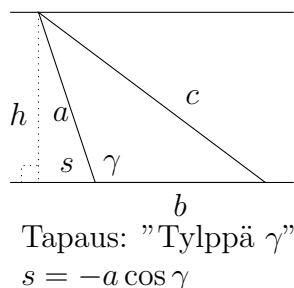
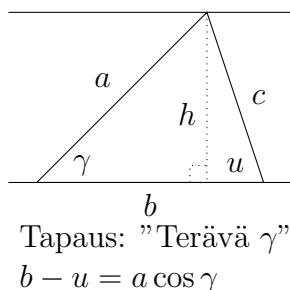


Lause 1.2.5. Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Perustelu:



Yllä olevien kuvien merkinnöin:

Jos γ on terävä, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + u^2 \\ &= a^2 - (b - u)^2 + u^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2bu \\ &= a^2 + b^2 - 2b(b - u) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Jos γ on tylppä, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 - s^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2bs \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

□

1.3 Vektorit

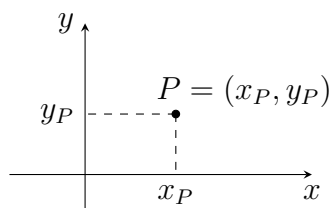
la1-Vektorit

Opiskelija on jo koulussa käsitellyt tason ja avaruuden koordinaatistoja, mutta koulussa asia yleensä yksinkertaistetaan äärimmilleen niin, että syntyy mielikuva siitä, että on olemassa vain yksi koordinaatisto.

1.3.0 Tavallinen tason (x, y) -koordinaatisto

Koordinaatisto asetetaan siten, että x -akseli on vaakasuora, asteikko kasvaa oikealle, ja y -akseli on pystysuora, asteikko kasvaa ylöspäin. Akselit ovat siis kohtisuorassa. Akselit leikkaavat asteikkojen nollakohdissa. akselien leikkauspistettä sanomme origoksi.

Jos tason pisteen P kautta piirretty pystysuora leikka x -akselin kohdassa x_P , ja pisteen P kautta piirretty vaakasuora leikka y -akselin korkeudella y_P niin sanomme, että piste on



Kuva 1.12: Pisteen koordinaatit tasossa.

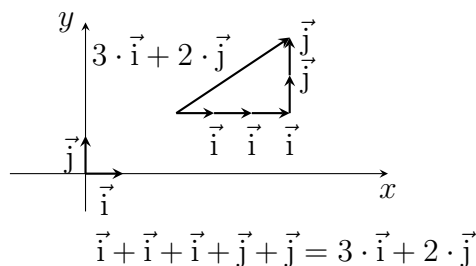
kohdassa x_P korkeudella y_P ja merkitsemme $P = (x_P, y_P)$. Janaa, joka yhdistää pisteet P ja Q merkitsemme kirjainparilla, jonka päällä on viiva, $\overrightarrow{PQ}$. Kun janalle annetaan suunta (P :stä Q :hun), saamme suuntajanan $\overrightarrow{PQ}$. Tarkasti tulkittuna suuntajalla on pituus, suunta ja paikka.

Vektorilla on pituus ja suunta. Kun piirrämme vektorin, niin piirrämme suuntajanan, jolla on sama pituus ja suunta kuin vektorilla. Sanomme, että mikä tahansa suuntajana, jolla on sama pituus ja suunta kuin vektorilla, edustaa vektoria. On tapana sopia nimet koordinaat- tiakselien suuntaisille yksikkövektoreille:

vektori	pituus	suunta
$\vec{i}$	1	x -akselin suunta
$\vec{j}$	1	y -akselin suunta

Suuntajanan pituus ja suunta on helppo esittää yksikkövektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla:

$$\text{”}a \text{ oikealle ja } b \text{ ylös”} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$



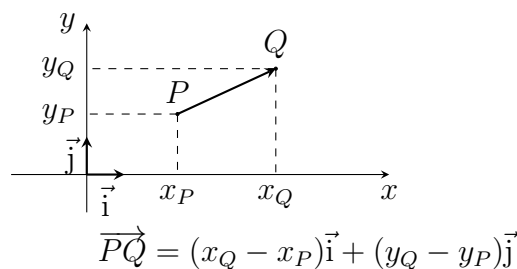
Kuva 1.13: ”Kolme oikealle ja kaksi ylös”.

Kun tiedämme suuntajanan päätepisteiden koordinaatit, niin suuntajanan pituus ja suunta saadaan samalla tavalla

$$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P) \cdot \vec{i} + (y_Q - y_P) \cdot \vec{j}$$

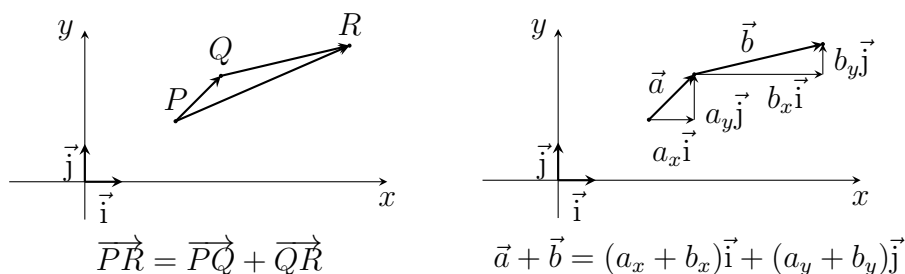
Pisteen $P = (x_P, y_P)$ paikkavektoria $\vec{r}_P$ edustaa suuntajana origosta O pisteeseen P , eli

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}.$$



Kuva 1.14: Suuntajanan pituus ja suunta.

Kahden vektorin, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, summa $\vec{a} + \vec{b}$ konstruoidaan piirtäen siten, että ensin piirretään jokin vektoria $\vec{a}$ edustava suuntajana $\overrightarrow{PQ}$, sitten piirretään pisteestä Q alkava vektorin $\vec{b}$ edustaja $\overrightarrow{QR}$. Nyt suuntajana $\overrightarrow{PR}$ edustaa summavektoria $\vec{a} + \vec{b}$.



Lause 1.3.1. Tason vektorin $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ pituus $|\vec{a}|$ voidaan laskea lausekkeesta

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

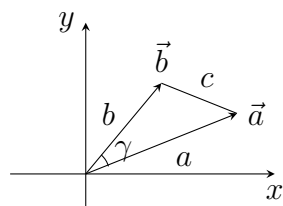
Perustelu: Kun piirrämme vektorille $\vec{a}$ origosta alkavan edustajan, syntyy luonnollisella tavalla suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on sama kuin vektorin pituus ja kateettien pituudet ovat $|a_x|$ ja $|a_y|$. Väite seuraa nyt Pythagoran lauseesta. $\square$

Lause 1.3.2. Kaksi tasovektoria $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ ja niiden välinen kulma γ toteuttavat yhtälön

$$\cos \gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

CosGammaTaso

Perustelu: Piirretään vektoreille origosta alkavat edustajat. Olkoon edustajien loppupisteitä yhdistävän janan pituus c . Kosinilauseen mukaan:



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 &= a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2ab \cos \gamma \\ -2a_x b_x - 2a_y b_y &= -2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma \end{aligned}$$

□

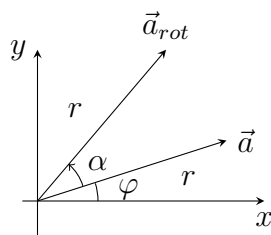
Lause 1.3.3. (a) Jos tasovektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ kierretään origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman α verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = (\cos(\alpha) \cdot a_x - \sin(\alpha) \cdot a_y) \vec{i} + (\sin(\alpha) \cdot a_x + \cos(\alpha) \cdot a_y) \vec{j}.$$

(b) Jos tasovektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ kierretään origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = -a_y \vec{i} + a_x \vec{j}.$$

Perustelu: (a) Olkoon vektorin $\vec{a}$ pituus r ja vektorin ja x -akselin välinen kulma φ , jolloin $a_x = r \cos \varphi$ ja $a_y = r \sin \varphi$. Nyt kierretty vektori on



$$\begin{aligned} \vec{a}_{rot} &= r \cos(\alpha + \varphi) \vec{i} + r \sin(\alpha + \varphi) \vec{j} \\ &= r(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) \vec{i} \\ &\quad + r(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) \vec{j} \\ &= (\cos \alpha \cdot a_x - \sin \alpha \cdot a_y) \vec{i} + (\sin \alpha \cdot a_x + \cos \alpha \cdot a_y) \vec{j} \end{aligned}$$

(b) Seuraa suoraan a-kohdasta, kun $\alpha = \pi/2$. □

1.3.0 Konkreettisen tason (x, y) -koordinaatisto

Jatkossa monen esimerkin ratkaisu alkaa sillä, että asetetaan koordinaatisto, jossa laskut ja analyysit tehdään. Koordinaatisto siis valitaan tehtävään sopivalla tavalla. Edellisessä kapaleessa koordinaattiakselien suunnat olivat ”oikealle” ja ”ylös”. Tällä valinnalla saatiin aikaan se, että kun ensimmäisen koordinaattiakselin suuntaista vektoria käännetään positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään) kulman $\pi/2$ verran, niin käännetty vektori on toisen koordinaattiakselin suuntainen.

Kun varustamme tason suorakulmaisella koordinaatistolla, valitsemme neljä ominaisuutta

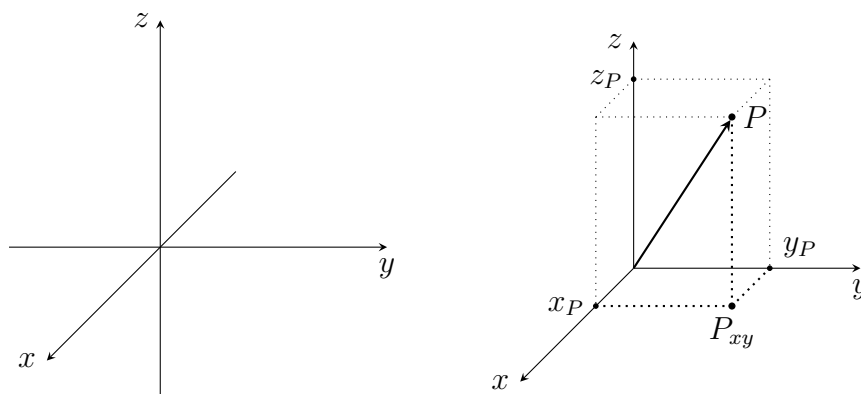
1. Origo. Piste, jossa koordinaattiakselit leikkaavat.
2. x -akseli.
3. y -akseli, joka on kohtisuorassa x -akselia vastaan ja saadaan x -akselista kiertämällä kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan.
4. Akselien asteikko. Akseleilla tulee olla samat asteikot. Asteikkojen nollakohdat ovat origossa.

Edellä kohta 3 sisältää aidon valinnan, sillä suunnistus riippuu siitä, miltä puolelta katsomme tasoa. Jos avaruusaseman kaksi astronauttia ovat korjaamassa aurinkopaneelia, ja ovat eri puolilla paneelia, niin he ovat perustellusti eri mieltä suunnistuksesta. Suunnistus riippuu siitä, miten valitsemme tason ylä- ja ala-puolen.

Lisää esimerkki

1.3.0 Tavallinen avaruuden (x, y, z) -koordinaatisto

Aloitetaan koordinaatiston konstruointi siten, että katsoja on kyykyssä ja origo on katsojan edessä. x -akseli on vaakasuora katsojaan päin, y -akseli on vaakasuora oikealle (kohtisuorassa x -akselia vastaan), ja z -akseli osoittaa ylöspäin (kohtisuorassa sekä x -akselia että y -akselia vastaan). Tämän jälkeen katsoja nousee seisomaan ja ottaa askelen oikealle, ja piirtää kuvan näkemästään. Se, että katsoja muutti hieman asentoaan, saa x -akselinkin näkymään kuvassa hyvin.

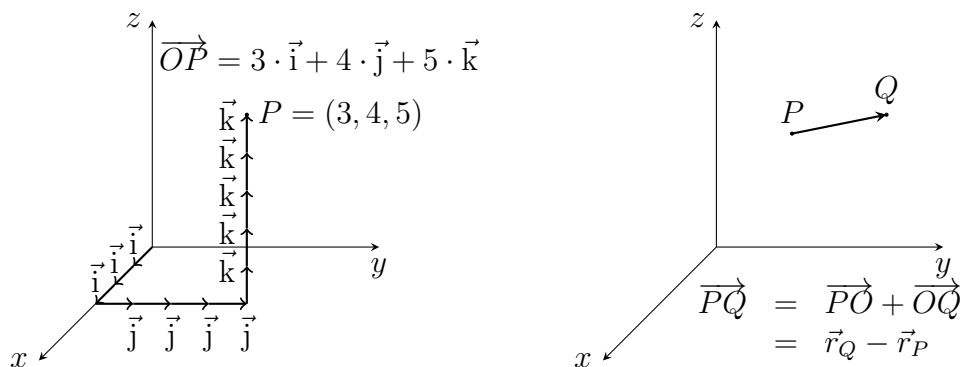
Kuva 1.15: (x, y, z) -koordinaatisto.

Samoin kuin edellä määritellään koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit

vektori	pituus	suunta
$\vec{i}$	1	x -akselin suunta
$\vec{j}$	1	y -akselin suunta
$\vec{k}$	1	z -akselin suunta

Olkoon P avaruuden mikä tahansa piste. Piirretään pisteen P kautta pystysuora (vektorin $\vec{k}$ suuntainen suora), joka leikkaa (x, y) -tason pisteessä $P_{xy} = (x_P, y_P, 0)$. Piste P_{xy} on pisteen P kohtisuora projektio (x, y) -tasoon. z -koordinaatti kertoo, miten korkealla P on (x, y) -tasosta. z_P on plus-merkkinen, jos P on (x, y) -tason yläpuolella, ja miinus-merkkinen, jos P on (x, y) -tason alapuolella. Nyt on selvää, että

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} - z_P \vec{k} &= \overrightarrow{OP_{xy}} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - z_P \vec{k} &= x_P \vec{i} + y_P \vec{j} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} &= x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}
 \end{aligned}$$



Kun piirrämme pisteestä P vaakasuoran janan z -akselille, niin janan akselin puoleinen päätepiste $P_z = (0, 0, z_P)$ on pisteen P projektiio z -akselille.

Edellä sanoimme (x, y) -tasoa vaakasuoraksi ja z -akselia pystysuoraksi. Tämä helpottaa kuvion näkemistä, mutta ei ole mitenkään välttämätöntä. Akselit ovat täysin tasa-arvoiset. Samalla tavalla kuin edellä piste projisoitiin (x, y) -tasoon ja z -akselille, piste voidaan myös projisoida (y, z) -tasoon ja x -akselille, tai (z, x) -tasoon ja y -akselille.

Edellä konstruoitu koordinaatisto on esimerkki positiivisesti suunnistetusta koordinaatistosta. Suunnistuksen positiivisuuden voi testata ns. ”oikean käden säännöllä”:

Aseta oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi likimain kohtisuoraan toisiinsa nähden. Jos nyt pystyt kääntämään kätesi niin, että peukalo on x -akselin suuntainen, etusormi on y -akselin suuntainen, ja keskisormi on z -akselin suuntainen, niin koordinaatisto on positiivisesti suunnistettu.

Jos koordinaatisto on positiivisesti suunnistettu, niin kahden koordinaattiakselin määräämän tason suunnistus saadaan myös oikean käden avulla:

Olkoon (x, y, z) -koordinaatisto positiivisesti suunnistettu. Jos asetat oikean käden sormet ”peukutus-asentoon” ja asetat peukalon z -akselin suuntaiseksi, niin muut sormet näyttävät (x, y) -tason positiivisen kiertosuunnan. Jos asetat peukalon x -akselin suuntaiseksi, niin muut sormet näyttävät (y, z) -tason positiivisen kiertosuunnan. Jos asetat peukalon y -akselin suuntaiseksi, niin muut sormet näyttävät (z, x) -tason positiivisen kiertosuunnan.

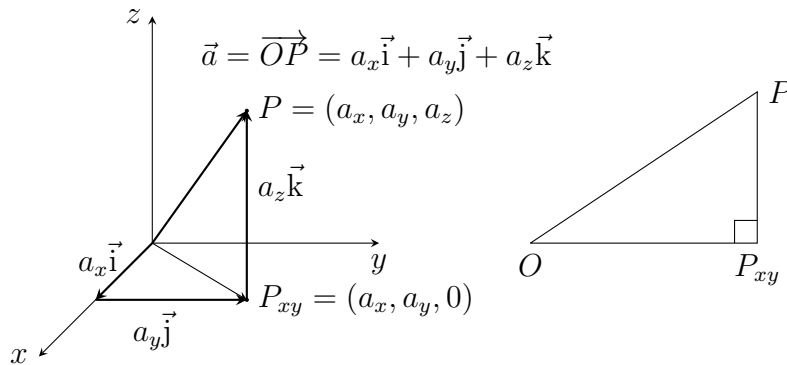
Lause 1.3.4. (1) Vektorin $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ pituus saadaan lausekkeesta

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

(2) Olkoon $P = (x_P, y_P, z_P)$ ja $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ kaksi pistettä. Pisteiden P ja Q etäisyys, eli janan $\overline{PQ}$ pituus, eli suuntajanan $\vec{PQ}$ pituus saadaan lausekkeesta

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

Perustelu: (1)



Vektori $\overrightarrow{OP_{xy}}$ on vaakasuora ja vektori $\overrightarrow{P_{xy}P}$ on pystysuora. Ne ovat siis kohtisuorassa. Kun kopioimme kolmion $\triangle OP_{xy}P$ kuvatasoon, syntyy suorakulmainen kolmio, jolle Pythagorasan lauseen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= |\overrightarrow{OP_{xy}}|^2 + |\overrightarrow{P_{xy}P}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= (a_x^2 + a_y^2) + a_z^2. \end{aligned}$$

(2) Seuraa kohdasta (1). $\square$

Lause 1.3.5. Kaksi avaruusvektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ ja niiden välinen kulma γ toteuttavat yhtälön

$$\cos \gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

GammaAvaruus

Perustelu: Piirretään vektoreille origosta alkavat edustajat. Olkoon edustajien loppupisteitä yhdistävän janan pituus c . Kosinilauseen mukaan:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2ab \cos \gamma \\ -2a_x b_x - 2a_y b_y - 2a_z b_z &= -2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma \end{aligned}$$

$\square$

Avaruusvektorin kiertäminen yleisesti käsitellään myöhemmin, kun olemme ensin saaneet sopivia työkaluja käyttöön. Jos voimme valita yhden koordinaattiakselin kiertoakselin suuntaiseksi, niin tehtävä helpottuu ja osaamme kuvata kierron helposti

Lause 1.3.6. (a) Jos avaruusvektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ kierretään z -akselin ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman α verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = (\cos(\alpha) \cdot a_x - \sin(\alpha) \cdot a_y) \vec{i} + (\sin(\alpha) \cdot a_x + \cos(\alpha) \cdot a_y) \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

(b) Jos tasovektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ kierretään z -akselin ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = -a_y \vec{i} + a_x \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

1.3.0 Konkreettisen avaruuden (x, y, z) -koordinaatisto

Fysiikan laskuissa usein suunnat ”vaakasuora” ja ”pystysuora” ovat luonnollisia ja ongelmattomia. Aina näin ei kuitenkaan ole ja joskus laskut helpottuvat, kun akselien suunnat valitaan tilanteeseen sopivasti. jatkossa kuitenkin odotamme aina, että valitut akselit ovat keskenään kohtisuorassa ja muodostavat positiivisesti suunnistetun koordinaatiston.

Kun varustamme tilan suorakulmaisella koordinaatistolla, valitsemme taas neljä ominaisuutta

1. Origo. Piste, jossa koordinaattiakselit leikkaavat.
2. x -akseli.
3. y -akseli, joka on kohtisuorassa x -akselia vastaan. z -akseli määräytyy nyt siitä, että se on kohtisuorassa sekä x - akselia että y akselia vastaan, ja kaikki akselit yhdessä muodostavat positiivisesti suunnistetun koordinaatiston. (Kun siis x - ja y -akselit on valittu, niin z -akseli määräytyy niistä, eikä sen suhteen enää ole valinnan mahdollisuuksia).
4. Akselien asteikko. Akseleilla tulee olla samat asteikot. Asteikkojen nollakohdat ovat origossa.

Edellä kohta 3 sisältää enemmän vaihtoehtoja kuin tason tapauksessa.

Lisää esimerkki

1.4 Piste- ja ristitulo

Sec:la1-PisteRisti

Tässä kappaleessa määrittelemme kaksi vektoreille määriteltyä tuloa; pistetulo ja ristitulo.

Määritelmät ja erilaiset tulojen ominaisuudet saattavat tuntua, sekavalta kokonaisuudelta. Koko tämän kappaleen ajan pidä kirkkaana mielessä se ero, että kahden vektorin pistetulon arvo on luku, ja kahden vektorin ristitulon arvo on vektori.

Ex:DC1

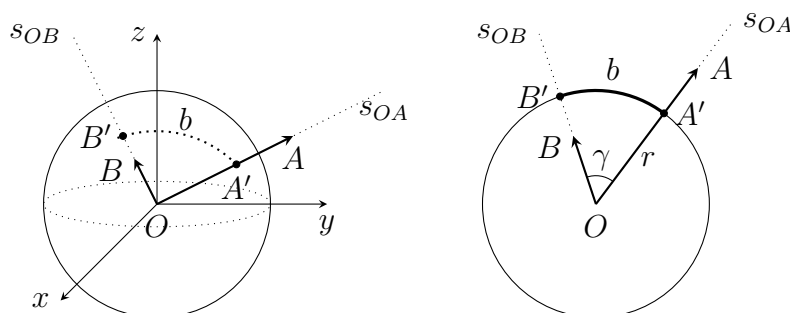
Esimerkki 1.4.1. Olkoon $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, ja $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Silloin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4, \quad (1.10)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 17\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k}. \quad (1.11)$$

‡

Pian opimme laskemaan pistetulon ja ristitulon. Sitten voit palata tähän esimerkkiin ja tarkistaa laskut. Nyt on tärkeintä ymmärtää, että tulot antavat täysin eri tyyppiset tulokset.



Kuva 1.16: Kahden avaruusvektorin välinen kulma.

laFig:VecAngle

Viimeistään tässä vaiheessa tulee määritellä, mitä tarkoitamme kahden avaruusvektorin välisellä kulmalla. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruusvektoria. Piirrämme vektoreita edustavat origosta alkavat suuntajana $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Piirrämme vielä origosta alkavan ja pisteen A kautta kulkevan puolisuoran s_{OA} ja origosta alkavan ja pisteen B kautta kulkevan puolisuoran s_{OB} . Puolisuorat leikkaavat r -säteisen origo-keskisen pallon pisteissä A' ja B' . Leikkaamme kuvion tasolla, joka kulkee pisteiden O , A' , ja B' kautta.

Kuvassa [laFig:VecAngle](#) on piirretty syntyvä leikkauskuvio. Merkitään b :llä pisteitä A' ja B' yhdistävän lyhyemmän kaaren pituutta. Leikkauskuvaan syntyvä kulma

$$\gamma = \angle A'OB' = \angle AOB = \frac{b}{r}(\text{rad})$$

on vektoreiden välinen kulma. Konstruktiosta seuraa, että $0 \leq \gamma \leq \pi$. Jos $\gamma = 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset. Jos $\gamma = \pi$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Monessa sovellustilanteessa vektorin avulla ilmaistaan suoran suunta. Siksi on tapana sanoa, että jos pisteiden O ja A kautta piirretty suora, ja pisteiden O ja B kautta piirretty suora ovat yhdensuuntaiset, niin myös vektorit ovat yhdensuuntaiset. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ne ovat saman- tai vastakkaissuuntaiset.

Käytämme jatkossa seuraavia merkintöjä:

$$\begin{aligned} \vec{a} \uparrow \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat samansuuntaiset,} \\ \vec{a} \downarrow \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat vastakkaissuuntaiset,} \\ \vec{a} \parallel \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat yhdensuuntaiset,} \\ \vec{a} \perp \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat kohtisuorassa.} \end{aligned}$$

Määritelmä 1.4.2. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi tason (tai avaruuden) vektoria ja olkoon $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ niiden välinen kulma. Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ on reaalityyppinen luku

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma.$$

Kaksi vektoria ovat siis kohtisuorassa, jos niiden välinen kulma on $\pi/2$ (90°) tai ainakin toinen vektoreista on nollavektori. Pistetulon arvo voidaan laskea koordinaattien perusteella seuraavasti:

Lause 1.4.3. (1) Olkoon $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ kaksi tasovektoria. Silloin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

(2) Olkoon $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ kaksi avaruusvektoria. Silloin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Perustelu: (1) Suora seuraus määritelmästä ja lauseesta 1.3.2 (sivu 14) ja lauseesta 1.3.5 (sivu 18). Th:CosGammaTasovektoriAvaruus

Octavessa on pistetulon laskemiseen funktio `dot(vec1, vec2)`. Periaate on se, että ensin esitellään vektorit, ja sitten lasketaan vektoreilla. Esimerkin 1.4.1 pistetulo lasketaan Octavella seuraavalla tavalla: Ex:DC1

```
octave:1> a= [2; 3; -4];
octave:2> b = [1; 2; 3];
octave:3> ptulo = dot(a,b)
ptulo = -4
```

Pistetulo on siis helppo laskea koordinaattien avulla, vaikka emme tietäisikään vektoreiden välistä kulmaa. Kaksi pistetulon ominaisuutta tulee esiin varsin usein:

1. Kaksi vektoria, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat kohtisuorassa jos ja vain, jos niiden pistetulo on nolla.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

2. Vektorin pituuden neliö on sen pistetulo itsensä kanssa.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}.$$

Määritelmä 1.4.4. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruuden vektoria ja olkoon γ niiden välinen kulma. Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristitulo $\vec{a} \times \vec{b}$ on vektori, jonka pituus on

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \gamma,$$

ja suunta määräytyy seuraavasta kolmesta ehdosta

1. vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,
2. vektorit $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,
3. vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ (tässä järjestyksessä!) muodostavat positiivisesti suunnistetun systeemin.⁴

DCintro_def1

⁴Ehdot 1–3 merkitsevät sitä, että ristitulovektori on kohtisuorassa $\vec{a}$:n ja $\vec{b}$:n tasoa vastaan ja osoittaa tämän tason yläpuolelle.

Määritelmässä siis viitataan vektoreiden pituuksiin ja niiden väliseen kulmaan. Jos voimme valita koordinaatiston sopivasti, niin ristitulo voidaan rakentaa kuin lankkuaita. Aina ei ole järkevää käyttää montaa koordinaatistoa samassa laskussa, ja seuraava konstruktio jääkin siksi erikoisuudeksi, jota vähän käytetään. Sen avulla on kuitenkin helppo osoittaa että ristitulo noudattaa osittelulakia, mikä edelleen avaa meille kaavat, joilla ristitulon lasku voidaan tehdä vektoreiden koordinaattien avulla helposti.

Lause 1.4.5. *Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruuden vektoria ja olkoon $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ niiden välinen kulma. Asetetaan koordinaatisto siten, että z -akseli on vektorin $\vec{a}$ suuntainen. x - ja y -akselit voidaan valita vapaasti, kuitenkin siten että syntyvä koordinaatisto on suorakulmainen ja positiivisesti suunnistettu. Olkoon vektoreiden esitykset tässä koordinaatistossa*

$$\begin{aligned}\vec{a} &= |\vec{a}| \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = \overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Ristitulo $\vec{a} \times \vec{b}$ voidaan nyt konstruoida kolmella askelella seuraavasti:

1. Projisoidaan P koordinaatiston (x, y) -tasoon. Projektiopiste on $P_{xy} = (b_x, b_y, 0)$ ja suuntajanan $\overrightarrow{OP_{xy}}$ pituus on $|\vec{b}| \sin \gamma$.
2. Kierretään suuntajanaa $\overrightarrow{OP_{xy}}$ kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan (x, y) -tasossa. Kierretty suuntajana on

$$\overrightarrow{OP_{xy, \text{rot}}} = -b_y \vec{i} + b_x \vec{j}.$$

3. Ristituluvektori saadaan nyt kertomalla edellä saatu vektori vektorin $\vec{a}$ pituudella:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \overrightarrow{OP_{xy, \text{rot}}} = -b_y |\vec{a}| \vec{i} + b_x |\vec{a}| \vec{j}.$$

Th:Cross1

Perustelu: Pisteet O , P ja P_{xy} muodostavat $\vec{a}$:n ja $\vec{b}$:n määräämässä tasossa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on $|\vec{b}|$. Vaakasuora kateetti on pituudeltaan $|\overrightarrow{OP_{xy}}| = |\vec{b}| \sin \gamma$. Kierretty vektori on yhtä pitkä. Lopullisen ristituluvektorin pituus on $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \gamma$, kuten pitääkin.

Se, että kolmannen askeleen lopussa saatu ristituluvektori on kohtisuorassa vektoreita $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vastaan on konstruktion mukaan selvä. Riittävän hyvällä avaruudellisella hahmotuskyvyllä varustettu lukija voi todistaa tämän. Onneksi voimme tarkistaa kohtisuoruuden myös yksinkertaisella laskulla

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= (-b_y |\vec{a}| \vec{i} + b_x |\vec{a}| \vec{j} + 0 \vec{k}) \cdot (-0 \vec{i} + 0 \vec{j} + |\vec{a}| \vec{k}) = 0 \\ &\longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} &= (-b_y |\vec{a}| \vec{i} + b_x |\vec{a}| \vec{j} + 0 \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = 0 \\ &\longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}\end{aligned}\tag{1.13}$$

Kolmikon $\vec{a}$, $\vec{b}$, ja $\vec{a} \times \vec{b}$ positiivinen suunnistus nähdään seuraavasti: aseta peukalo, etusormi ja keskisormi yhdensuuntaisina vektorin $\vec{a}$ suuntaisesti. Pidä peukalo $\vec{a}$:n suuntaisena, mutta

käännä etu- ja keskisormi $\vec{b}$:n suuntaiseksi. Pidä peukalo ja etusormi paikallaan, mutta jatka keskisormen kääntämistä samaan suuntaan, kunnes se on xy -tasossa kohtisuorassa peukaloa vastaan. Lopuksi käännä keskisormea $\pi/2$ positiiviseen kiertosuuntaan xy -tasossa. Nyt peukalo on $\vec{a}$:n suuntainen, etusormi on $\vec{b}$:n suuntainen ja keskisormi on ristitulon $\vec{a} \times \vec{b}$ suuntainen. $\square$

Edellisen lauseen konstruktiota emme tässä opetusmonisteessa sovelle käytännössä kuin kerran. Se tapahtuu seuraavan lauseen todistuksessa.

Lause 1.4.6. *Olko $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kolme avaruusvektoria ja olko r reaaliluku. Silloin*

- (1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$,
- (2) $(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b})$
- (3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- (4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Th:Cross2

Perustelu: (1) Määritelmän mukaan on selvää, että $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$. Kun haemme ristitulo-vektorille $\vec{a} \times \vec{b}$ suunnan oikean käden säännöllä, asetamme peukalon vektorin $\vec{a}$ suuntaiseksi ja etusormen vektorin $\vec{b}$ suuntaiseksi. Nyt keskisormi osoittaa ristitulon suunnan. Kun teemme saman ristitulon $\vec{b} \times \vec{a}$ osalta, niin peukalo ja etusormi vaihtavat paikkoja, jolloin keskisormi kääntyy osoittamaan päinvastaiseen suuntaan kuin edellä.

(2) Seuraa suoraan määritelmästä.

(3) Tarkastellaan vektoreita käyttäen suorakulmaista koordinaatistoa, jonka z -akseli on $\vec{a}$ -vektorin suuntainen. Silloin ristitulot voidaan määrittää kuten lauseessa 1.4.5. Nyt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= -(b_y + c_y)|\vec{a}|\vec{i} + (b_x + c_x)|\vec{a}|\vec{j} \\ &= (-b_y|\vec{a}|\vec{i} + b_x|\vec{a}|\vec{j}) + (-c_y|\vec{a}|\vec{i} + c_x|\vec{a}|\vec{j}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \end{aligned}$$

(4) Periaatteessa voisimme tehdä kuten kohdassa (3), mutta helpommalla pääsemme, kun vetoamme kohtiin (1) ja (3) seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &\stackrel{(1)}{=} -(\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})) \stackrel{(3)}{=} -(\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}) \\ &\stackrel{(1)}{=} \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

$\square$

laDCintro_lausel

Lause 1.4.7. *Vektoreiden $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ ristitulo on*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Perustelu:

Määritelmästä seuraa, että $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ ja

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}\end{aligned}$$

Nämä ja osittelulait (lauseen ^[Th:Cross2]1.4.6 kohdat (3) ja (4)) antavat seuraavan tuloksen

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} \\ &\quad + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} \\ &\quad + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} \\ &= +a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} \\ &\quad -a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} \\ &\quad +a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.\end{aligned}$$

□

Esimerkki 1.4.8. Laskemme tarkistuksen vuoksi esimerkkinä ^[Ex:DC1]1.4.1 ristitulon ensin käsin, sitten Octavella. ‡

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \text{ ja} \\ \vec{b} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \\ &= (3 \cdot 3 - (-4) \cdot 2) \vec{i} + ((-4) \cdot 1 - 2 \cdot 3) \vec{j} + (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) \vec{k} \\ &= 17\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Octavella

```
octave:2> a = [2; 3; -4];
octave:3> b = [1; 2; 3];
octave:4> rtulo = cross(a,b)
rtulo =

17
-10
1
```

Edellä todetun perusteella voimme tehdä seuraavan yhteenvedon yhdensuuntaisuuden tutkimisesta pistetulon ja ristitulon avulla:

Lause 1.4.9. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi vektoria ja γ niiden välinen kulma. Silloin

$$\begin{aligned}
 (\gamma = 0) \quad \text{samansuuntaisuus:} \quad & \vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|, \\
 (\gamma = \pi) \quad \text{vastakkaissuuntaisuus:} \quad & \vec{a} \updownarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|, \\
 (\gamma = 0, \text{ tai } \gamma = \pi) \quad \text{yhdensuuntaisuus:} \quad & \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \\
 (\gamma = \frac{\pi}{2}) \quad \text{kohtisuoruus:} \quad & \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \\
 (\gamma < \frac{\pi}{2}) \quad \text{terävä kulma:} \quad & \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \\
 (\gamma > \frac{\pi}{2}) \quad \text{tylppä kulma:} \quad & \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0.
 \end{aligned}$$

1.5 Skalaari- ja vektoriprojektiot

Sec:la1-Projektio

Edellä esimerkissä ^{Exa:Vec1} voima jaettiin vaakasuoraan ja sitä vastaan kohtisuorassa olevaan pys-
tysuoraan komponenttiin. Jatkossa ”vaakasuoran” sijassa on jokin muu suunta. Edellisessä
kappaleessa esitellyt pistetulo ja ristitulo antavat työkalut tähän komponenttien erotteluun.

1.5.1 Vektorin projektio vektorin suuntaan

Ssec:VecProj

Tasovektoreiden tapauksessa tämän kappaleen asiat ovat helpommin piirrettävissä, joten
aloitamme siitä. Kuvaan ^{Fig:VecQComp1} 1.17 on piirretty kaksi tasovektoria $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ja $\vec{b}$. Piirretään pisteen
 P kautta vektorin $\vec{b}$ suuntainen apusuora, ja piirretään pisteen Q kautta apusuora, joka on
kohtisuorassa ensin piirrettyä apusuoraa vastaan. Toinen apusuora on myös kohtisuorassa
vektoria $\vec{b}$ vastaan. Lisätyt apusuorat leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä R . Merki-
tään

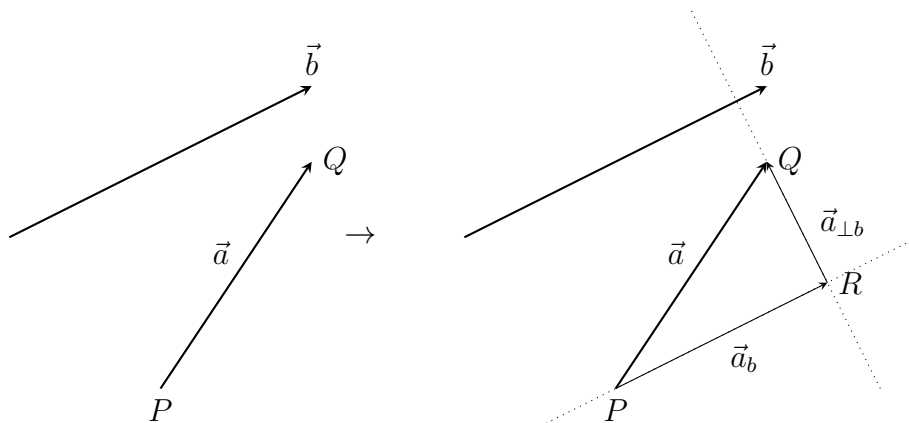
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PR} &= \vec{a}_b && \text{”vektorin } \vec{b} \text{ suuntainen } \vec{a} \text{:n komponentti”, ja} \\
 \overrightarrow{RQ} &= \vec{a}_{\perp b} && \text{”vektoria } \vec{b} \text{ vastaan kohtisuora } \vec{a} \text{:n komponentti”} .
 \end{aligned}$$

Nyt $\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_{\perp b}$, ja vektori $\vec{a}$ on siis jaettu kahteen osaan, joista ensimmäinen on $\vec{b}$:n
suuntainen ja toinen on $\vec{b}$:tä vastaan kohtisuora.

Avaruusvektoreiden tapauksessa edellinen konstruktio vaatii huolellisuutta toisen apusuo-
ran valinnassa. Emme tee konstruktioista avaruusversiota, vaan määrittelemme komponentit
helpolla ja yleisellä tavalla:

Määritelmä 1.5.1. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi tasovektoria, tai kaksi avaruusvektoria. Jos $\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_{\perp b}$, missä $\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{b}$ suuntainen ja $\vec{a}_{\perp b}$ on kohtisuorassa vektoria $\vec{b}$ vastaan, niin
sanomme, että

$\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{b}$ suuntainen vektorin $\vec{a}$ komponentti,



Kuva 1.17: Vektorin $\vec{a}$ komponentit: $\vec{b}$:n suuntainen komponentti $\vec{a}_b$, ja $\vec{b}$:tä vastaan kohtisuora komponentti $\vec{a}_{\perp b}$

Fig:VecOComp1

$\vec{a}_{\perp b}$ on vektoria $\vec{b}$ vastaan kohtisuora vektorin $\vec{a}$ komponentti,

Sanomme myös, että $\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{a}$ vektoriprojektio vektorin $\vec{b}$ suuntaan.

Vektorin $\vec{a}$ skalaariprojektio vektorin $\vec{b}$ suuntaan, on

$$a_b = \begin{cases} +|\vec{a}_b|, & \text{kun } \vec{a}_b \uparrow\uparrow \vec{b} \\ -|\vec{a}_b|, & \text{kun } \vec{a}_b \uparrow\downarrow \vec{b} \end{cases}.$$

Vektoriprojektio on siis vektori ja skalaari projektio on luku. Projektioille on olemassa helpot kaavat pistetulon avulla.

Lause 1.5.2. Olkoon $\vec{b}_0$ vektorin $\vec{b}$ suuntainen yksikkövektori (eli $\vec{b}_0 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$), ja olkoon γ vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma. Silloin

$$\begin{aligned} \vec{a}_b &= |\vec{a}| \cos \gamma \vec{b}_0 \\ &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|} \vec{b}_0 = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{b})} \vec{b}, \\ a_b &= |\vec{a}| \cos \gamma = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}}. \end{aligned}$$

Perustelu: On selvää, että lauseen kaavasta saatu komponentti $\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{b}$ suuntainen. On vielä osoitettava, että $(\vec{a} - \vec{a}_b) \perp \vec{b}$. Tämä on suora läpilasku:

$$(\vec{a} - \vec{a}_b) \cdot \vec{b} = \left(\vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{b})} \vec{b} \right) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{b})} \vec{b} \cdot \vec{b}) = 0.$$

□

Jos $\vec{b}$ on yksikkövektori (jonka pituus on siis yksi), niin vektoriprojektion ja skalaariprojektion kaavat saavat hyvin yksinkertaiset muodot

Th:VecProj1

Lause 1.5.3. Jos $\vec{e}$ on yksikkövektori, niin

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= (\vec{a} \cdot \vec{e}) \vec{e}, \\ a_e &= \vec{a} \cdot \vec{e}\end{aligned}$$

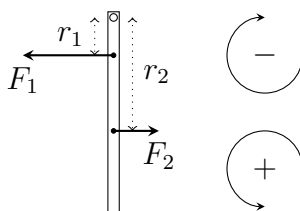
Perustelu: HT $\square$

Lauseen [Th:VecProj1](#) 1.5.3 kaavat ovat päteviä vain, jos $\vec{e}$ on yksikkövektori. Jos laskija käyttää usein kyseisiä kaavoja, niin on inhimillistä alkaa ajatella, että ”näinhän tämä aina lasketaan”. (Muista: Lauseen [Th:VecProj1](#) 1.5.3 kaavat eivät ole tosia, jos $|\vec{e}| \neq 1$.)

1.5.2 Voiman momentti pisteen suhteen tasossa

Ssec:FMomPl

Esimerkki 1.5.4. Tarkastellaan kuvan [fig:vmP01](#) 1.18 mukaista tilannetta, jossa tanko, jonka pituus on $L = 50$ cm on ripustettu yläpäästään siten, että se pääsee kiertymään ripustuspisteensä ympäri. Tankoon vaikuttaa paino $G = 20$ N alaspäin, jonka vaikutuspiste on tangon keskipiste 25.0 cm ripustuspisteestä. Lisäksi tankoon vaikuttaa tukivoima $\vec{T}$ ripustuspisteeseen, ja kaksi vaakasuoraa voimaa: $F_1 = 12.0$ N vasemmalle (vaikutuspiste $r_1 = 10.0$ cm ripustuspisteestä) ja $F_2 = 6.0$ N oikealle (vaikutuspiste $r_2 = 30.0$ cm ripustuspisteestä). Ensimmäinen voima pyrkii kiertämään tankoa negatiiviseen kiertosuuntaan (myötäpäivään), ja toinen voima pyrkii kiertämään tankoa positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään). Kuvaan ei ole piirretty ripustuspisteeseen vaikuttavaa tukivoimaa, eikä massakeskipisteeseen vaikuttavaa painoa – ne otetaan mukaan seuraavassa esimerkissä. Kumpaan suuntaan tanko alkaa kiertyä? †



Kuva 1.18: Kilpailevat momentit.

fig:vmP01

Ratkaisevia ovat nyt voimien momentit (momentti = voima kertaa varsi). Momentit ovat

$$\begin{aligned}M_1 &= -r_1 F_1 = -0.100\text{m} \cdot 12.0\text{ N} = -1.20\text{ Nm} \\ M_2 &= +r_2 F_2 = +0.300\text{m} \cdot 6.0\text{ N} = +1.80\text{ Nm}\end{aligned}$$

Momenttien merkit määräytyvät siitä, mihin kiertosuuntaan momentti pyrkii kiertämään kappaletta. Tämä vaatii laskijalta harkintaa. Kokonaismomentti on $M_1 + M_2 = +0.60$ Nm, joten tanko alkaa kiertyä positiiviseen suuntaan.

Merkit saadaan kätevästi ilman erillistä harkintaakin. Upotetaan taso avaruuden x, y -tasoon, ja korvataan varret vektoreilla kiertopisteestä voiman vaikutuspisteeseen. Momentti lasketaan kaavalla

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Nyt

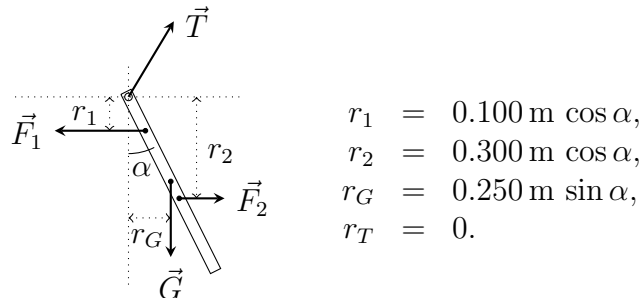
$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -0.100 \text{ m } \vec{j} \times (-12.0 \text{ N } \vec{i}) = -1.20 \text{ Nm } \vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -0.300 \text{ m } \vec{j} \times 6.0 \text{ N } \vec{i} = 1.80 \text{ Nm } \vec{k}$$

Esimerkki 1.5.5. Jatketaan edellisen esimerkin tarkastelua. Tanko kiertyy kulman α verran. Tukivoimalla ei edelleenkään ole momenttia, koska sen varsi on nolla, mutta painolla on nyt momentti

$$M_G = -\frac{L}{2} \sin \alpha G.$$

(Ks. kuva [fig:vmP02](#) I.19) Millä kulman α arvolla kokonaismomentti on nolla? ‡



Kuva 1.19: Momenttien tasapaino.

fig:vmP02

Tasapainon momenttiehto on nyt

$$-r_1 F_1 + r_2 F_2 - r_G G = 0$$

$$\Leftrightarrow -0.100 \text{ m } \cos \alpha \cdot 12.0 \text{ N} + 0.300 \text{ m } \cos \alpha \cdot 6.0 \text{ N} - 0.250 \text{ m } \sin \alpha \cdot 20.0 \text{ N} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0.600 \text{ Nm } \cos \alpha - 5.00 \text{ Nm } \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = 0.120$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0.1194 \text{ (rad)} = 6.84^\circ.$$

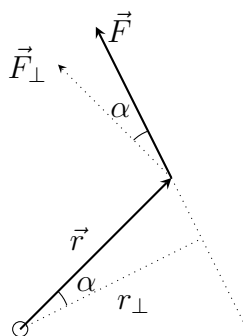
□

Edellä voimat olivat vaaka- tai pystysuoria, mikä aina helpottaa laskemista. Entä jos min-kään ei tarvitse olla pystyä tai vaakaa?

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan [fig:vmP03](#) I.20 mukaista tilannetta.

Kuvan merkinnöillä on seuraavat tulkinnat:

- $\vec{r}$ = vektori kiertopisteestä voiman vaikutuspisteeseen (varsivektori),
- $r_\perp$ = kiertopisteen etäisyys voiman vaikutussuorasta,
- $\vec{F}$ = voimavektori,
- $\vec{F}_\perp$ = voiman vartta vastaan kohtisuora komponentti,
- α = poikkeama kohtisuoruudesta.



Kuva 1.20: Voiman momentti tasossa.

fig:vmP03

Lause 1.5.6. Kuvan [1.20](#) merkinnöillä voiman momentti on

$$\begin{aligned} M &= (\pm) r F_{\perp} = (\pm) r_{\perp} F, \quad \text{ja} \\ \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = M \vec{k}. \end{aligned}$$

Perustelu: Tutkimme nyt vain kuvan [1.20](#) tilanteen. (Täydellinen perustelu vaatisi tutkimaan myös kuviot, joissa momentti on negatiivinen ja $\alpha < 0$)

(1) $M = (\pm) r F_{\perp}$ on momentin perusmääritelmän mukainen lauseke. (Huomaa, että voiman varren suuntaisella komponentilla ei ole momenttia.)

(2)

$$M = (\pm) r F_{\perp} = (\pm) r F \cos \alpha = (\pm) (r \cos \alpha) F = (\pm) r_{\perp} F.$$

(3)

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = r F \sin(\pi/2 - \alpha) = r F \cos \alpha = |M|.$$

Merkkien oikeellisuus nähdään oikean käden säännöllä.

□

On syytä korostaa, että edellisen lauseen kaavat koskevat tilannetta, jossa kaikki vektorit ovat samassa tasossa. Kyse on siis taso-ongelman käsittelystä. Erityisesti pyörivien koneiden yhteydessä kappaleen pyöriminen tapahtuu akselin eikä pisteen ympäri. Tämä tuo las-kutehtävään yhden uuden vektorin (akselin suunta).

Voiman momenttia akselin suhteen käsitellään myöhemmin luvussa [1.6](#) (sivu [16](#)).