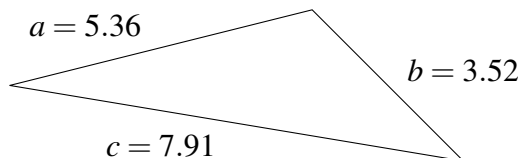


Lineaarialgebra I, MATHC.1230

Kertaustehtäviä, Torstaina 8.2.2018 klo 10-12 (F141)

1. Tutkitaan oheisen kuvan kolmiota. Laske kolmion kulmat. (Ohje: ”kosinilause”.) Anna kulmat sekä asteissa että radiaaneina. Tarkista, että $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi(\text{rad})$.



2. a) Olkoon $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Laske vektoreiden pituudet ja niiden välinen kulma. Ovatko vektorit keskenään kohtisuorassa?

b) Määritä vektori $\vec{v}$, jolle $|\vec{v}| = 1$, $\vec{v} \perp \vec{u}$ ja $\vec{v} \perp \vec{w}$.

3. Olkoon $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

a) Laske $u = \vec{a} \cdot \vec{b}$ b) Laske $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 5y = 23 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

6. Laske matriisitulot $\mathbf{AB}$ ja $\mathbf{B}^T \mathbf{A}$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Laske determinantit $\text{Det}(\mathbf{Q})$ ja $\text{Det}(\mathbf{W})$ kun

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2.5 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Laske determinantti matriisille

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ k & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

9. Laske käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. Muodosta yhtälö tasolle, joka sisältää pisteet $P_1 = (2, 0, 3)$, $P_2 = (4, 1, 5)$ ja $P_3 = (5, -3, 4)$.

11. Missä pisteessä avaruuden suora

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

leikkaa tason

$$x + 3y + 5z = 15$$

12. Laske seuraavat lausekkeet

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (2+5i) + (1-3i), \quad \text{b)} & (2+5i) \cdot (1-3i), \\ \text{c)} & (2+5i)^2 \quad \text{d)} & \frac{(2+5i)}{(1-3i)}. \end{array}$$

13. a) Esitä summamuodossa kompleksiluvut $z_1 = 4\angle 60^\circ$ ja $z_2 = 2\angle -90^\circ$

b) Esitä kulmamuodossa kompleksiluvut $z_3 = -2 + 2i$ ja $z_4 = 1 - i$.

14. Olkoon $z_1 = 6\angle 60^\circ$, $z_2 = 2\angle 120^\circ$. Laske seuraavat kompleksisten lausekkeiden arvot

$$\text{a)} \quad z_1 \cdot z_2, \quad \text{b)} \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{c)} \quad z_1 + z_2, \quad \text{d)} \quad z_2^4,$$

15. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + 3z_2 = i \\ 2z_1 + (2-i)z_2 = 0 \end{cases}$$

Kaavoja:

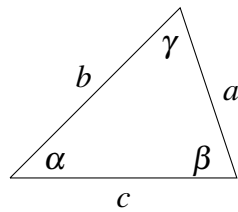
vektorin $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ pituus on $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Olkoon $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ ja vektoreiden välinen kulma γ . Silloin

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \\ \text{ja } |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma \end{aligned}$$

Jos vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma on γ , niin

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \sin \gamma = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Sinilause

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kosinilause

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Jos $z = x + yi = r \angle \varphi = r e^{i\varphi}$, niin

$$x = r \cos \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

(Huom. Tarkista kulma φ piirroksella ja tarvittaessa lisää/vähennä 180° laskimen antamaan tulokseen.)

Jos $z_1 = r_1 \angle \varphi_1$ ja $z_2 = r_2 \angle \varphi_2$, niin

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$z_1^n = r_1^n \angle (n\varphi_1)$$