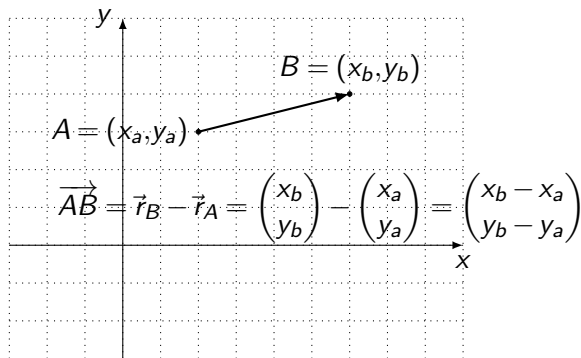
Suora xyz -
koordinaatistossa

Taso xyz -
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä



Suuntajanalla $\vec{AB}$ pisteestä A pisteeseen B on

- Pituus ja suunta, $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$,
- Alkupiste A , ja
- Lopupiste B .

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy -tasossa

Suora xyz -
koordinaatistossa

Taso xyz -
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Olkoon piste $P = (x, y)$ suoralla, jonka määrittävät piste

$P_0 = (x_0, y_0)$ ja vektori $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$.

Silloin on olemassa reaaliluku t niin, että

$$\overrightarrow{P_0 P} = t \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_x \\ y = y_0 + t \cdot u_y \end{cases}$$

parametrimuoto

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y}$$

koordinaattimuoto

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Kaava:
$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y}$$

Esimerkki. Määritä yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen (1,4) kautta ja on vektorin $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ suuntainen.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{3} &= \frac{y-4}{-1} \\ \Leftrightarrow x-1 &= -3y+12 \\ \Leftrightarrow x+3y &= 13 \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Olkoon piste $P = (x, y)$ suoralla, jonka määrittävät pisteet $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $P_1 = (x_1, y_1)$. Silloin vektori $\vec{u} = \overrightarrow{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ on suoran suuntainen ja suoran yhtälö on

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Kaava:
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Esimerkki. Määritä yhtälö suoralle, joka kulkee pisteiden (1,2) ja (5,3) kautta.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}\frac{x - 1}{5 - 1} &= \frac{y - 2}{3 - 2} \\ \Leftrightarrow x - 1 &= 4y - 8 \\ \Leftrightarrow x - 4y &= -7\end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Olkoon piste $P = (x, y, z)$ suoralla, jonka määrittävät piste

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ ja vektori } \vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}.$$

Silloin on olemassa reaaliluku t niin, että

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P} &= t \vec{u} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t u_x \\ t u_y \\ t u_z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{u_x} &= \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z} \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Kaava:
$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

Esimerkki. Määritä yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(-1, 2, 3)$ kautta ja on vektorin $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ suuntainen.

Ratkaisu:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Olkoon piste $P = (x, y)$ suoralla, jonka määrittävät pisteet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

Silloin vektori $\vec{u} = \overrightarrow{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$ on suoran suuntainen

ja suoran yhtälö on

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Kaava:
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Esimerkki. Määritä yhtälö suoralle, joka kulkee pisteiden $(1, 2, -3)$ ja $(4, 1, 1)$ kautta.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z+3}{-3-1} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = -3 - 4t \end{cases} &\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Olkoon piste $P = (x, y, z)$ tasossa, jonka määrittävät piste

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja vektorit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ ja $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$.

Silloin on olemassa reaalityöt t_1 ja t_2 niin, että

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} &= t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x &= x_0 &+& t_1 u_x &+& t_2 v_x \\ y &= y_0 &+& t_1 u_y &+& t_2 v_y \\ z &= z_0 &+& t_1 u_z &+& t_2 v_z \end{cases} \end{aligned}$$

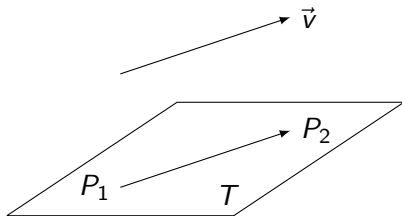
Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä



Jos T on taso, ja P_1 ja P_2 ovat tason T pisteitä, niin sanomme, että suuntajana $\overrightarrow{P_1P_2}$ on tasossa T .

Jos vektori $\vec{v}$ on yhtä pitkä ja saman suuntainen jonkun tasossa T olevan suuntajanan kanssa niin sanomme, että vektori $\vec{v}$ on tason T suuntainen.

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Lause 1. Olkoon $T(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ taso jonka määräävät piste P_0 ja vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$. Mitä tahansa tason kahta pistettä P_1 ja P_2 yhdistävä suuntajana $\overrightarrow{P_1P_2}$ voidaan lausua vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ monikertojen summana (lineaarikombinaationa)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}, \quad \text{joillakin } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Perustelu: On olemassa reaalityöt t_1, t_2, s_1 ja s_2 siten, että

$$\overrightarrow{P_0P_1} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{P_0P_2} = s_1\vec{u} + s_2\vec{v}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_0P_2} = -\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_0P_2} \\ &= -t_1\vec{u} - t_2\vec{v} + s_1\vec{u} + s_2\vec{v} = (s_1 - t_1)\vec{u} + (s_2 - t_2)\vec{v}. \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Normaali-vektori. Vektori $\vec{n}$ on tason $T(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ normaali-vektori, jos se on kohtisuorassa jokaista tason suuntaista vektoria vastaan.

Lause 2. Vektori $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ on tason $T(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ normaali-vektori.

Todistus: Olkoon $\vec{w} = c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v}$ tason T suuntainen vektori. Koska ristitulon määritelmän mukaan $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ on kohtisuorassa $\vec{u}$:tä vastaan ja kohtisuorassa $\vec{v}$:tä vastaan. silloin

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v}) = c_1 \vec{n} \cdot \vec{u} + c_2 \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Lause 3. Olkoot $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi tason $T(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ suuntaista, mutta keskenään eri suuntaista, ei-triviaalia vektoria.¹⁾ Silloin vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ on tason T normaali-vektori.

Perustelu: Vektorit voidaan esittää muodossa

$$\vec{a} = t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} \quad \text{ja} \quad \vec{b} = s_1 \vec{u} + s_2 \vec{v}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v}) \times (s_1 \vec{u} + s_2 \vec{v}) \\ &= t_1 s_1 \vec{u} \times \vec{u} + t_1 s_2 \vec{u} \times \vec{v} + t_2 s_1 \vec{v} \times \vec{u} + t_2 s_2 \vec{v} \times \vec{v} \\ &= (t_1 s_2 - t_2 s_1) \vec{u} \times \vec{v}. \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Lause 4. Olkoon $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ tason $T(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ normaali-vektori. Sillon tason pisteen $P = (x, y, z)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön

$$Ax + By + Cz = D, \quad \text{missä} \quad D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Perustelu. Tason normaali-vektori ja tason suuntainen vektori $\overrightarrow{P_0P}$ ovat kohtisuorassa, joten

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Aiemmin annettu määritelmä asetti kahden vektorin ristitulon seuraavasti

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \times (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \\
 &= (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k} \\
 &= \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \vec{k} \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Esimerkki. Olkoot tasossa T pisteet $P_0 = (12,0,2)$, $P_1 = (2,10,3)$ ja $P_2 = (25,15,4)$. Tason suuntavektoreiksi voidaan nyt valita

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10 & 10 & 1 \\ 13 & 15 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 33\vec{j} - 280\vec{k}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Tason yhtälö on nyt

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 33y - 280z = 5 \cdot 12 + 33 \cdot 0 - 280 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 5x + 33y - 280z = -500$$

Lasketaan vielä tason 'vinous' eli sen normaalivektorin ja pystyvektorin $\vec{k}$ välinen kulma.

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossa

Taso xyz-
koordinaatistossa

Tason koordinaat-
timuotoinen
yhtälö

Ristitulo
determinantin
avulla

Esimerkki tason
yhtälöstä

Esimerkki. Miten vino on edellä määritetty taso? Olkoon α normaalivektorin $-\vec{n} = -5\vec{i} - 33\vec{j} + 280\vec{k}$ ja pystyvektorin $\vec{k}$ välinen kulma. Silloin

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{280}{\sqrt{5^2 + 33^2 + 280^2} \cdot 1}$$
$$\rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{280}{\sqrt{79514}} \right) = 6,797712^\circ \approx 6,8^\circ$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä

Missä pisteessä suora $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ leikkaa tason $2x + 4y + 5z = 12$? Viedään ensin suoran yhtälö parametrimuotoon

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Suoran ja tason leikkauspiste toteuttaa kummankin yhtälön. Se on siis suoran piste joka saadaan sellaisella parametrin t arvolla, että vastaavan suoran pisteen koordinaatit toteuttavat tason yhtälön. Siis

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in T &\Leftrightarrow (1+2t, -3+t, 2-t) \in T \\ &\Leftrightarrow 2(1+2t) + 4(-3+t) + 5(2-t) = 12 \Leftrightarrow t = 4 \\ &\longrightarrow (x,y,z) = (1+2 \cdot 4, -3+4, 2-4) = (9, 1, -2) \end{aligned}$$

Aiheet

Piste ja
Paikkavektori

Suuntajana

Suora xy-tasossa

Suora xyz-
koordinaatistossaTaso xyz-
koordinaatistossaTason koordinaat-
timuotoinen
yhtälöRistitulo
determinantin
avullaEsimerkki tason
yhtälöstä