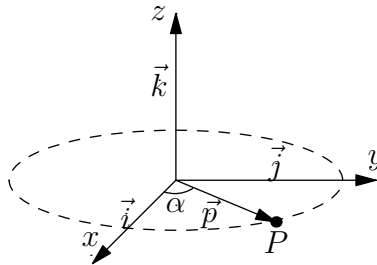


1 Pyörimisen kehänopeus

1.1 Pyöriminen tasossa.

Sijoitetaan seuraavassa vektorit xyz -koordinaatistoon, jonka koordinaattiakselien suuntavektorit ovat \vec{i} , \vec{j} ja \vec{k} . Tarkastellaan ensin suuntajanaa \overline{OP} , origosta xy -tason pisteeseen P . Hetkellä $t = 0$ pisteen P koordinaatit ovat $P = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Siis pisteen P paikkavektori alkuhetkellä on

$$\vec{p} = r \cos \alpha \vec{i} + r \sin \alpha \vec{j}.$$



Tarkastellaan liikettä, jossa suuntajanan origon puoleinen pää pysyy paikallaan, mutta toinen pää kiertää origoa siten, että suuntajana pyörii kuin kellon viisari tasaisella kiertonopeudella. Jos suuntajana pyörii pituutensa säilyttäen origon ympäri kulmanopeudella ω , niin silloin pisteen P paikkavektori hetkellä t on

$$\vec{p}(t) = r \cos(\alpha + \omega t) \vec{i} + r \sin(\alpha + \omega t) \vec{j}.$$

Pisteen P nopeus pyörimisliikkeessä on

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(r \cos(\alpha + \omega(t + dt)) \vec{i} + r \sin(\alpha + \omega(t + dt)) \vec{j}) - (r \cos(\alpha + \omega t) \vec{i} + r \sin(\alpha + \omega t) \vec{j})}{dt} \end{aligned}$$

Yksinkertaistetaan lauseketta merkinnällä $\alpha_t = \alpha + \omega t$ ja käytetään summakulman sinin ja kosinin kaavoja, jolloin saamme ¹ (ks. taulukkirja)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{r[(\cos(\alpha_t + \omega dt) \vec{i} + \sin(\alpha_t + \omega dt) \vec{j}) - (\cos(\alpha_t) \vec{i} + \sin(\alpha_t) \vec{j})]}{dt} \\ &= r \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[\cos \alpha_t \cos \omega dt - \sin \alpha_t \sin \omega dt - \cos \alpha_t] \vec{i} + [\sin \alpha_t \cos \omega dt + \cos \alpha_t \sin \omega dt - \sin \alpha_t] \vec{j}}{dt} \\ &= r \lim_{dt \rightarrow 0} \left\{ \left[\cos \alpha_t \frac{\cos \omega dt - 1}{dt} - \sin \alpha_t \frac{\sin \omega dt}{dt} \right] \vec{i} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left[\sin \alpha_t \underbrace{\frac{\cos \omega dt - 1}{dt}}_{\rightarrow 0} + \cos \alpha_t \underbrace{\frac{\sin \omega dt}{dt}}_{\rightarrow \omega} \right] \vec{j} \right\} \\ &= \omega r (-\sin \alpha_t + \cos \alpha_t) \end{aligned}$$

¹ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ja $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Suora lasku osoittaa, että $|\vec{v}(t)| = \omega r = \omega |\vec{p}(t)|$ ja $\vec{v}(t) \perp \vec{p}$. Lisäksi on selvää, että jos $\omega > 0$, niin vektorit $\{\vec{k}, \vec{p}, \vec{v}\}$ muodostavat oikeakätisen systeemin, joten

$$\vec{v} = \omega \vec{k} \times \vec{p}.$$

Tulos on edellä johdettu oikeaoppisesti vektorifunktion derivaattana. Toisaalta tulos on helppo nähdä koulufysiikan perusteella. Piste P kiertää ympyrärataa origon ympäri. Ympyräliikkeen kehänopeus on ωr ja kehänopeus on radan tangentin suuntainen. Siis kohtisuorassa suuntajanaa \overline{OP} ja vektoria \vec{k} vastaan. Kolmikon $\{\vec{k}, \vec{p}, \vec{v}\}$ oikeakätisyys on myös selvä. Siis

$$\vec{v} = \omega r \vec{k} \times \vec{p} = \omega \vec{k} \times \vec{p}.$$

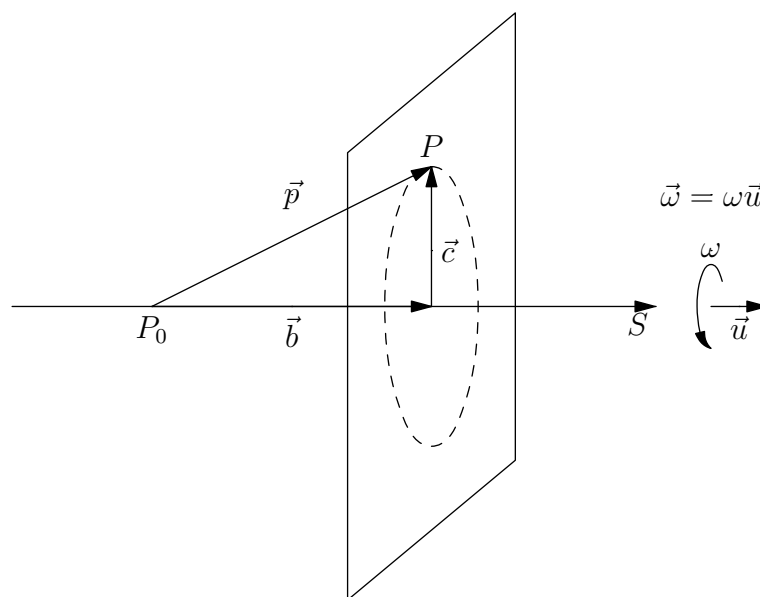
Pyörimisakselina oli nyt xyz -koordinaatiston z -akseli, joka kulkee origon kautta ja on vektorin \vec{k} suuntainen. Sovimme, että vektori $\vec{\omega}$ on pituudeltaan ω ja samansuuntainen pyörimisakselin \vec{k} kanssa. (Muista oikean käden sääntö: kun peukalo osoittaa pyörimisakselin $\vec{\omega}$ suuntaan, niin muut sormet osoittavat positiivisen kiertosuunnan akselin ympäri.) Tällä merkinnällä kehänopeus saa yksinkertaisen muodon

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{p}.$$

1.2 Pyöriminen akselin ympäri.

Toiseksi tarkastelemme liikettä, joka syntyy kun piste P kiertää akselia (suoraa) S ympyrärataa akselia vastaan kohtisuolassa tasossa vakioetäisyydellä akselistä. Olkoon yksikkövektori \vec{u} pyörimisakselin $S(P_0, \vec{u})$ suuntavektori. Kiinnitämme tarkastelun ajaksi origon akselin pisteeseen P_0 , jolloin pisteen P paikkavektori on $\vec{p} = \overline{P_0P}$. Paikkavektori \vec{p} voidaan jakaa akselin suuntaiseen komponenttiin \vec{b} ja akselia vastaan kohtisuoraan komponenttiin \vec{c} .

$$\vec{p} = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{b} \parallel \vec{u}, \quad \vec{c} \perp \vec{u}$$



Kun piste P kiertää akselia, kiertää P ja vektori \vec{c} akselin normaalitasossa. Edellisen luvun perusteella tiedämme, että pisteen P nopeus on

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{p}.$$

Viimeinen yhtäsuuruus perustuu siihen, että $\vec{\omega} \times \vec{p} = \vec{\omega} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{\omega} \times \vec{b} + \vec{\omega} \times \vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{c}$.