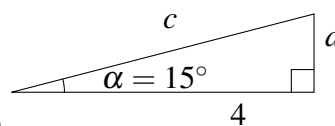


# Lineaarialgebra I, MATHC.1230

## 1. harjoitus, (viikko 3, 16.1.–17.1.2018)

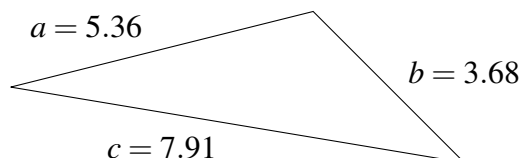
|     |    |       |      |
|-----|----|-------|------|
| R01 | ti | 10-12 | F453 |
| R02 | ke | 08-10 | F453 |



1. Tutkitaan viereisen kuvan suorakulmaista kolmiota

Laske sivujen  $a$  ja  $c$  pituudet ja kaikkien kulmien suuruudet.

2. Tutkitaan oheisen kuvan kolmiota. Laske kolmion kulmat. (Ohje: ”kosinilause”.) Anna kulmat sekä asteissa että radiaaneina. Tarkista, että  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi(\text{rad})$ .



3. Olkoon  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  ja  $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{k}$ . Laske vektoreiden pituudet ja niiden välinen kulma. Ovatko vektorit keskenään kohtisuorassa?

4. Tarkastellaan tasovektoreita  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  ja  $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j}$ .

a) Piirrä  $(x, y)$ -koordinaatistoon vektorit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

b) Laske vektoreiden  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  välinen kulma. Vertaa tulosta edellisen tehtävän kuvaan. Onko tulos uskottava?

5. Olkoon  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$  ja  $\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{k}$ .

a) Piirrä vektorit  $\vec{u}$  ja  $\vec{v}$  koordinaatistoon ( $xyz$ - eli  $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ -koordinaatisto)

b) Laske vektoreiden  $\vec{u}$  ja  $\vec{v}$  välisen kulman suuruus.

c) Onko laskemalla saatu arvo kuvan perusteella uskottava?

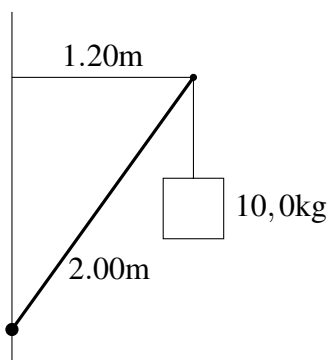
6. Olkoon  $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  ja  $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

a) Laske  $u = \vec{a} \cdot \vec{b}$       b) Laske  $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$       c) Mikä ero on  $u$ :lla ja  $\vec{v}$ :llä?

7. Metallitanko (pituus 2.00m) on kiinnitetty alapäästään saranalla seinään. Tangon yläpään ja seinän välissä on vaakasuorassa 1.20m pitkä vaijeri. Tangon yläpäähän ripustetaan 10.0kg:n massa, jolloin alaspäin suuntautuva gravitaatiovoima (paino) on 98.1N.

a) Miten suuri on tangossa vaikuttava tukivoima (puristus vai vetoa)?

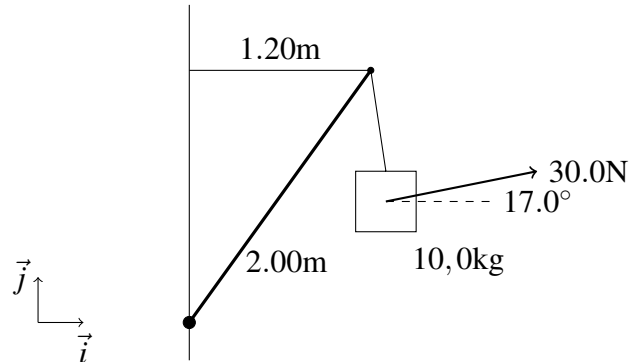
b) Miten suuri on vaijerissa vaikuttava tukivoima (puristus vai veto)?



8. Lapsi kiinnittää edellisen tehtävän metallitangosta riippuvaan massaan narun, ja kiskoo massaa 30,0N:n voimalla suuntaan joka muodostaa  $17,0^\circ$  kulman vaakatason kanssa. Kaikki voimat ovat samassa  $(\vec{i}, \vec{j})$ -tasossa. (Vektori  $\vec{i}$  on seinän normaali, ja vektori  $\vec{j}$  on seinän ja tangon kosketuspisteen ja seinän ja vaijerin kiinnityspisteen määrittämän suuntajanan suuntainen.)

a) Miten suuri on nyt tangossa vaikuttava tukivoima (puristus vai vetoa)?

b) Miten suuri on nyt vaijerissa vaikuttava tukivoima (puristus vai veto)?



### Kaavoja:

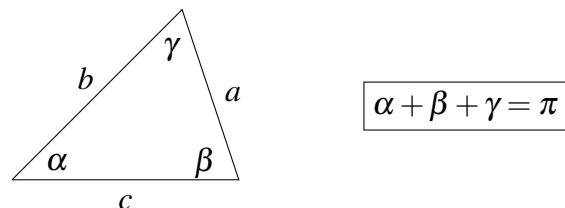
vektorin  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  pituus on  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

Olkoon  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  ja vektoreiden välinen kulma  $\gamma$ . Silloin

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \\ \text{ja } |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma\end{aligned}$$

Jos vektoreiden  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  välinen kulma on  $\gamma$ , niin

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \sin \gamma = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



Pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Sinilause

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kosinilause

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$