

1 TRIGONOMETRIA JA VEKTOREITA

la1-trigonometriaa

1.1 Trigonometriset funktiot

Sec:la1-TrigFunc

1.1.1 Kulmayksiköistä

Aste, 1° (engl. degree) Kun kellon viisari kiertyy yhden kierroksen, sanomme, että se kääntyy 360° (360 astetta). Ajatus täyden kierroksen jakamisesta 360 asteeseen, juontaa kaldealaiseen astrologiaan. Yhdessä vuorokaudessa aurinko siirtyy noin yhden asteen tähtikuvioiden joukossa. Oikeastaan täysi kierros tulisi jakaa 365 osaan, mutta sekään ei karkausvuosien takia anna täysin oikeata jakoa. 360 jako-osien määränä on käytännöllinen, koska se on helppo jakaa pienempiin osiin. Yksi aste jaetaan 60 kulmaminuuttiin ($1^\circ = 60'$) ja yksi kulmaminuutti jaetaan 60 kulmasekuntiin ($1' = 60''$). Siis aurinko kiertää yhden kulmaminuutin kulman 24 minuutissa, ja yhden kulmasekunnin kulman 24 sekunnissa.

Gradiaani, grad, eli gooni (engl. grad, ransk grade, saks. gon, ruots. gon) on $1/400$ täydestä kierroksesta.

grad, grade [1], gradian, or gon (1^g or gr or grd) is a unit of angle measurement equal to $1/400$ circle, 0.01 right angle, 0.9° , or $54'$. This unit was introduced in France, where it is called the grade, in the early years of the metric system. The grad is the English version, apparently introduced by engineers around 1900. The name gon is used for this unit in German, Swedish, and other northern European languages in which the word grad means degree. Although many calculators will display angle measurements in grads as well as degrees or radians, it is difficult to find actual applications of the grad today. ¹

Radiaani, rad, on kulman ympyrästä erottaman kaaren pituuden suhde ympyrän säteeseen (kun ympyrän keskipiste on kulman kärjessä). Täysi kierros on silloin 2π radiaania. Suorakulma on $\frac{\pi}{2}$ rad.

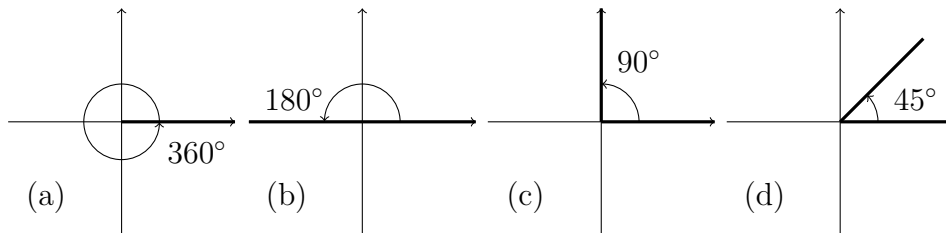
Piiru, Kompassipiiru on $1/32$ täydestä kierroksesta. Siis 1 piiru = $11,25^\circ$. Kompassipiiru näkyy edelleen merenkulun säädöksissä.

Tykistön piiru on karkeasti se kulma, jossa metrin kokoinen esine näkyy kilometrin päästä katsottuna. Siis täysi kierros on noin $1000 \cdot 2\pi$ piirua $\approx 6283,2$ piirua. Eri armeijat jakavat täyden kierroksen piiruiksi hiukan eri tavoin. Täysi kierros on 6000 piirua (venäjä), 6300 piirua (Ruotsi) tai 6400 piirua (Nato). Suomessa ollaan siirtymässä venäläisestä piirusta nato-piiruun.

¹ <http://www.unc.edu/~rowlett/units/dictG.html>

$$360^\circ = 400 \text{ grad} = 2\pi \text{ rad} = 6400 \text{ piirua}$$

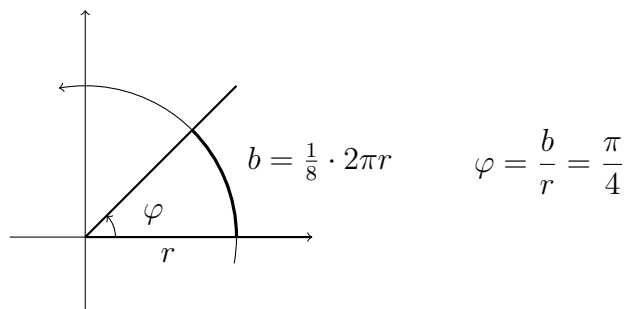
Kun tiedämme, mitä täysi kierros on valitussa kulma-asteikossa, niin *oikokulma* on $1/2$ täydestä kierroksesta ($180^\circ = 200 \text{ grad} = \pi \text{ rad} = 3200 \text{ piirua}$), ja *suorakulma* on $1/4$ täydestä kierroksesta ($90^\circ = 100 \text{ grad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1600 \text{ piirua}$).



Kuva 1.1: (a) täysi kierros 2π , (b) oikokulma π , (c) suora kulma $\pi/2$, (d) suoran kulman puolikas $\pi/4$.

Kulma α on *terävä*, jos $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ($0 \leq \alpha < \pi/2$). Kulma α on *tylppä*, jos $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\pi/2 < \alpha < \pi$).

Radiaani-kulmayksikkö ”rad” kirjoitetaan näkyviin, jos halutaan lukijan varmasti tietävän missä yksiköissä kulma on ilmaistu. Jos käytetty yksikkö on asiayhteydestä selvä, niin silloin ”rad” jätetään pois. Tämä ei ole virhe, sillä kulma radiaaneissa on kaaren pituus jaettuna säteen pituudella, ja tämä laskutoimitus antaa tulokseksi paljaan luvun.



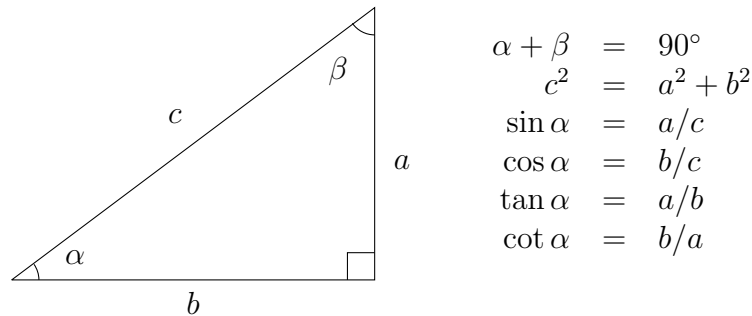
Kuva 1.2: Täyden kierroksen kahdeksas osa radiaaneina.

Tällä kurssilla käytetään kulmayksikkönä joko astetta tai radiaania. (Piiru voi jossakin erikoistilanteessa esiintyä, mutta gradia emme käytä koskaan. Opettele omassa laskimessasi tarkistamaan laskimen kulmayksikkö-asetus ja tarvittaessa muuttamaan se. Kokeessa ei nyt väärän vastauksen selitykseksi kelpaa, että ”Tein kyllä kaiken oikein, mutta laskimessa oli-kin grad-asetus päällä.”)

1.1.2 Suorakulmainen kolmio

Suorakulmainen kolmio on koulusta tuttu kolmio, jonka yksi kulma on suora (90° , tai $\pi/2$ rad). Käytämme seuraavassa melko laajasti vakiintuneita merkintäperiaatteita:

- Kolmion kulmia merkitsemme kreikkalaisin kirjaimin α , β , γ , jne. Suoraa kulmaa ei aina merkitä kirjaimella, vaan se merkitään kuvaan pienellä neliöllä.
- Kolmion sivuja ja sivujen pituuksia merkitsemme tavallisin kirjaimin a , b , c , jne.
- Ensimmäisessä kuvassa kulmaa α vastassa on sivu a , kulmaa β vastassa on sivu b jne. Kun ensimmäistä kuvaa analysoidaan jakamalla kolmioita pienempiin osiin, joudutaan tästä periaatteesta yleensä luopumaan.
- Suoran kulman kyljet ovat kateetit a ja b , ja suoraa kulmaa vastassa on hypotenuusa c .



Kuva 1.3: Suorakulmainen kolmio.

Fig:laSKkolm

Suorakulmaisen kolmion terävälle kulmalle määritellään seuraavat trigonometriset funktiot (ks kuva 1.3):

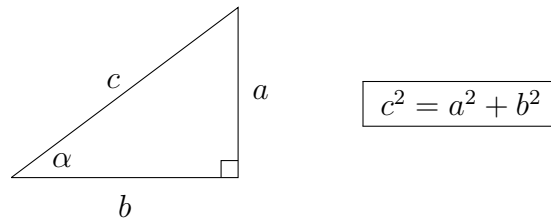
Sini = vastainen kateetti jaettuna hypotenuusalla $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

Kosini = viereinen kateetti jaettuna hypotenuusalla $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Tangentti = vastainen kateetti jaettuna viereisellä kateetilla $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Kotangentti = viereinen kateetti jaettuna vastaisella kateetilla $\cot \alpha = \frac{b}{a}$

Funktioiden arvot eivät riipu kolmion suuruudesta. Pienessä ja suuressa suhteet ovat samat.



Lause 1.1.1. (Pythagoran lause) Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summa.

Seuraavassa lauseessa ja tästä eteenpäin muutenkin merkinnällä $\sin^2 \alpha$ tarkoitetaan lauseketta $(\sin \alpha)^2$. Merkitätapa on aiemmin ollut välttämätön, kun on käsitelty pitkiä trigonometrisia sarjakehitelmiä. Muussa yhteydessä merkintä tuntuu aluksi epäloogiselta, mutta siihen tottuu nopeasti, ja sitä on syytä osata käyttää.

Lause 1.1.2. (Seuraus Pythagoran lauseesta) Jos α on terävä kulma, niin

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

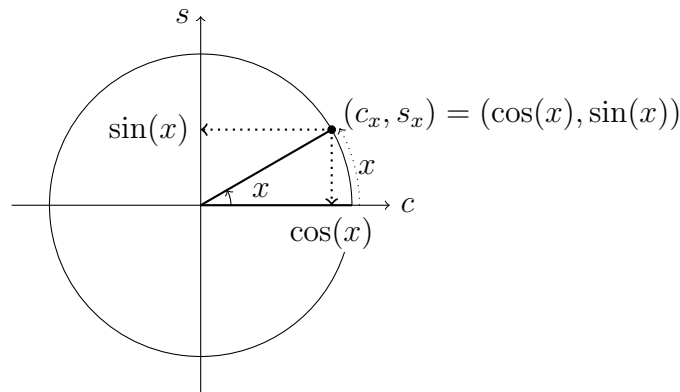
Perustelu: Tarkastellaan mitä tahansa suorakulmaista kolmiota, jossa kulma α on terävänä kulmana. Nimitetään kolmion sivut ja muut kulmat tavalliseen tapaan. Silloin $a = c \cdot \sin \alpha$ ja $b = c \cdot \cos \alpha$ ja Pythagoran lauseen mukaan

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow (c \cdot \sin \alpha)^2 + (c \cdot \cos \alpha)^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1. \quad \square \end{aligned}$$

1.1.3 Trigonometriset funktiot

Edellä kulma α oli suorakulmaisen kolmion terävä kulma, joten tähän mennessä $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ on määritelty vain, kun $0 \leq \alpha < \pi/2$. Seuraavaksi määrittelemme, mitä $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ ja $\cot(x)$ ovat, kun x on mikä tahansa reaaliluku ($x \in \mathbb{R}$). Tämän kappaleen merkinnät (x ja sulut sen ympärillä) korostavat trigonometristen funktioiden funktio-luonnetta. Myöhemmin x korvautuu taas muilla kirjaimilla ja sulut jäävät pois.

Piirretään (c, s) -koordinaatisto ja sen päälle origokeskinen yksikköympyrä. c -akseli osoittaa vaakasuoraan oikealle ja s -akseli osoittaa ylöspäin. (Käytämme nyt c - ja s -akseleita, koska muuttuja x on varattu kulmalle.) Piirretään koordinaatistoon yksikköympyrä $c^2 + s^2 = 1$ ja piirretään koordinaatistoon 0-kulma niin, että kulman kärki on origossa ja kulman kumpikin kylki on positiivisella c -akselilla. Avataan kulmaa kääntämällä vasenta kylkeä niin, että vasemman kyljen ja ympyrän kehän leikkauspiste, eli kehäpiste, liikkuu kehää pitkin positiiviseen suuntaan matkan x . Silloin kulman suuruus on x radiaania.


 Kuva 1.4: Kulman x kehäpisteen koordinaatit.

Kulman vasen kylki leikkaa yksikköympyrän kehän kehä-pisteessä (c_x, s_x) . Kehäpisteen s -koordinaattia sanomme kulman x siniksi, ja käytämme sille merkintää

$$\sin x,$$

ja kehäpisteen c -koordinaattia sanomme kulman x kosiniksi, ja käytämme sille merkintää

$$\cos x.$$

Sinin arvo, eli kehäpisteen s -koordinaatti, ja kosinin arvo, eli kehäpisteen c -koordinaatti, riippuvat kulman suuruudesta x . Näin saamme funktiot

$$x \mapsto \sin(x), \quad \text{ja} \quad x \mapsto \cos(x).$$

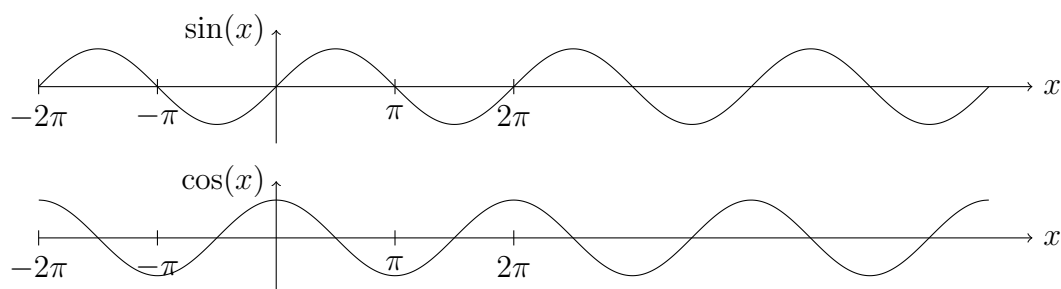
Funktioiden $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ arvot on nyt määritelty kahdella erilaisella tavalla: (1) käyttäen suorakulmaista kolmiota ja (2) käyttäen yksikköympyrää. Kun kulma x on terävä, eli $0 \leq x \leq \pi/2$, niin kumpikin määritelmä antaa saman arvon sinille, ja kumpikin määritelmä antaa saman arvon kosinille.

Yksikköympyrän avulla sinille ja kosinille saadaan arvot myös silloin, kun x on suurempi kuin suora kulma. Silloin kehäpiste kulkee kehällä enemmän kuin neljänneskierroksen. Kulma x voi olla miten suuri tahansa. Tarvittaessa kehäpiste kiertää kehän vaikka useampaan kertaan kulkiessaan matkan x . Kulma x voi myös olla negatiivinen. Silloin kehäpiste lähtee liikkeelle päinvastaiseen suuntaan, myötäpäivään.

Nyt voimme sanoa, että sini- ja kosinifunktiot on määritelty kaikilla x :n reaaliarvoilla. Kuvassa 1.5 on funktioiden kuvaajat. Samoin voimme määritellä tangentti- ja kotangenttifunktioiden arvot

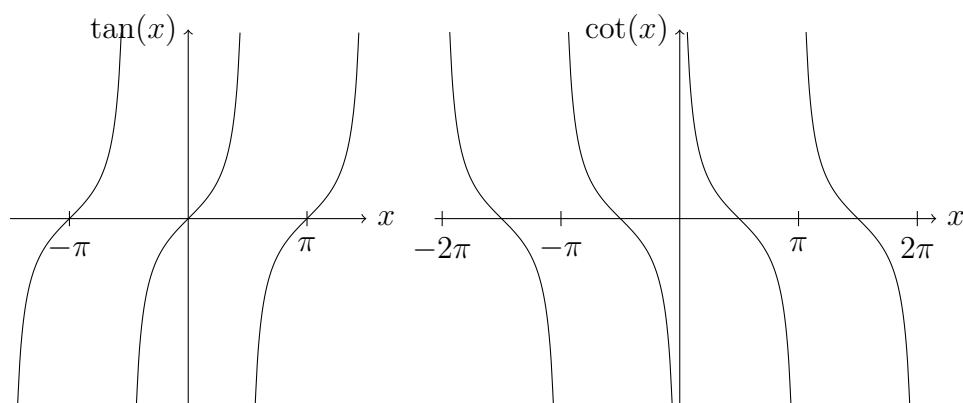
$$\begin{aligned} \tan(x) &= \sin(x)/\cos(x), & \text{kun } x \neq \pi/2 + n \cdot \pi, & \text{ja} \\ \cot(x) &= \cos(x)/\sin(x), & \text{kun } x \neq n \cdot \pi. & \end{aligned}$$

Tangentin ja kotangentin arvoja emme siis määrittele kaikilla x :n reaaliarvoilla. Kuvassa 1.6 on näiden funktioiden kuvaajat.



Kuva 1.5: Sini- ja kosini-funktioiden kuvaajat.

laFig:SinCos



Kuva 1.6: tangentti- ja kotangentti-funktioiden kuvaajat.

laFig:TanCot

Kun kulmaa kasvatetaan arvosta x arvoon $x + 2\pi$, kulmaa vastaava kehäpiste kiertää yhden täyden kierroksen ja lopussa kehäpiste on samassa paikassa, josta se lähti. Siis

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \text{ja} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x). \quad (1.1)$$

Sanomme, että sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia, perusjaksona 2π . Myös perusjakson kokonaislukumonikerrat ovat jaksoja ($\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin(x)$). Tangentti ja kotangentti ovat jaksollisia perusjaksona π .

Yksikköympyrän avulla on helppo nähdä, että myös seuraavat kaavat ovat tosia kaikilla x :n arvoilla:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1, \quad \text{ja} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad (1.2) \quad \text{TrigEq02}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \text{ja} \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad (1.3) \quad \text{TrigEq03}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \text{ja} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x). \quad (1.4) \quad \text{TrigEq04}$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x), \quad \text{ja} \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin(x). \quad (1.5) \quad \text{TrigEq05}$$

Kaavan (1.3) kohdalla sanomme usein, että sinifunktio on pariton,² ja kosinifunktio on pa-

²Parittomalle funktiolle on voimassa $f(-x) = -f(x)$. Tämä on tyypillistä parittomalle potenssifunktiolle, kuten $f(x) = x^3$.

rillinen.³ Kaava (1.4) merkitsee samaa, kuin aiemmin tekemämme sopimukset (1.8) ja (1.9). Sopimukset olivat siis viisaasti valitut (ainoat järkevät). Usein tarvitsemme summakulman sinin ja kosinin kaavoja:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad (1.6)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (1.7)$$

Trigonometrisille funktioille voidaan keksiä paljon kaavoja, joita emme nyt ryhdy luettelemaan. Kaavat löytyvät kaava-liitteestä ?? sivu ??.

1.1.4 Arcus-funktiot

Sini- ja kosinifunktiot ovat jatkuvia, mutta eivät monotonisia. Siksi niillä ei ole käänteisfunktioita (yleisessä merkityksessä). Kun sinifunktion määrittelyjoukko rajoitetaan väliksi $I_n = [-\pi/2 + n \cdot \pi, \pi/2 + n \cdot \pi]$, niin sinin käänteisfunktio löytyy. Kun kosinifunktion määrittelyjoukko rajoitetaan väliksi $J_n = [0 + n \cdot \pi, \pi + n \cdot \pi]$, niin kosinin käänteisfunktio löytyy.

Tangenttifunktio on epäjatkuva kohdissa $x = \pi/2 + n \cdot \pi$, mutta se on monotoninen (kasvava) väleillä I_n . Kotangenttifunktio on epäjatkuva kohdissa $x = n \cdot \pi$, mutta se on monotoninen (vähenevä) väleillä J_n .

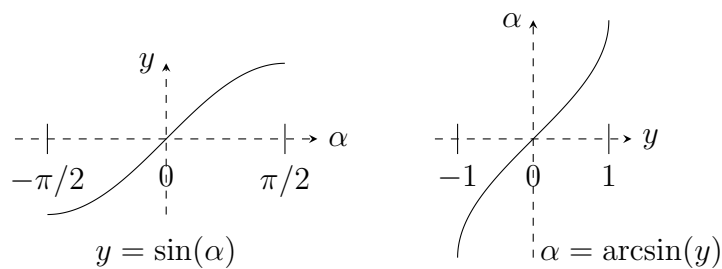
Määritelmä 1.1.3. Tässä luentosarjassa määrittelemme funktiot arcsin, arccos, arctan ja arccot väleille $I_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja $J_0 = [0, \pi]$ rajoitettujen trigonometristen funktioiden käänteisfunktioina seuraavasti:

funktio	käänteisfunktio
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
$\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cot : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$	$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$

Usein kirjoissa käytetään arcus-funktioiden paikalla käänteisfunktio-merkintää ($\arcsin \sim \sin^{-1}$). Tämä on oikein ja perusteltua, jos kirjassa on trigonometriset funktiot määritellyt kompleksimuuttujan kompleksiarvoisina funktioina. Silloin funktioteorian ja Riemannin pintojen avulla käänteisfunktio voidaan määritellä hyvin. Tässä kurssissa ei käsitellä Riemannin pintoja joten sovimme, että tässä materiaalissa arcsin ja arctan saavat arvon väliltä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja arccos ja arccot saavat arvon väliltä $[0, \pi]$.

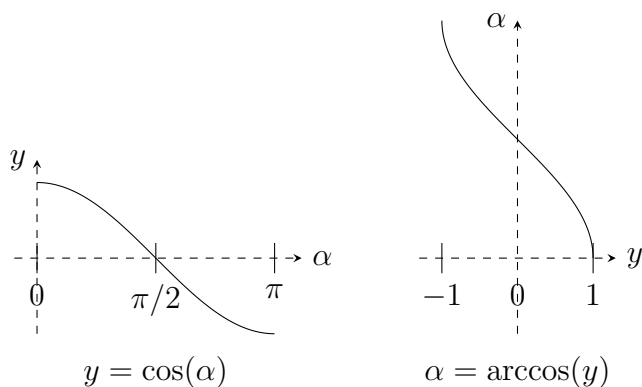
Esimerkki 1.1.4. Laske pisteiden $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (-2, -1)$ paikkavektoreiden ja x -akselin väliset kulmat.

³Parilliselle funktiolle on voimassa $f(-x) = f(x)$. Tämä on tyypillistä parilliselle potenssifunktiolle, kuten $f(x) = x^2$.



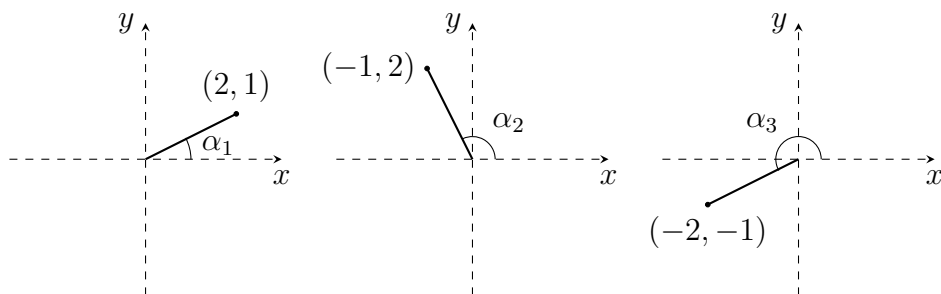
Kuva 1.7: Sini- ja arcus-sini -funktioiden kuvaajat.

laFig:SinArcsin



Kuva 1.8: Kosini- ja arcus-kosini -funktioiden kuvaajat.

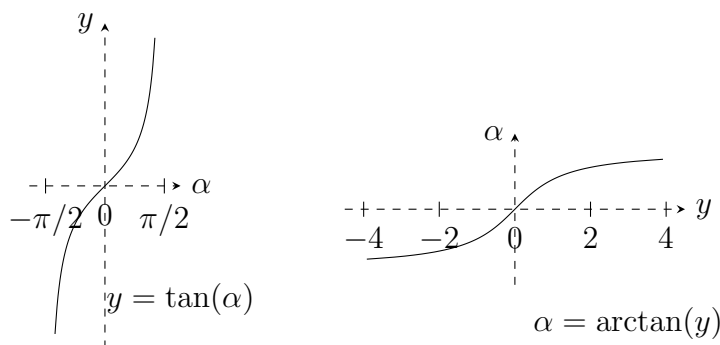
laFig:CosArccos



Periaatteessa tehtävä on helppo, sillä

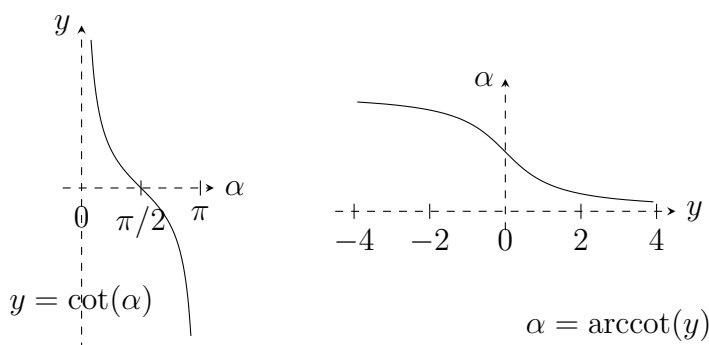
$$\tan \alpha_k = \frac{y_k}{x_k} \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \arctan\left(\frac{y_k}{x_k}\right) + n \cdot \pi.$$

Nyt tulee laskijan kuitenkin muistaa, että laskin antaa $\arctan$ -funktion arvon aina väliltä $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, joten laskijan tulee lisätä laskimen antamaan kulmaan π laskiessaan kulmia α_2 ja α_3 mutta ei tule lisätä laskimen antamaan arvoon mitään laskiessaan kulmaa



Kuva 1.9: Tangentti- ja arcus-tangentti -funktioiden kuvaajat.

laFig:TanArc



Kuva 1.10: Kotangentti- ja arcus-kotangentti -funktioiden kuvaajat.

laFig:KotanA

 α_1 . Siis

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.46365(\text{rad}) = 26.565^\circ \\ \alpha_2 &= \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + \pi = 2.03444(\text{rad}) = 116.565^\circ \\ \alpha_3 &= \arctan\left(\frac{-1}{-2}\right) + \pi = 3.60524(\text{rad}) = 206.565^\circ\end{aligned}$$

Johtopäätös esimerkin perusteella

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{kun } x \geq 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

 $\dagger$

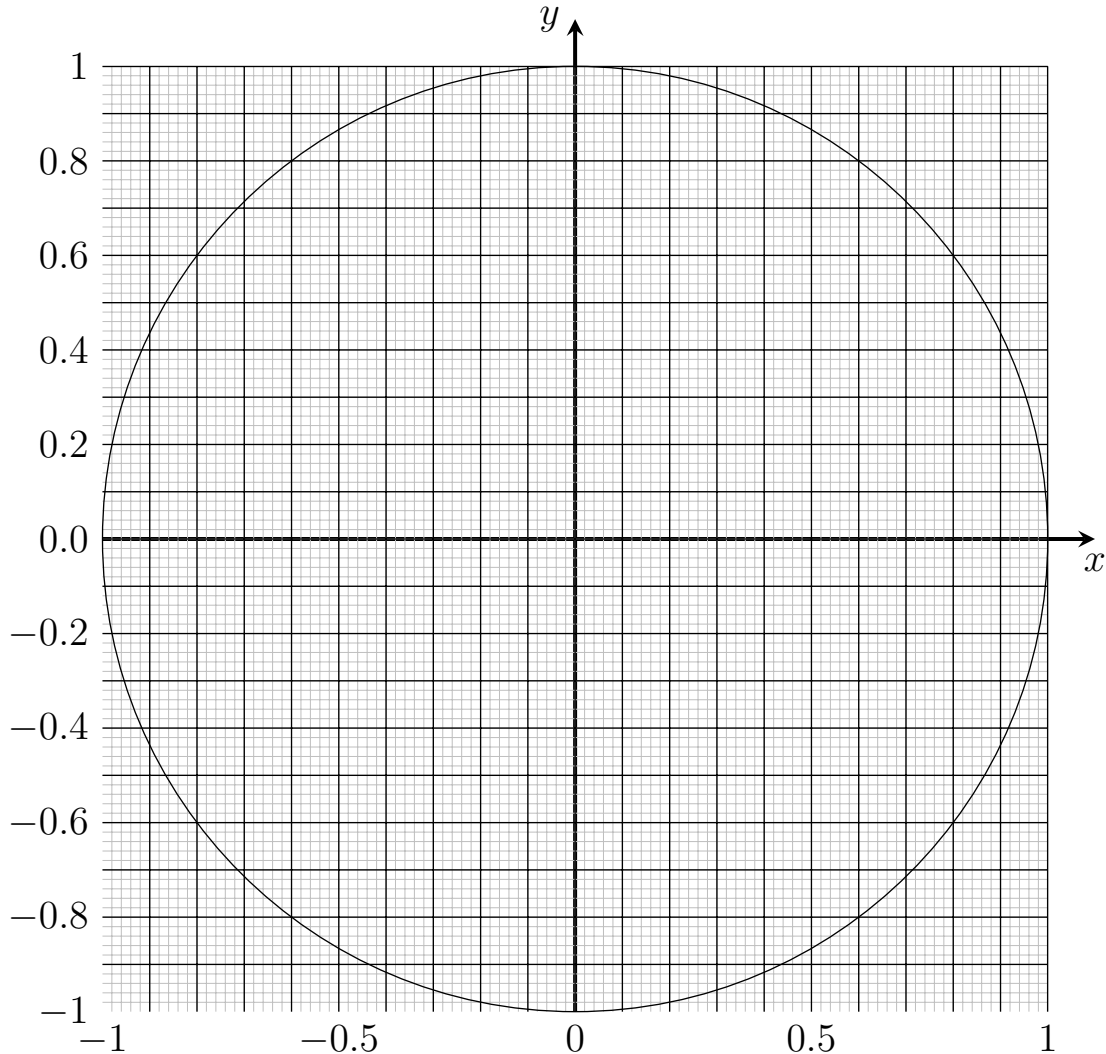
1.1.5 Harjoituksia (3)

ktiot-Harjoituksia

Tehtävä 1.1 Ratkaise laskimen avulla kulma x yhtälöstä $\sin(x) = 0.825$. Anna vastaus radiaaneina.

Tehtävä 1.2 Mikä on se tylppä kulma x , ($\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$), jolle $\sin(x) = 0.825$. Anna vastaus sekä radiaaneina, että asteina.

Tehtävä 1.3 Piirrä kuvaan ^{fig:TrigVektoritHarYmpyral}1.11 se tylppä kulma x , jolle $\sin(x) = 0.825$.



Kuva 1.11: Yksikköympyrä.

fig:TrigVektoritHa

1.2 Kolmiot

:la1-kolmiot

1.2.1 Kolmiolauseet

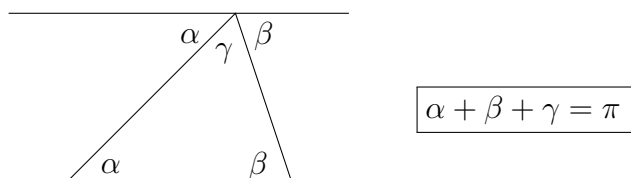
Tässä kappaleessa kolmion ei tarvitse olla suorakulmainen, ellei erikseen niin sanota. Koska kolmiossa voi olla tylppä kulma, sovimme tylpän kulman sinille ja kosinille seuraavat

sopimukset:

$$\text{jos } \pi/2 \leq \alpha \leq \pi, \text{ niin } \sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha), \quad (1.8) \quad \text{EqSinTyIp}$$

$$\text{jos } \pi/2 \leq \alpha \leq \pi, \text{ niin } \cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha). \quad (1.9) \quad \text{EqCosTyIp}$$

Lause 1.2.1. Kolmion kulmien summa on π (eli 180°).

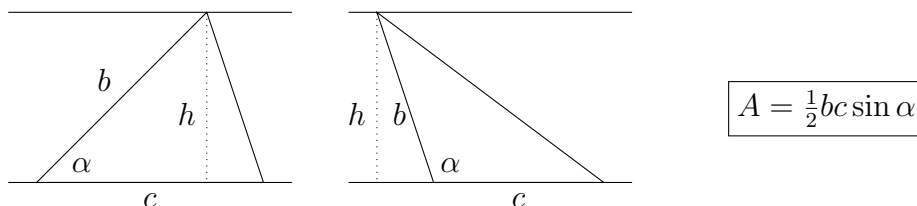


Perustelu: Kuvan mukaisesti kolmion huipun kautta piirretään kannan suuntainen suora. Kun nyt kolmion vasen kylki leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, ovat syntyvät ristikulmat yhtäsuuret. Kolmion kantakulmaa α vastaava ristikulma on myös suuruudeltaan α . Vastaavasti kantakulmaa β vastaava ristikulma on myös suuruudeltaan β . Huipun kohdalle syntyvä kolmen kulman summa on oikokulma.

Lause 1.2.2. (Seuraus edellisestä) Jos kolmiossa on tylppä kulma ($> \pi/2$), niin muut kaksi kulmaa ovat teräviä ($< \pi/2$).

Lause 1.2.3. Kolmion ala on puolet kahden sivun pituuksien ja niiden välisen kulman sinin tulosta. (Kaavana: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$)

Th:kolmionala



Perustelu: Kuvan mukaisesti kolmion huipun kautta piirretään kannan suuntainen suora. Piirretyn suoran ja kannan välinen etäisyys on kolmion korkeus h . Olkoon α kannan c ja kyljen b välinen kulma. Silloin kolmion korkeus on $h = b \sin(\alpha)$. Kolmion pinta-ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta, eli

$$A = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

□

Lause 1.2.4. Sinilause:

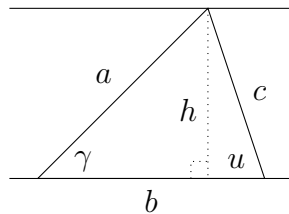
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Perustelu: Lauseen [Th:kolmionala](#) 1.2.3 mukaan kolmion kaksinkertainen pinta-ala voidaan laskea seuraavilla tavoilla: $bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma$. Väite seuraa, kun lausekkeet jaetaan abc :lla ja siirrytään käänteislausekkeisiin. □

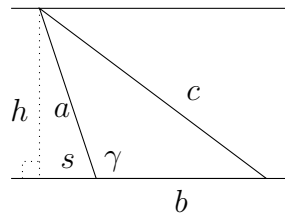
Lause 1.2.5. Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Perustelu:



Tapaus: "Terävä γ "
 $b - u = a \cos \gamma$



Tapaus: "Tylppä γ "
 $s = -a \cos \gamma$

Yllä olevien kuvien merkinnöin:

Jos γ on terävä, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + u^2 \\ &= a^2 - (b - u)^2 + u^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2bu \\ &= a^2 + b^2 - 2b(b - u) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Jos γ on tylppä, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 - s^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2bs \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

□

1.3 Vektorit

la1-Vektorit

Opiskelija on jo koulussa käsitellyt tason ja avaruuden koordinaatistoja, mutta koulussa asia yleensä yksinkertaistetaan äärimmilleen niin, että syntyy mielikuva siitä, että on olemassa vain yksi koordinaatisto.

1.3.0 Tavallinen tason (x, y) -koordinaatisto

Koordinaatisto asetetaan siten, että x -akseli on vaakasuora, asteikko kasvaa oikealle, ja y -akseli on pystysuora, asteikko kasvaa ylöspäin. Akselit ovat siis kohtisuorassa. Akselit leikkaavat asteikkojen nollakohdissa. akselien leikkauspistettä sanomme origoksi.

Jos tason pisteen P kautta piirretty pystysuora leikka x -akselin kohdassa x_P , ja pisteen P kautta piirretty vaakasuora leikka y -akselin korkeudella y_P niin sanomme, että piste on