

2 MATRIISILASKENTAA

-Matriisilaskentaa

2.1 Yhtälöryhmät

Sec:la1-YhtRyhmat

2.1.1 Rivioperaatiot

Ssec:la1-Rivioper

Sovitaan ensin merkintätavoista. Ratkaisemme ensin yksinkertaisen yhtälöparin

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad (2.1)$$

Lisäämme ensimmäisen yhtälön kahdella kerrottuna toiseen, jolloin yhtälöryhmä menee muotoon, josta ratkaisu on helppo saada esiin. (Huomaa merkinnät, jotka on tehty yhtälöryhmän oikealle puolelle.)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow + \end{array} \quad (2.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5y = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad (2.3)$$

Yhtälöstä (2) saadaan arvo $y = 2$ ja sijoittamalla tämä arvo yhtälöön (1) saadaan

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 2 &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x = -1$, $y = 2$.

Edellä käytetty rivioperaatio oli rivin lisääminen luvulla kerrottuna toiseen.

Seuraavassa esimerkissä käytämme samaa rivioperaatiota toistuvasti. Jokaisessa välimuodossa on yksi termi merkitty hakasuluin. Tätä termiä sanomme *pivot-termiksi*. Rivioperaatioiden kertoimet valitaan niin, että pivot-termin alapuolella olevat samanmuotoiset termit häviävät. Pivot-termin valintaa ja sitä seuraavia rivioperaatioita sanomme *pivotoinniksi*.

Esimerkki 2.1.1.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} [x] & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ -x & & & & + & 3z & - & w & = & 6 \\ & & - & y & + & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & - & w & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} *1 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow - \end{array} \quad \begin{array}{c} *2 \\ \\ \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ & & [y] & + & 2z & + & w & = & 8 \\ & & - & y & + & 2z & + & 3w & = & 2 \\ & & - & y & + & 4z & - & 5w & = & -3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} *1 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow + \end{array} \quad \begin{array}{c} *1 \\ \\ \\ \leftarrow + \end{array} \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & w & = & 8 \\ & & & & [4z] & + & 4w & = & 10 \\ & & & & 6z & - & 4w & = & 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} *3/2 \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.6)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & w & = & 8 \\ & & & & 4z & + & 4w & = & 10 \\ & & & & - & 10w & = & -10 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad (2.7)$$

$$(4) \longrightarrow w = 1$$

$$(3) \longrightarrow 4z + 4 \cdot 1 = 10 \quad \Leftrightarrow z = 1.5$$

$$(2) \longrightarrow y + 2 \cdot 1.5 + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow y = 4$$

$$(1) \longrightarrow x + 4 - 1.5 + 2 \cdot 1 = 2 \quad \Leftrightarrow x = -2.5$$

‡

Jatkossa tulemme käyttämään seuraavia rivioperaatioita:

Rivin lisääminen toiseen riviin luvulla kerrottuna. On selvää, että tämä rivioperaatio ei muuta yhtälöryhmän ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmässä (2.4) pivot-rivi (rivi 1) lisätään yhdellä kerrottuna riviin 2 ja pivot-rivi vähennetään kahdella kerrottuna rivistä 4. Huomaa, miten pivotoinnissa käytetyt kertoimet nähdään pivot-sarakkeen (x -sarake) vastaavan rivin kertoimista. Varmista edellisen esimerkin avulla, että varmasti ymmärrät rivioperaatiot.

Yhtälöryhmän (2.5) neljäs yhtälö syntyy seuraavasti

termi	4. rivi (2.4)	-2· YRC2s1a	pivot (2.4)	=	4. rivi (2.5)
x -termi	$2x$	$-2 \cdot x$	x	$=$	
y -termi	y	$-2 \cdot y$	y	$=$	$-y$
z -termi	$2z$	$-2 \cdot (-z)$	$(-z)$	$=$	$4z$
w -termi	$-z$	$-2 \cdot 2w$	$2w$	$=$	$-5w$
RHS	1	$-2 \cdot 2$	2	$=$	-3

Nyrkkisääntö: Rivioperaatiota tehtäessä käydään läpi kaikki sarakkeet, myöskin RHS.

Rivin kertominen (tai jakaminen) nolasta eroavalla luvulla.

Kahden rivin vaihtaminen.

On selvää, että rivioperaatiot eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisua. Tavoite onkin nyt muuttaa yhtälöryhmän muotoa muuttamatta ratkaisua. Pyrimme siihen, että muoto saadaan sel-laiseksi, että viimeisessä yhtälössä on vain yksi muuttuja w , joka saadaan ratkaistua tästä yhtälöstä. Kun toiseksi viimeinen yhtälö viedään muotoon, jossa esiintyy edellisen muuttu-jan lisäksi vain yksi muu muuttuja (tässä w :n lisäksi z), niin sijoittamalla w :n arvo yhtälöön saadaan uusi muuttuja z ratkaistua.

Useimmissa tapauksissa tavoittelemamme muoto saadaan helposti suorittamalla peräkkäi-set pivotoinnit seuraavasti. Ensimmäiseksi pivot-termiksi valitaan ensimmäisen yhtälön x -termi. Toiseen pivotointiin valitsemme pivot-termiksi toisen yhtälön y -termin. Kolmanteen pivotointiin valitsemme pivot-termiksi kolmannen yhtälön z -termin. Jne. Normaali ratkaisu onkin siis valita seuraavaksi pivot-termiksi ”seuraava muuttuja – seuraava rivi”. Näin jat-kaen yhtälöryhmä saa tavanomaiselle ratkaisulle tyypillisen kolmiomaisen muodon.

Joskus ”seuraava muuttuja – seuraava rivi” -periaatteen mukaisessa paikassa on tyhjää; ha-luttu termi puuttuu. Silloin on etsittävä haluttua muuttujaa sisältävää yhtälöä alemmilta ri-veiltä. Jos tällainen rivi löytyy, vaihdetaan se pivot-rivin paikalle ja jatketaan normaalisti. Jos muuttujaa ei esiinny millään jäljellä olevalla rivillä, niin siirrymme seuraavaan muut-tujaan (sarakeeseen). Jos jouduimme hyppäämään pivotoinneissa yhden sarakkeen yli, on tämä merkille pantava asia. Pivotoimaton sarake kannattaa merkitä käsin laskettaessa, jot-ta varmasti muistaa jatkossa huomioda sen oikein. Tämän kappaleen esimerkeissä pivot-termit on merkitty hakasuluin. Pivotoinneissa yli-hypätty sarake erottuu siitä, ettei sillä ole viimeisessä esityksessä pivot-merkintää.

Seuraavat esimerkit valaisevat asiaa.

Esimerkki 2.1.2.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} [x] & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ -3x & - & 3y & & & - & w & = & 1 \\ & + & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & + & 10w & = & 1 \end{array} \right. \begin{array}{c} *3 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow - \end{array} \begin{array}{c} *2 \\ \\ \\ \end{array} \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5w & = & 4 \\ & & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & y & + & z & + & 6w & = & -1 \end{array} \right. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{vaihdetaan} \\ \end{array} \quad (2.9)$$

Uudeksi pivot-termiksi ei nyt voida ottaa toisen yhtälön y -termiä. Koska haluamme edetä systemaattisesti, vaihdamme toisen ja kolmannen rivin keskenään ja jatkamme sen jälkeen

systemaattisesti.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & [y] & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & 3z & + & 5w & = & 4 \\ & & & & y & + & z & + & 6w & = & -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.10)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & (y) & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & [3z] & + & 5w & = & 4 \\ & & & & 3z & + & 3w & = & 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & (y) & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & (3z) & + & 5w & = & 4 \\ & & & & [-2w] & = & -4 \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad (2.12)$$

$$(4) \rightarrow w = (-4)/(-2) = 2 \quad (2.13)$$

$$(3) \rightarrow z = (4 - 5 \cdot 2)/3 = -2 \quad (2.14)$$

$$(2) \rightarrow y = -1 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = -11 \quad (2.15)$$

$$(1) \rightarrow x = 1 - (-11) - (-2) - 2 \cdot 2 = 10 \quad (2.16)$$

Saatu ratkaisu kannattaa aina tarkistaa sijoittamalla saadut arvot **alkuperäiseen** yhtälöryhmään:

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 10 & + & (-11) & + & (-2) & + & 2 \cdot 2 & = & 1 & ok \\ -3 \cdot 10 & - & 3(-11) & & & - & 2 & = & 1 & ok \\ & + & (-11) & - & 2(-2) & + & 3 \cdot 2 & = & -1 & ok \\ 2 \cdot 10 & + & 3(-11) & + & 3(-2) & + & 10 \cdot 2 & = & 1 & ok \end{array} \right. \quad (2.17)$$

‡

Joskus käy niin, että jostakin yhtälöstä häviävät kaikki muuttujat. Jos syntyvä yhtälö on tyyppiä $0 = 0$, niin se on (triviaalisti) tosi. Vaihdetaan tämä yhtälö ryhmän viimeiseksi ja jatketaan normaalisti.

Jos yhtälö on tyyppiä $0 = a$ ($a \neq 0$), niin yhtälö on epätosi ja yhtälöryhmällä ei voi olla yhtään ratkaisua, joten ratkaisun etsiminen voidaan lopettaa.

Jos on syntynyt epätosi yhtälö, tai kaikki pivotoimattomat yhtälöt ovat triviaaleja, päätämme seuraavasti:

(1) Jos on syntynyt epätosi yhtälö,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \quad \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 5 \quad \text{epätosi} \rightarrow \text{ei ratkaisua} \\ \quad \quad \quad \star + \star + \dots + \star = \star \\ \quad \quad \quad \star + \star + \dots + \star = \star \end{array} \right.$$

niin lopetamme ratkaisun etsimisen ja ilmoitamme, että **ratkaisujoukko on tyhjä**.

(2) Jos ei-triviaaleja yhtälöitä on yhtä monta kuin muuttujaa,

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11}x_1) + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \quad (a_{22}x_2) + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad (a_{nn}x_n) = b_n \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 0 \end{array} \right.$$

niin ratkaisemme muuttujien arvot palautuvien sijoitusten avulla.

(3) Jos ei-triviaaleja yhtälöitä on m kappaletta ja muuttujia on n kpl ja $m < n$, niin siirrämme RHS:iin muuttujat, joita ei esiinny pivot-termeissä. Pivotoinnissa mukana olleet muuttujat ratkaistaan peräkkäisillä sijoituksilla.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11}x_1) + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = a_{1(m+1)}x_{m+1} \dots a_{1n}x_n + b_1 \\ \quad \quad (a_{22}x_2) + \dots + a_{2m}x_m = a_{2(m+1)}x_{m+1} \dots a_{2n}x_n + b_2 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad (a_{mm}x_m) = a_{m(m+1)}x_{m+1} \dots a_{mn}x_n + b_m \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 0 \end{array} \right.$$

Ratkaisuja on nyt ääretön määrä. On kuitenkin oltava huolellinen vastausta kirjoittaessa. Yhtälöryhmä ei ole aina tosi. Periaate on se, että muuttujille $x_{m+1}, \dots, x_n$ voidaan antaa mitkä tahansa numeroarvot ja tämän jälkeen muuttujien $x_1, \dots, x_m$ arvot saadaan palautuvilla sijoituksella viimeisestä yhtälöryhmän muodosta.

Seuraavissa esimerkeissä tulevat vastaan kaikki edellä esitetyt tapaukset. Esimerkeissä yksinkertaistetaan välimuotoja siirtymällä kerroin-kaavio -esitykseen. Tämä merkitsee sitä, että jätämme muuttujat kirjoittamatta. Kertoimen paikka kaaviossa kertoo minkä muuttujan kerroin se on (sarake) ja mihin yhtälöön se kuuluu (rivi).

Esimerkki 2.1.3.

$$\begin{cases} [x] - y + z = 5 \\ -3x + 3y - 3z = 3 \\ 2y - 2z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} *3 \quad *2 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.19)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow \text{epätosi, ei ratkaisua} \\ \text{Vastaus:ratkaisujoukko on tyhjä.} \end{array} \quad (2.20)$$

‡

Esimerkki 2.1.4.

$$\begin{cases} [x] - y + z = -1 \\ -3x + 3y - 3z = 3 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} *3 \quad *2 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.22)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow | \text{vaihdetaan} \\ \leftarrow | \end{array} \quad (2.23)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow - \\ *2 \end{array} \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & [1] & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow - \end{array} \quad (2.25)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & (1) & 5 & 6 \\ 0 & 0 & (-12) & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad (2.26)$$

$$(3) \rightarrow z = 1 \quad (2.27)$$

$$(2) \rightarrow y = 6 - 5 \cdot 1 = 1 \quad (2.28)$$

$$(1) \rightarrow x = -1 + 1 - 1 = -1 \quad (2.29)$$

Vastaus: $x = -1$, $y = 1$ ja $z = 1$. ‡

Esimerkki 2.1.5.

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ -3x - 3y - z = 1 \\ + y - 2z + 3w = -1 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} *3 \\ \leftarrow + \end{array} \quad (2.31)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \text{vaihdetaan} \quad (2.32)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & [2] & 6 & 4 \end{array} \right) \quad (2.33)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 - 2w \\ y - 2z = -1 - 3w \\ 2z = 4 - 6w \end{cases} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad (2.34)$$

$$(3) \rightarrow z = (4 - 6w)/2 = 2 - 3w \quad (2.35)$$

$$(2) \rightarrow y = (-1 - 3w + 2(2 - 3w)) = 3 - 9w \quad (2.36)$$

$$(1) \rightarrow x = (1 - 2w - (3 - 9w) - (2 - 3w)) = -4 + 10w \quad (2.37)$$

Vastaus

$$\begin{cases} x = -4 + 10w \\ y = 3 - 9w \\ z = 2 - 3w \\ w = w \end{cases}$$

‡

Esimerkki 2.1.6.

$$\begin{cases} x - 2y - z + 2w = 1 \\ -3x + 3y - 5w = 1 \\ y + z = -1 \\ 2x + y + 3z + 6w = 5 \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} *3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad *2 \quad (2.39)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \text{vaihdetaan} \quad (2.40)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & [1] & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} *3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad *5 \quad (2.41)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.43)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x) - 2y + 2w = 1 + z \\ (y) = -1 - z \\ (w) = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$(3) \rightarrow w = 4 \quad (2.45)$$

$$(2) \rightarrow y = -1 - z \quad (2.46)$$

$$(1) \rightarrow x = 1 + z + 2(-1 - z) - 2 \cdot 4 = -9 - z \quad (2.47)$$

Vastaus

$$\begin{cases} x = -9 - z \\ y = -1 - z \\ z = z \\ w = 4 \end{cases}$$

‡

2.1.2 Linearikombinaatiot

Ssec:la1-LinComb

Yhtälöryhmää ratkaistaessa laskimme kerroinkaavion riveillä. Jatkossa vastaavia operaatioita tehdään niin paljon, että asiaan kannattaa sopia merkinnät ja laskusäännöt. Sovimme, että n :stä reaalityluvusta muodostuva yksirivinen kaavio

$$\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) \quad (2.48)$$

on *rivivektori*, ja vastaava yhdestä sarakkeesta muodostuva kaavio

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

on *sarakevektori*. Lukuja a_k sanotaan vektorin $\vec{a}$ *koordinaateiksi*. Sarakevektorille sovitaan myös merkintätapa

$$\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T \quad (2.50)$$

missä yläindeksi T merkitsee *transponointia*, missä rivit muutetaan sarakkeiksi ja sarakkeet riveiksi.

Määritelmä 2.1.7. Olkoon $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ kaksi n -alkioista rivivektoria ja $r \in \mathbb{R}$ reaalityluku. Määritellään reaalityluvulla kertominen ja vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku seuraavasti.

$$\begin{aligned} r \cdot \vec{a} &= r \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) \\ &= (r \cdot a_1 \ r \cdot a_2 \ r \cdot a_3 \ \dots \ r \cdot a_n) \\ \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) + (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n) \\ &= (a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3 \ \dots \ a_n + b_n) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) - (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n) \\ &= (a_1 - b_1 \ a_2 - b_2 \ a_3 - b_3 \ \dots \ a_n - b_n) \end{aligned}$$

Sarake vektoreiden kertominen reaalityluvulla ja sarakevektoreiden summa määritellään vastaavalla tavalla.

Esimerkki 2.1.8.

$$\begin{aligned} 5 \cdot (1 \ -2 \ 0) &= (5 \ -10 \ 0) \\ (1 \ -2 \ 0) + (2 \ 4 \ -1) &= (3 \ 2 \ -1) \end{aligned}$$

‡

Määritelmä 2.1.9. Vektorit $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ ovat samat (identtiset), jos niillä niiden koordinaatit ovat samat

$$a_k = b_k, \text{ kaikilla } k = 1, \dots, n$$

Määritelmä 2.1.10. Vektoria, jonka kaikki koordinaatit ovat nolliä sanomme nollavektoriaksi ja merkitsemme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Näillä merkinnöillä voimme nyt tehdä melko tutulta tuntuvaa laskentaa. Vektoreita sisältävien lausekkeiden käsittely muistuttaa hyvin paljon tuttua kirjainlaskentaa. Jos esimerkiksi olemme ratkaisemassa vektoria $\vec{x}$ yhtälöstä $\vec{a} + 3\vec{x} = \vec{x} + \vec{b} - \vec{a}$, niin voimme siirtää termejä ja yhdistellä samaa muotoa olevia termejä seuraavasti

$$\begin{aligned} \vec{a} + 3\vec{x} &= \vec{x} + \vec{b} - \vec{a} \\ \Leftrightarrow 3\vec{x} - \vec{x} &= \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} \\ \Leftrightarrow 2\vec{x} &= \vec{b} - 2\vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{x} &= \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \end{aligned}$$

Määritelmä 2.1.11. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ saman mittaisia vektoreita, ja olkoon $c_1, c_2, \dots, c_n$ reaalityyppisiä lukuja. Jos

$$\vec{a} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n$$

niin sanomme, että vektori $\vec{a}$ on edellä lausuttu u -vektoreiden lineaarikombinaationa. Lukuja $c_1, c_2, \dots, c_n$ sanomme lineaarikombinaation kertoimiksi. Jos ainakin yksi lineaarikombinaation kertoimista on nollasta eroava, sanomme lineaarikombinaation olevan ei-triviaalin.

Lause 2.1.12. Jos nollavektori $\vec{0}$ voidaan lausua ei-triviaalina lineaarikombinaationa vektoreista $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, niin jokin u -vektoreista voidaan lausua muiden u -vektoreiden lineaarikombinaationa.

lause12

Todistus: Olkoon

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

Koska lineaarikombinaatio on ei-triviaali, löytyy kertoimien joukosta nollasta eroavia kertoimia. Olkoon c_k indeksiltään pienin nollasta eroava kerroin. Silloin

$$\vec{u}_k = -\frac{c_{k+1}}{c_k}\vec{u}_{k+1} - \frac{c_{k+2}}{c_k}\vec{u}_{k+2} - \dots - \frac{c_n}{c_k}\vec{u}_n$$

□

Koska yhtälö voidaan samaistaa kerroinvektorinsa kanssa, voidaan lineaarikombinaatio määrittellä myös yhtälöille. Edellisessä kappaleessa käsitelty rivioperaatio, jossa yhtälöön lisätään pivot-yhtälö sopivalla luvulla kerrottuna, antaa tulokseksi yhtälön, joka on edellisen kaavion samalla rivillä olevan yhtälön ja edellisen kaavion pivot-yhtälön lineaarikombinaatio.

Kolme perusrivioperaatiota ovat sellaiset, että kun niitä sovelletaan toistuvasti, niin viimeisen kaavion jokainen yhtälö on lineaarikombinaatio alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöistä. Jos viimeisessä kaaviossa on triviaali yhtälö ($0 = 0$), niin edellisen lauseen mukaan alkuperäisessä yhtälöryhmässä voidaan jokin yhtälö lausua muiden lineaarikombinaationa, joten tämä yhtälö on turha ja voidaan poistaa. Poistettavan yhtälön tunnistaminen ei ole aina helppoa. Seuraavassa kappaleessa teemme yhtälöryhmän ratkaisusta algoritmin, jonka tarkka toteutus vastaa myös tähän kysymykseen.

2.1.3 Gaussin eliminointikeino

Sec:GaussJordan

Seuraavaksi muotoilemme algoritmin yhtälöryhmän ratkaisemiseksi. Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. . \quad (2.51)$$

Muuttujia on n kappaletta ja yhtälöitä on m kappaletta. Kerroin a_{ij} on muuttujan x_j kerroin i :nnessä yhtälössä. Keskitymme algoritmissa kertoimiin, joten esitämme yhtälöryhmän kerroinkaaviona

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Yhtälöryhmän i :nnettä yhtälöä vastaa kaavion i :s rivi

$$w_i = \left(\begin{array}{ccccc} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \end{array} \right) \quad (2.53)$$

Algoritmi muokkaa kaaviota kierros kierrokselta ja merkitsemme tarvittaessa kaavion järjestysnumeron $k = 1, 2, \dots$ yläindeksinä. (a_{ij}^k on siis muuttujan x_j kerroin k :nnen kaavion i :nnessä yhtälössä.)

Koska lopullinen algoritmi sisältää lukuisia poikkeustapausten aiheuttamia varmistuksia ja on siksi kummallisen tuntuinen ensi lukemalta, esitämme ensin erikoistapauksen, jolla saa tuntuman perusratkaisuun.

Algoritmi, Gaussin eliminointi, helppo tapaus.

Seuraava algoritmi olettaa, että muuttujia ja yhtälöitä on sama määrä ($m = n$), ja minkään yhtälön LHS:ia ei voida lausua muiden yhtälöiden LHS:ien lineaarikombinaationa. Oletus merkitsee, että yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu ja monet yleisen algoritmin tarkistukset voidaan jättää pois.

Alg: GaussJordanI

Gaussin algoritmi, versio I helpossa tapauksessa.

```
(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) for  $k = 1$  to  $n - 1$ 
(3)   % (Etsitään pivot-alkio)
(4)   if  $a_{kk}^k = 0$ 
(5)   then
(6)     etsi samasta sarakkeesta alemmalta riviltä alkio
(7)      $a_{tk}^k \neq 0, t > k$  ja vaihda rivit  $w_t$  ja  $w_k$ .
(8)   endif
(9)   % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(10)  for  $j = 1$  to  $k$ 
(11)     $w_j^{k+1} = w_j^k$ ;
(12)  endfor
(13)  for  $j = k + 1$  to  $m$ 
(14)     $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(15)  endfor
(16) endfor
(17) (% Palautuvat sijoitukset)
(18) for  $p = n$  downto  $1$ 
(19)    $x_p = (b_p^k - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}^k x_j) / (a_{pp}^k)$ 
(20) endfor
```

aussJordanII

Gaussin algoritmi, versio II helpossa tapauksessa.

```
(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) for  $k = 1$  to  $n - 1$ 
(3)   % (Etsitään pivot-alkio)
(4)   if  $a_{kk}^k = 0$ 
(5)   then
(6)     etsi samasta sarakkeesta alemmalta riviltä alkio
(7)      $a_{tk}^k \neq 0, t > k$  ja vaihda rivit  $w_t$  ja  $w_k$ .
(8)   endif
(9)   % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(10)  for  $j = 1$  to  $k - 1$ 
(11)     $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(12)  endfor
(13)   $w_k^{k+1} = w_k^k$ ;
(14)  for  $j = k + 1$  to  $m$ 
(15)     $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(16)  endfor
(17) endfor
(18) (% Muuttujien arvot)
(19) for  $p = 1$  to  $n$ 
(20)    $x_p = b_p^k / a_{pp}^k$ 
(21) endfor
```

Versio II:ssa ei tarvita palautuvia sijoituksia. Sen vuoksi moni pitää toista versiota parempana. Kuitenkin se on herkempi pyöristysvirheille ja versiota I pidetään siksi teoreettisesti parempana.

Esimerkki 2.1.13. Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ x - 2y + z = -5 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä kummallakin edellä esitetyllä algoritmilla.

Versio I:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} *1 & *2 \\ \leftarrow - & \\ & \leftarrow - \end{array} \right. \quad (2.55)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \text{vaihdetaan} \quad (2.56)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 3 & -3 \\ 0 & (5) & -8 & 7 \\ 0 & 0 & (-2) & -2 \end{array} \right) \quad (2.57)$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \quad (2.58)$$

$$y = (7 - (-8) \cdot 1)/5 = 3 \quad (2.59)$$

$$x = (-3 - (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 1)/1 = 0 \quad (2.60)$$

Versio II:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} *1 & *2 \\ \leftarrow - & \leftarrow - \end{array} \right. \quad (2.61)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \text{vaihdetaan} \quad (2.62)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 3 & -3 \\ 0 & [5] & -8 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow + \\ *0.4 \end{array} \right. \quad (2.63)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & (5) & -8 & 7 \\ 0 & 0 & [-2] & -2 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} \leftarrow & \leftarrow \\ -0.1 & -4 \end{array} \right. \quad (2.64)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5) & 0 & 15 \\ 0 & 0 & (-2) & -2 \end{array} \right) \quad (2.65)$$

$$x = 0/1 = 0 \quad (2.66)$$

$$y = 15/5 = 3 \quad (2.67)$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \quad (2.68)$$

‡

Edellä esitetyissä algoritmeissa on vielä yksi merkittävä heikkous. Jos a_{kk} on pieni, mutta nolasta eroava (esim. $a_{kk} = 1.23 \cdot 10^{-10}$ niin version I rivillä (4) ehto on tarkkaan ottaen epätosi, vaikka useimmiten pivot-alkio pitäisi hakea alemmalta riviltä.

Selkein ja helposti ohjelmoitava ratkaisu on hakea itseisarvoltaan suurin kerroin joukosta $\{a_{kk}, a_{(k+1)k}, \dots, a_{nk}\}$. Jos itseisarvoltaan suurin kerroin on a_{qk} rivillä q , niin vaihdetaan rivit w_k ja w_q . Käsien laskettaessa tällainen rivinvaihto on usein tarpeetonta, mutta ohjelmoitaessa algoritmi tietokoneelle, tämä rivinvaihto on ehdottomasti tehtävä versio III:n mukaisesti.

Gaussin algoritmi, versio III helpossa tapauksessa.

Muuttuneet rivit (verrattuna versioon I) on merkitty tähdellä.

```

(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) for  $k = 1$  to  $n - 1$ 
(3*)   % (Etsitään pivot-rivi)
(4*)    $q = k$ ;
(5*)   for  $i = k + 1$  to  $n$ 
(6*)       if  $|a_{ik}| > |a_{qk}|$ 
(7*)       then
(8*)            $q = i$ ;
(9*)       endif
(10*)  endfor
(11*)  vaihda rivit  $w_k$  ja  $w_q$ 
(12)   % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(13)   for  $j = 1$  to  $k$ 
(14)        $w_j^{k+1} = w_j^k$ ;
(15)   endfor
(16)   for  $j = k + 1$  to  $m$ 
(17)        $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(18)   endfor
(19) endfor
(20) (% Palautuvat sijoitukset)
(21) for  $p = n$  downto 1
(22)      $x_p = (b_p^k - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}^k x_j) / (a_{pp}^k)$ 
(23) endfor

```

Esimerkki 2.1.14. Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ x - 2y + z = -5 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad (2.69)$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä muutetulla algoritmilla.

Versio III:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \leftarrow | \text{vaihdetään} \\ \leftarrow | \end{array} \right. \quad (2.70)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [2] & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *0.5 \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array} \right. *0.5 \quad (2.71)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (2) & 1 & -2 & 1 \\ 0 & [-2.5] & 4 & -3.5 \\ 0 & -2.5 & 2 & -5.5 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (2.72)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (2) & 1 & -2 & 1 \\ 0 & (-2.5) & 4 & -3.5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \quad (2.73)$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \quad (2.74)$$

$$y = (-3.5 - 4 \cdot 1)/(-2.5) = 3 \quad (2.75)$$

$$x = (1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1)/2 = 0 \quad (2.76)$$

‡

Algoritmi, Gaussin eliminointi, yleinen tapaus.

Seuraavaksi muotoilemme yleisemmän algoritmin, joka toimii kaikissa tilanteissa. Emme kirjoita täydellistä ohjelmaa, vaan tarkoitus on saada luettava esitys, josta ohjelmointitaitoinen lukija pystyy kirjoittamaan toimivan koodin.

Oletamme, että yhtälöitä on m kappaletta ja muuttujia on n kappaletta. Kun kirjoitamme algoritmin, varaudumme erityisesti seuraaviin erikoistapahtumiin.

- Pivointi epäonnistuu jossakin sarakkeessa.
- Yhtälöt loppuvat ennen kuin kaikki sarakkeet on pivotoitu.
- Syntyy epätosi yhtälö.
- Syntyy triviaali yhtälö $0 = 0$.

Tulemme algoritmissa joskus vaihtamaan sarakkeiden järjestystä. Jotta syntyvät kaaviot olisivat helposti luettavissa lisäämme kaavioon otsikko-rivin, jolta käy ilmi muuttuja, jonka kertoimesta on kysymys. Tämä ei ole oikea-oppista, mutta harjoitteluvaiheessa tarpeellista.

Erityisesti tulemme siirtämään kokonaisia sarakkeita RHS:ään. Siirron jälkeen yhtälöryhmän jokaisen yhtälön oikea puoli ei ole enää reaalityyppiä, vaan lineaarikombinaatio ykkösestä ja siirretyistä muuttujista. Vastaava kaavion rivin RHS-vektori on tämän lineaarikombinaation kerroinvektori. Käytämme tästä rivin k RHS-vektorista merkintää $\vec{r}_k$. Seuraava esimerkki valaisee asiaa. Esimerkki on käyty läpi sekä yhtälöryhmä- että kaaviomuodossa.

Esimerkki 2.1.15.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} [x] + 2y - z & = & 6 \\ 2x + 6y + 4z & = & 0 \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & rhs \\ [1] & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) + 2y - z & = & 6 \\ [2y] + 6z & = & -12 \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & rhs \\ (1) & 2 & -1 & 6 \\ 0 & [2] & 6 & -12 \end{array} \right) \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) + 2y & = & 6 + z \\ (2y) & = & -12 - 6z \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & rhs & z \\ (1) & 2 & 6 & 1 \\ 0 & (2) & -12 & -6 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} : 2 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) + 2y & = & 6 + z \\ (y) & = & -6 - 3z \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & rhs & z \\ (1) & 2 & 6 & 1 \\ 0 & (1) & -6 & -3 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \leftarrow - \\ *2 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) & = & 18 + 7z \\ (y) & = & -6 - 3z \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & rhs & z \\ (1) & 0 & 18 & 7 \\ 0 & (1) & -6 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{cases} x = 18 + 7z \\ y = -6 - 3z \end{cases}$$

‡

Gaussin algoritmi, versio IV, yleinen tapaus.

- (1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
- (2) $k = 1$, $siirretyt = 0$
- (3) repeat
- (4) % (Etsitään pivot-alkio)
- (5) määritä rivi q siten, että alkio a_{qk}^k on itseisarvoltaan suurin alkioista $\{a_{kk}^k, a_{(k+1)k}^k, \dots, a_{mk}^k\}$
- (6) if $a_{qk}^k = 0$
- (7) then
- (8) siirrä sarake k RHS:iin
- (9) $siirretyt = siirretyt + 1$;
- (10) else
- (11) vaida rivit w_q ja w_k .

```
(12)      % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(13)      for j = 1 to k
(14)           $w_j^{k+1} = w_j^k$ ;
(15)      endfor
(16)      for j = k + 1 to m
(17)           $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(18)      endfor
(19)      k = k + 1;
(20)  endif
(21) until k > m or k + siirretty > n
(22) % (Onko jäljellä pivotoimattomia sarakkeita?)
(23) if k + siirretty ≤ n
(24) then
(25)     siirrä pivotoimattomat LHS:n sarakkeet RHS:iin
(26) endif
(27) % (Onko jäljellä pivotoimattomia rivejä?)
(28) if k ≤ m
(29) then
(30)     jos jokin pivotoimattomista yhtälöistä on epätosi,
        niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. (LOPETA)
(31) endif
(32) % (Ratkaise LHS:n muuttujien arvot.)
(33) for q = k - 1 downto 1
(34)      $w_q = w_q / a_{qq}$ ;
(35)     for i = 1 to q - 1
(36)          $w_i = w_i - a_{iq} w_q$ ;
(37)     endfor
(38) endfor
(39) Tulkitse tulos.
```

2.1.4 Harjoituksia (4)

Harjoituksia

Tehtävä 2.1 Ratkaise lineaarinen yhtälörymä

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

LinYryhmat01

Tehtävä 2.2 Ratkaise lineaarinen yhtälörymä

$$\begin{cases} y - z = 8 \\ x + y + 4z = -5 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}.$$

LinYryhmat02