1 Liike pyörivässä koordinaatistossa, Coriolisvoima

Tarkastellaan kahta ortonormeerattua koordinaatistoa (kantaa) $E = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ja $W = \{\vec{w}_x, \vec{w}_y, \vec{w}_z\}$, joilla on yhteinen origo, mutta E pysyy paikallaan ja W pyörii akselin $\vec{\omega}$ ympäri. Pyörimisakseli $\vec{\omega}$ pysyy paikallaan kummankin koordinaatiston suhteen! Tarkastellaan pistettä P, jonka paikkavektorilla on esitykset

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \\
&= \tilde{x}(t)\vec{w}_x + \tilde{y}(t)\vec{w}_y + \tilde{z}(t)\vec{w}_z
\end{aligned}
$$

Kun pisteen P nopeus määritetään E-koordinaatistossa, saadaan

$$
\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z) = x'(t)\vec{e}_x + y'(t)\vec{e}_y + z'(t)\vec{e}_z.
$$

Kun W-koordinaatiston mukana pyörivä tarkkailija määrittää pisteen P nopeusvektorin, niin tulos on

$$
\vec{v}^\star(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{x}(t)\vec{w}_x + \tilde{y}(t)\vec{w}_y + \tilde{z}(t)\vec{w}_z) = \tilde{x}'(t)\vec{w}_x + \tilde{y}'(t)\vec{w}_y + \tilde{z}'(t)\vec{w}_z.
$$

Edellä paikkavektorin $\vec{r}(t)$ esitykset kahdessa eri koordinaatistossa esittivät samaa vektoria. On erittäin houkuttelevaa ajatella, että myös $\vec{v}(t)$ ja $\vec{v}^\star(t)$ esittäisivät samaa universaalia siirtymisnopeudeus-vektoria, mutta näin ei ole! Asia paljastuu, kun E-koordinaatiston mukana paikallaan pysyvä tarkkailija määrittää pisteen P nopeuden käyttäen $E^\star$ koordinaatiston esitystä, tulokseksi tulee

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\tilde{x}(t)\vec{w}_x + \tilde{y}(t)\vec{w}_y + \tilde{z}(t)\vec{w}_z\} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{x}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{w}_x + \tilde{x}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{w}_x}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{y}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{w}_y + \tilde{y}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{w}_y}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{z}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{w}_z + \tilde{z}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{w}_z}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \vec{v}^\star(t) + \tilde{x}(t)\vec{\omega} \times \vec{w}_x + \tilde{y}(t)\vec{\omega} \times \vec{w}_y + \tilde{z}(t)\vec{\omega} \times \vec{w}_z \\
&= \vec{v}^\star(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t)
\end{aligned}
$$

Seuraavaksi E koordinaatiston suhteen levossa oleva tarkkailija määrittää pisteen P kiihtyvyysvektorin käyttäen W koordinaatiston esitystä.

$$
\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}^\star(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\tilde{x}'(t)\vec{w}_x + \tilde{y}'(t)\vec{w}_y + \tilde{z}'(t)\vec{w}_z\} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\tilde{x}''(t)\vec{w}_x + \tilde{x}'(t)\frac{\mathrm{d}\vec{w}_x}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\tilde{y}''(t)\vec{w}_y + \tilde{y}'(t)\frac{\mathrm{d}\vec{w}_y}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\tilde{z}''(t)\vec{w}_z + \tilde{z}'(t)\frac{\mathrm{d}\vec{w}_z}{\mathrm{d}t}\right) \\
&\qquad + \vec{\omega} \times (\vec{v}^\star(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t)) \\
&= \vec{a}^\star(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^\star(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})
\end{aligned}
$$

Pyörivän koordinaatiston mukana kulkeva tarkkailija puolestaan näkee asian siten, että

$$\vec{a}^\star = \vec{a} \overbrace{- 2\vec{\omega} \times \vec{v}^\star(t)}^{\text{Coriolis-termi}} \underbrace{- \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{keskihaku-termi}}$$

Kaavan tyypilliset sovellusalueet ovat kappaleiden liikkeet maapallon pinnalla. Jos esimerkiksi ammumme tykin ammuksen paraabeliradalle Vaasasta kohden itää ja unohdamme ilmanvastuksen, niin periaatteessa ainoa voima, joka vaikuttaa ammukseen on kohtisuorasti alaspäin vaikuttava voima eli ammuksen paino. Käytännössä ammuksen rata ei näyttäisi olevan aivan näin yksinkertainen.

Todellisuudessa me tarkkailemme ammuksen rataa niin, että itse olemme mukana maapallon pyörimisliikkeessä. Edellisen kaavan mukaan

$$\vec{a}^\star = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}^\star(t) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

missä nyt $\vec{\omega}$ on maapallon pyörimisakseli (suunta etelästä pohjoiseen päin), $\vec{a}$ osoittaa maapallon keskipisteeseen ja $\vec{v}^\star$ osoittaa itään.

Kiihtyvyyden toinen termi, $-2\vec{\omega} \times \vec{v}^\star(t)$, osoittaa nyt yläviistoon oikealle. Kiihtyvyyden kolmas termi, $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, osoittaa kohtisuorasti poispäin pyörimisakselista siis myös yläviistoon oikealle. Jos siis tähtäämme paraabelirata-laskun perusteella, niin ammumme oikealta yli.