

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Summakulman sinin ja kosinin kaavat

Sinimuotoiset funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Seuraavat tarkastelut nojaavat trigonometrisille funktioille todistettuihin kaavoihin.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4)$$

Seuraavassa sinimuotoisiin funktioihin liittyviä kaavoja.
Perusmuoto sinimuotoiselle funktiolle on nyt

$$f(t) = F \sin(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

- ▶ F on funktion maksimiarvo eli *amplitudi*.
- ▶ ω on kulmataajuus. Jos generaattori pyörii $f = 50$ kierrosta sekunnissa, niin generaattorin tuottaman sähkövirran taajuus on $f = 50 \frac{1}{\text{sekunti}} = 50\text{Hz}$ ja kulmataajuus on $\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{sekunti}} = 100\pi\text{Hz}$
- ▶ α on vaihesiirto.
- ▶ Usein merkitsemme $f(t) = F \sin(\omega t + \alpha) \sim \underline{F} = F \angle \alpha$, missä $\underline{F}$ on sinifunktion osoitin (kompleksiluku)

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavatSinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Lause 1. Sinimuotoinen funktio $f(t) = F \sin(\omega t + \alpha)$ voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$f(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t), \quad (6)$$

$$\text{missä } \begin{cases} a = F \cos \alpha \\ b = F \sin \alpha \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} F = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \alpha = b/a \end{cases}$$

Perustelu: Saamme suoraan summakulman sinin kaavasta (1)

$$\begin{aligned} f(t) &= F \sin(\omega t + \alpha) \\ &= F(\sin(\omega t) \cos(\alpha) + \cos(\omega t) \sin(\alpha)) \\ &= \underbrace{F \cos(\alpha)}_{=a} \sin(\omega t) + \underbrace{F \sin(\alpha)}_{=b} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktio

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Lause 2. Kahden sinimuotoisen funktion summa on myös sinimuotoinen funktio ja osoittimille pätee, että summan osoitin on osoittimien summa, eli

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(t) &= F \sin(\omega t + \alpha) \\ g(t) &= G \sin(\omega t + \beta) \end{cases} &\sim \begin{cases} \underline{F} = F \angle \alpha \\ \underline{G} = G \angle \beta \end{cases} \\ \Rightarrow f(t) + g(t) &\sim \underline{F} + \underline{G} \end{aligned}$$

Perustelu: Lasketaan funktion $f(t) + g(t)$ amplitudi ja vaihesiirto ja toisaalta kompleksiluvun $\underline{F} + \underline{G}$ moduli ja kulma. Väite on perusteltu, jos amplitudi ja moduli ovat samat ja toisaalta vaihesiirto ja kulma ovat samat.

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavatSinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Amplitudi:

$$\begin{aligned}f(t) + g(t) &= F \sin(\omega t + \alpha) + G \sin(\omega t + \beta) \\&= F \cos(\alpha) \sin(\omega t) + F \sin(\alpha) \cos(\omega t) \\&\quad + G \cos(\beta) \sin(\omega t) + G \sin(\beta) \cos(\omega t) \\&= (F \cos(\alpha) + G \cos(\beta)) \sin(\omega t) \\&\quad (F \sin(\alpha) + G \sin(\beta)) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Vertaamalla lauseen 1 kaavoihin nähdään, että summafunktio on sinimuotoinen ja amplitudi on

$$\begin{aligned}&\sqrt{(F \cos(\alpha) + G \cos(\beta))^2 + (F \sin(\alpha) + G \sin(\beta))^2} \\&= \sqrt{F^2 + 2FG \cos(\alpha - \beta) + G^2}\end{aligned}$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavatSinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Osoittimien summan moduli:

$$\begin{aligned} |\underline{F} + \underline{G}| &= |(F \angle \alpha) + (G \angle \beta)| \\ &= |F \cos \alpha + jF \sin \alpha + G \cos \beta + jG \sin \beta| \\ &= |(F \cos \alpha + G \cos \beta) + j(F \sin \alpha + G \sin \beta)| \\ &= \sqrt{(F \cos(\alpha) + G \cos(\beta))^2 + (F \sin(\alpha) + G \sin(\beta))^2} \\ &= \sqrt{F^2 + 2FG \cos(\alpha - \beta) + G^2} \end{aligned}$$

SAMA kuin edellä!

Vaihesiirto ja osoittimen kulma: Funktion

$$f(t) + g(t) = (F \cos(\alpha) + G \cos(\beta)) \sin(\omega t) \\ (F \sin(\alpha) + G \sin(\beta)) \cos(\omega t)$$

vaihesiirrolle φ pätee

$$\tan \varphi = \frac{F \sin(\alpha) + G \sin(\beta)}{F \cos(\alpha) + G \cos(\beta)}$$

Toisaalta osoittimen

$$\underline{F} + \underline{G} = (F \angle \alpha) + (G \angle \beta) \\ = (F \cos \alpha + G \cos \beta) + j(F \sin \alpha + G \sin \beta)$$

Kulman tangenti on sama

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Seuraavissa laskuissa sähkövirta on ajan funktiona

$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_i) \sim I \angle \varphi_i$ ja jännite on ajan funktiona

$u(t) = U \sin(\omega t + \varphi_u) \sim U \angle \varphi_u$

Vastus:

Ohmin laki pätee myös vaihtovirroille

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = R \cdot \underline{I}$$

Vastuksen yli vaikuttava jännite ja vastuksen läpi menevä virta on siis samassa vaiheessa.

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

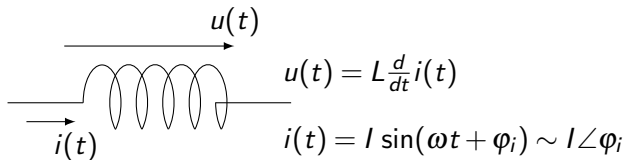
Sinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Kelassa virta synnyttää magneettikentän. Virran muuttuessa muuttuu myös magneettikenttä ja magneettikentän muutos indusoi kelaan jännitteen. Jännite on suoraan verrannollinen virran muutosnopeuteen.



$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = L \frac{d}{dt} I \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$= \omega L I \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) \sim \omega L I \angle (\varphi_i + 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

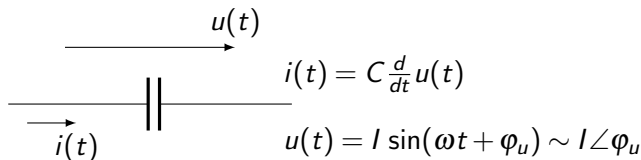
Sinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Kelassa virta synnyttää magneettikentän. Virran muuttuessa muuttuu myös magneettikenttä ja magneettikentän muutos indusoi kelaan jännitteen. Jännite on suoraan verrannollinen virran muutosnopeuteen.



$$i(t) = C \frac{d}{dt} u(t) = C \frac{d}{dt} U \sin(\omega t + \varphi_u) = \omega C U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$= \omega C U \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) \sim \omega C U \angle (\varphi_u + 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \underline{I} = j\omega C \underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \frac{-j}{\omega C} \underline{I}$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktio

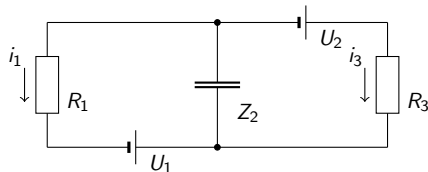
Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Esimerkki 1. Laske virrat, kun oheisessa kytkennässä

$$U_1 = 2.0 \sin(\omega t) \text{V}, \quad U_2 = 5.0 \sin(\omega t) \text{V}, \quad R_1 = 200 \Omega, \\ Z_2 = -j/(\omega C) \Omega \text{ ja } R_3 = 300 \Omega.$$



Kirchoffin ensimmäisestä laista saamme

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Kirchoffin toisesta laista saamme

$$-U_2 - Z_2 i_2 + R_3 i_3 = 0$$

$$-R_1 i_1 + U_1 + Z_2 i_2 = 0$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktio

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Sijoitetaan parametrien arvot $U_1 = 2.0\text{V}$, $U_2 = 5.0\text{V}$,
 $R_1 = 200\Omega$ ja $R_3 = 300\Omega$ yhtälöihin

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0, \\ -U_2 - Z_2 i_2 + R_3 i_3 &= 0, \\ -R_1 i_1 + U_1 + Z_2 i_2 &= 0, \end{aligned}$$

ja järjestetään yhtälöt sieviksi:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ j/(\omega C)\Omega i_2 + 300\Omega i_3 = 5.0\text{V} \\ -200\Omega i_1 - j/(\omega C)\Omega i_2 = -2.0\text{V} \end{cases}$$

Jaetaan vielä toinen ja kolmas yhtälö ohmilla, jolloin yhtälöryhmä menee muotoon:

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -Z_2 i_2 + 300 i_3 = 5.0\text{A} \\ -200 i_1 + Z_2 i_2 = -2.0\text{A} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -Z_2 & 300 \\ -200 & Z_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5.0\text{A} & -Z_2 & 300 \\ -2.0\text{A} & Z_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavatSinimuotoiset
funktio

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -Z_2 i_2 + 300 i_3 = 5.0\text{A} \\ -200 i_1 + Z_2 i_2 = -2.0\text{A} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5.0\text{A} & 300 \\ -200 & -2.0\text{A} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -0 + 5.0\text{A} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -200 & 0 \end{vmatrix} - (-2.0\text{A}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 300 \end{vmatrix} \\ &= 1600\text{A} \end{aligned}$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavatSinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -Z_2 i_2 + 300 i_3 = 5.0\text{A} \\ -200 i_1 + Z_2 i_2 = -2.0\text{A} \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_2 & 5.0\text{A} \\ -200 & Z_2 & -2.0\text{A} \end{vmatrix}$$

=

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavatSinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.

Siis:

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{D_1}{D} = \\i_2 &= \frac{D_2}{D} = \\i_3 &= \frac{D_3}{D} =\end{aligned}$$

Aiheet

Summakulman
sinin ja kosinin
kaavat

Sinimuotoiset
funktiot

Osoitinlaskenta

Impedanssi

Esimerkki 1.