

har:LinYryhmat03

Tehtävä 2.3 Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät

$$(a) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 16 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + + z = 14 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 16 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + + z = 14 \end{cases}.$$

Tehtävä 2.4 Ratkaise tehtävien 2.1.4–2.1.4 Octavella. Katso ensin esimerkit ??-?? ja tarkista Octaven antamat vastausehdotukset.

tarkista viittausta
niikka

2.2 Matriisit

Sec:la1-Matriisit

2.2.1 Matriisi ja matriisilaskut

Sec:la1-MatLaskut

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (x_1 \ x_2 \ x_3) \text{ ja } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matriiseihin perehtyminen voidaan perustella useilla järkisyillä.

1. Matriisien avulla voidaan suuria lukujoukkoja esittää mahdollisimman pienellä tavalla ja kokonaisille lukukaavioille voidaan antaa nimiä $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ jne. Tämä helpottaa suuresti asioiden esittämistä. Eräissä tilanteissa matriisi on hyvin onnistunut ja havainnollinen tapa esittää lukuryhmiä. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

oleelliset osat tiivistyvät matriiseihin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ja } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Matriiseille voidaan määritellä yhteen- ja kertolasku. Matriiseilla voidaan siis laskea. Näiden laskutoimitusten avulla on kehitetty menetelmiä eräiden matriisien avulla kuvattavien ongelmien ratkaisemiseen. Esimerkkinä mainittakoon yhtälöryhmän ratkaiseminen.
3. Vaikka itse et koskaan harrastaisikaan matriisilaskentaa, niin varmaa on, että tietokoneesi harrastaa. Jos tietokone esimerkiksi ei löydä ratkaisua yhtälöryhmälle se yleensä antaa virheilmoituksen, jossa se kertoo mitä vikaa oli kerroinmatriisissa. Virheilmoituksen ymmärtäminen edellyttää matriisilaskennan perusteiden osaamista.

4. Matematiikassa tarkastellaan struktuureja, jotka muodostuvat olioista ja niille määritellyistä laskutoimituksista. Struktuureja luokitellessa on tapana sanoa, että tietyt ehdot täyttävä struktuuri on ryhmä (tarkemmin luvussa III), tietyt ehdot täyttävä ryhmä on rengas ja tietyt ehdot täyttävä rengas on kunta. Reaaliluvut muodostavat kunnan, ja kompleksiluvut muodostavat kunnan. Opiskelija on peruskoulussa ja lukiossa harjoitellut laskutoimitusten suorittamista reaalilukukunnassa. Kun sääntönä voidaan pitää, että reaalilukuja ja kompleksilukuja lukuunottamatta mikään mielenkiintoinen struktuuri ei ole kunta, saatta peruskoulussa hankittu sujuva laskutaito aiheuttaa kitkaa tutustuttaessa uusiin matemaattisiin struktuureihin. Neliömatriisit muodostavat renkaan mutta eivät kuntaa. Niillä laskettaessa tulee muistaa, että matriisilla ei saa jakaa eikä supistaa (sillä kertolaskun käänteisalkiota ei aina ole olemassa) ja kertolasku ei ole vaihdannainen ($AB \neq BA$). Tätä kautta matriisilaskenta kehittää teoreettisessa ajattelussa tarvittavaa tarkkuutta ja joustavuutta.

Määritelmä 2.2.1. Suorakulmainen lukukaavio, jossa on m vaakariviä ja n pystysaraketta on $m \times n$ -matriisi. Tyyppiä $m \times 1$ oleva matriisi on pystyvektori ja tyyppiä $1 \times n$ oleva matriisi on vaakavektori. Kaaviossa esiintyviä lukuja sanomme matriisialkioiksi.

2.2.1 Merkintäsopimuksia:

(1) Tulemme kirjoittamaan lukukaavion aina isojen sulkeiden sisään. On myös luvallista käyttää hakasulkumerkintää, mutta tässä monisteessa käytämme systemaattisesti kaarisulkeita.

(2) Matriisia merkitsemme kirjaimella (iso, vahvennettu ja kursiiwi) ja matriisissa olevia alkioita merkitsemme samalla kirjaimella (pieni, vahventamaton ja kursiiwi) varustettuna alaindeksein, jotka ilmaisevat millä rivillä ja missä sarakkeessa alkio on. Esimerkiksi a_{12} on matriisin A rivillä 1 sarakkeessa 2 oleva alkio.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(3) Vaakavektoria merkitään samoin kuin matriisia, mutta usein valitaan pieni kirjain, ja riviindeksi voidaan jättää pois. Pystyvektorin tapauksessa sarakeindeksi voidaan jättää pois.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

(4) Fysiikassa ja tekniikassa on tapana merkitä vektoreita vahventamattomalla, kursiivilla vektorilla, jonka päällä on nuoli.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

(5) Tulemme käyttämään kumpaakin merkintää (3 ja 4) vektorille. On tärkeätä, että opiskelija tottuu siihen, että eri tilanteissa käytetään hieman erilaisia merkintöjä.

Määritelmä 2.2.2. Usein käytämme matriisille merkintää $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Vastaavasti matriisin $\mathbf{A}$ alkion a_{ij} käytetään joskus merkintää $(\mathbf{A})_{ij}$.

Määritelmä 2.2.3. (a) Matriisit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ovat samat (identtiset, engl. equal), jos ne ovat saman kokoiset ja $a_{ij} = b_{ij}$ kaikilla i, j . Tällöin merkitään $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(b) Kahden $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ summa on matriisi

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

(c) Reaaliluvun λ ja $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tulo $\lambda \mathbf{A}$ on $m \times n$ -matriisi $(\lambda \cdot a_{ij})$. (Kaikki alkion a_{ij} kerrotaan λ :lla.)

(d) Sovimme lisäksi merkintätavoista

$$\begin{aligned} (-1)\mathbf{A} &= -\mathbf{A}, \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Esimerkki 2.2.4.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

‡

Samankokoisten matriisien yhteen- ja vähennyslasku ja vähennyslasku ovat melko selviä asioita. Seuraavaksi määrittelemme matriisin kertomisen matriisilla.

Koulussa olet todennäköisesti oppinut kahden vektorin pistetulon $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$. Kertaamme asian ensin

Määritelmä 2.2.5. Kahden samanmittaisen vektorin $\vec{u} = (u_i)$ ja $\vec{v} = (v_i)$ pistetulo on

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Määritelmä 2.2.6. $m \times n$ -matriisin $A = (a_{ij})$ ja $n \times p$ -matriisin $B = (b_{jk})$ matriisitulo AB on $m \times p$ -matriisi

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \vec{a}_{i\bullet} \cdot \vec{b}_{\bullet j}$$

(Siis: AB :n rivillä i sarakkeessa j oleva luku on A :n i :nnen rivin ja B :n j :nnen sarakkeen pistetulo.)

Esimerkki 2.2.7. Seuraavassa esimerkissä on lisätty sarakkeita ja rivejä erottavat viivat joihinkin kaavioihin. Tämä ei ole kovin tavallista, mutta tässä tapauksessa saattaa helpottaa kaavion lukemista.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{array} \end{array} \\ & = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c3s1esim1

Huomaa tyyppien yhteensopivuus $(3 \times 2\text{-matriisi})(2 \times 3\text{-matriisi}) = (3 \times 3\text{-matriisi})!$ ‡

Edeltävä määritelmä ja esimerkki kannattaa tiivistää seuraavalla tavalla: ”Kun ollaan laskemassa matriisia $C = AB$, niin laskettaessa lukua riville i sarakkeeseen j , tarvitaan ensimmäisestä matriisista i :s rivi ja toisesta matriisista j :s sarake. Rivin ja sarakkeen pistetulo antaa alkion tulo-kaavion vastaavaan paikkaan.”

Alla taulukossa (2.1) (sivu 62) on esitetty edeltävän esimerkin tulokaavion kaikkien alkioiden lasku ja erityisesti ”mistä luvut tulevat?”.

Esimerkki 2.2.8. Seuraavassa välimuotoja on vähemmän. Saatko saman tuloksen?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+0 & -1+0+0 \\ 0-2+0 & 0+0+9 \\ 2+1+0 & -1+0+3 \\ 2+0+0 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Huomaa taas tyyppien yhteensopivuus $(4 \times 3\text{-matriisi})(3 \times 2\text{-matriisi}) = (4 \times 2\text{-matriisi})!$ ‡

Esimerkki 2.2.9. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ ja } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Laskemalla tulot nähdään, että a) tulo AB on hyvin määritelty ja laskettavissa, mutta tuloa BA ei voi laskea. b) Tulot BC ja CB voidaan laskea, mutta niistä saadaan eri tulokset. Siis $BC \neq CB$. ‡

Esimerkki 2.2.10. Huomaa, että vektoreiden

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matriisitulo ja pistetulo ovat tarkasti tulkittuina eri asiat

$$\begin{aligned} uv &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix} \\ u \cdot v &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 28 \end{aligned}$$

‡

Esimerkki 2.2.11. Luvun alussa esiintyi yhtälöryhmä ja siihen liittyvät matriisit

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ja } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Matriisikertolaskun määritelmästä ja matriisien yhtäsuuruuden määritelmästä seuraa, että seuraavat kolme riviä sanovat saman asian:

$$Ax = b \tag{2.77}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \tag{2.79}$$

‡

Määritelmä 2.2.12. Nollamatriisi O on matriisi, jonka kaikki alkioit ovat nollia. Jos matriisissa on sarakkeita yhtä monta kuin riviä, se on neliömatrissi. $n \times n$ -neliömatrissin (a_{ij}) päälävistäjä muodostuu alkiosta a_{kk} , $1 < k < n$. Neliömatrissi on diagonaalinen, jos sen ainoat nollasta eroavat alkioit ovat päälävistäjällä. Neliömatrissi I on yksikkömatrissi, jonka päälävistäjän alkioit ovat ykkösiä ja muut alkioit ovat nollia.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

Seuraava määritelmä saattaa tuntua keinotekoiselta, mutta määritelmässä esitelty Kroneckerin delta on paljon käytössä teknisessä laskennassa. Asia on ulkoa opettelu arvoine.

Määritelmä 2.2.13. Kroneckerin delta on

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}$$

Siis $I = (\delta_{ij})$.

Seuraavilla lauseilla on täsmällinen matemaattiseen käsitteistöön liittyvä merkitys, johon palataan opetuksessa myöhemmin. Lauseet (2.2.14) ja (2.2.15) luettelevat matriiseille voimassa olevia tavallisesta laskemisesta tuttuja ominaisuuksia. Esimerkki (2.2.16) kertoo mis-

sä suhteessa matriiseilla laskeminen poikkeaa reaalityyppillä laskemisesta. (Tässä vaiheessa on tärkeää muistaa esimerkin (2.2.16) antama viesti.) Lauseet on koottu peräkkäin, jotta kaavat olisivat helposti silmäiltävissä. Todistukset on esitetty esimerkin jälkeen. Seuraavassa merkinnät $+_m$ ja $\cdot_m$ tarkoittavat matriisien laskutoimituksia.

ominaisuudet

Lause 2.2.14. Olkoon A, B ja C $m \times n$ -matriiseja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reaalityyppejä. Silloin

- (1) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (2) $A + O = A$
- (3) $A + (-A) = O$
- (4) $A + B = B + A$
- (5) $1 \cdot A = A$
- (6) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- (7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- (8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Kommentteja: (1) $+_m$ on liitännäinen (eli assosiatiivinen), (2) nollamatriisi on $+_m$:n neutraalityyppi, (3) $-A$ on A :n käänteisalkio, (4) $+_m$ on vaihdannainen (eli kommutatiivinen)

laskun ominaisuudet

Lause 2.2.15. Olkoon A, B ja C matriiseja ja $\alpha \in \mathbb{R}$ reaalityyppiä. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin silloin

- (1) $(AB)C = A(BC)$
- (2) $A(B + C) = AB + AC$
- (3) $(A + B)C = AC + BC$
- (4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- (5) $IA = AI = A$

Kommentteja: (1) $\cdot_m$ on liitännäinen (assosiatiivinen), (2,3) $+_m$ ja $\cdot_m$ noudattavat osittelulakeja, (5) I on matriisikertolaskun $\cdot_m$ neutraalialkio.

laskussa on outoa

Esimerkki 2.2.16. Olkoon A, B ja C matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista, että

- (1) $AB \neq BA$
- (2) $(AC = BC)$ vaikka $A \neq B$
- (3) $(AB = O)$ vaikka $(A \neq O \text{ ja } B \neq O)$

‡

Lauseiden (2.2.14) ja (2.2.15) osalta todistamme vain muutaman kohdan ja esimerkin (2.2.16) väitteet osoitetaan oikeiksi antamalla esimerkki jokaiseen kohtaan.

Todistuksia: (Lause (2.2.14) väite (1))

$$\begin{aligned} \forall i, j : \quad (A + (B + C))_{ij} &= a_{ij} + (B + C)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \\ &= (A + B)_{ij} + c_{ij} = ((A + B) + C)_{ij} \end{aligned}$$

(Lause (2.2.15) väite (1)) Olkoot A, B ja C tyyppejä $m \times n$, $n \times p$ ja $p \times r$ olevia matriiseja. Silloin matriisit $(AB)C$ ja $A(BC)$ ovat kumpikin tyyppiä $m \times r$ ja

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ ja } (BC)_{st} = \sum_{q=1}^p a_{sq} b_{qt}$$

joten

$$\begin{aligned}
 ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij} &= \sum_{q=1}^p (\mathbf{AB})_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kq} \right) c_{qj} \\
 &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1j} \\
 &\quad + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})c_{2j} \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{pj} \\
 &= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1p}c_{pj}) \\
 &\quad + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2p}c_{pj}) \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + a_{in}(b_{n1}c_{1j} + b_{n2}c_{2j} + \cdots + b_{np}c_{pj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{q=1}^p b_{kq} c_{qj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\mathbf{BC})_{kj} \\
 &= (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij}
 \end{aligned}$$

(Lause ^{th_matkerto:kertolaskun ominaisuudet} (2.2.15) väite (2))

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \\
 &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) \\
 &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{in}c_{nj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = (\mathbf{AB} + \mathbf{AC})_{ij}
 \end{aligned}$$

(Lause ^{th_matkerto:kertolaskun ominaisuudet} (2.2.15) väite (5)) Tutkitaan $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $m \times m$ -yksikkömatriisiin $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$ ja $n \times n$ -yksikkömatriisiin $\mathbf{J} = (\delta_{ij})$ tuloja.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{IA})_{ij} &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{i1}a_{1j} + \delta_{i2}a_{2j} + \cdots + \delta_{im}a_{mj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} \\
 (\mathbf{AJ})_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \cdots + a_{in}\delta_{nj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}
 \end{aligned}$$

(Esimerkki ^{c3slesim2:mik\IeC {\\"a} matlaskussa on outoa} (2.2.16) Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Silloin suora lasku osoittaa, että:

- (1) $AB \neq BA$,
- (2) $AC = BC$, vaikka $A \neq B$,
- (3) $DE = O$, vaikka $D \neq O$ ja $E \neq O$.

2.2.2 Transponointi

Sec:lal-MatTransp

Seuraavassa määriteltävää transpoosimerkintää käytetään paljon. Vaikka asia on yksinkertainen, sen pitää tulla täydellisen tutuksi.

Määritelmä 2.2.17. $m \times n$ -matriisin $A = (a_{ij})$ transponoitu matriisi eli transpoosi on $n \times m$ -matriisi A^T jolle

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

(Matriisi A^T saadaan siis A :sta vaihtamalla vaakarivit pystysarakkeiksi.)

Esimerkki 2.2.18.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

‡

(Huomaa: vasen ylänurkka pysyy paikallaan, ensimmäisestä rivistä tulee ensimmäinen sarake, toisesta rivistä tulee toinen sarake, ...)

Lause 2.2.19. Jos matriisien A ja B väliset laskutoimitukset ovat määriteltyjä ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

- (1) $(A^T)^T = A$
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$ «« TÄRKEÄ!

Todistus: Kohdat (1) - (3) nähdään välittömästi. (4):

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$$

Esimerkki 2.2.20. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ ja } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Lasketaan ensin väitteen (4) mukaiset lausekkeet

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seuraavaksi kirjaamme uudelleen samat laskut, mutta nyt merkitsemme erityisesti mistä tulevat ne luvut joista laskemme tulomatriisiin rivillä yksi sarakkeessa kaksi olevan alkion 43.

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{5} & 6 \\ \boxed{7} & 8 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ \boxed{43} & 50 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{43} \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{7} \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{43} \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

‡

Määritelmä 2.2.21. Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen, jos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (eli $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$) ja antisymmetrinen, jos $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ (eli $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$)

Jokainen matriisi voidaan esittää symmetrisen ja antisymmetrisen matriisin summana

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- \quad \text{missä}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \text{ on symmetrinen, ja}$$

$$\mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \text{ on antisymmetrinen.}$$

Jos esimerkiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{niin}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^- = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja}$$

$$\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

2.2.3 Determinantti

Sec:la1-MatDetermin

Jokaiseen neliömatriisiin liitetään reaalityyppinen luku, jota sanomme matriisin determinantiksi. Tässä kurssissa käsittelemme vain pienehköjä, 2×2 ja 3×3 , matriiseja. Seuraavalla kurssilla tulemme käyttämään isompiakin matriiseja ja niiden determinantteja.

Kaksirivinen determinantti

Määritelmä 2.2.22. 2×2 matriisin A determinantti on luku

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} + & - \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Esimerkki 2.2.23.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 3 = 2 \\ \text{b)} \quad & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 10 = -10 \\ \text{c)} \quad & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 6 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

†

Pari huomiota:

- Determinantin arvo voi olla negatiivinen, vaikka kaaviossa ei ole yhtään negatiivista lukua. Determinantti-merkinnän pystyviivoilla ei ole mitään tekemistä itseisarvon kanssa.
- Jos kaaviossa on kaksi saman laista riviä, niin determinantin arvo on nolla.

Opettele erottamaan heti kaavion matriisi-merkintä ja kaavion determinantin merkintä toisistaan

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{on matriisi (eli suorakulmainen luku-kaavio)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -8 \leftarrow \text{on luku}$$

Tärkeä determinantin sovellus on seuraava lause:

Lause 2.2.24. Jos yhtälöryhmän kerroinkaavio on 2×2 matriisi, jonka determinantti on nollasta eroava, niin yhtälöryhmällä on yksi ja vain yksi ratkaisu.

Todistus: Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

(Emme nyt anna a-luvuille, emmekä b-luvuille, mitään erityisiä arvoja, vaan tarkastelemme yhtälöryhmää tässä yleisessä muodossa.) Kerromme ensimmäisen yhtälön a_{22} :lla ja toisen yhtälön $-a_{12}$:lla. Kun näin saadut yhtälöt lasketaan yhteen, syntyy yhtälö josta voimme ratkaista muuttujan x arvon.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot (-a_{12}) \end{array} \\ \Rightarrow & \frac{\begin{array}{rcl} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y & = & a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y & = & -a_{12}b_2 \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x} \end{aligned}$$

x ratkeaa viimeisestä yhtälöstä, sillä $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$. ■

kolmirivinen determinantti

Määritelmä 2.2.25. 3×3 matriisin $\mathbf{A}$ determinantti on luku

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & - & \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| & \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{array} \end{array}$$

Esimerkki 2.2.26.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3 \cdot 1 \cdot 1) + (4 \cdot 3 \cdot 0) + (1 \cdot 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 \cdot 0) - (3 \cdot 3 \cdot 2) - (4 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= 3 + 0 + 4 - 0 - 18 - 8 = -19 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 + & + & + & - & - & - \\
 \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & \\
 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \\
 0 & 2 & 1 & 0 & 2 &
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \left| \begin{array}{ccc}
 3 & 4 & 1 \\
 2 & 1 & 3 \\
 3 & 4 & 1
 \end{array} \right| \\
 &= (3 \cdot 1 \cdot 1) + (4 \cdot 3 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 4) - (1 \cdot 1 \cdot 3) - (3 \cdot 3 \cdot 4) - (4 \cdot 2 \cdot 1) \\
 &= 3 + 36 + 8 - 3 - 36 - 8 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 + & + & + & - & - & - \\
 \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & \\
 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \\
 3 & 4 & 1 & 0 & 2 &
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

‡

2.3 <><><> Adjungaatti ja Cramerin kaavat