

Differentiaaliyhtälön *kertaluku* on yhtälössä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku. (Esim. $y'' + x^3y' = 0$ on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja $y''' - x^2 = 0$ on kolmannen kertaluvun diff.yhtälö.) DY on *lineaarinen*, jos se on muotoa

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x), \quad (5.16)$$

missä $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ ovat x :n funktioita. Esimerkiksi diff.yhtälö

$$y'' + x^3y' + x^2 = \sin x$$

on lineaarinen.

Kertalukua n olevan DY:n ratkaisu sisältää yleensä n parametria (vakiota). Tällaista ratkaisua sanotaan *yleiseksi ratkaisuksi*. Kun parametreille valitaan arvot, saadaan DY:n jokin *yksityisratkaisu*. Jos ratkaisua ei saada yleisestä ratkaisusta millään parametrien arvoilla, sanotaan ratkaisua *erikoisratkaisuksi*.

Esimerkki 5.1.5 DY:n $(y')^2 - xy' + y = 0$ yleinen ratkaisu on $y = Cx - C^2$. DY:n toteuttaa myös erikoisratkaisu $y = x^2/4$, jota ei saada yleisestä ratkaisusta millään parametrin C arvolla.

5.2 I kertaluvun differentiaaliyhtälöistä

5.2.1 Separoituva DY

DY on *separoituva*, jos se voidaan saattaa muotoon

$$\begin{aligned} \text{DY} &\Leftrightarrow g(y)y' = f(x) \\ &\Leftrightarrow g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \\ &\Leftrightarrow g(y)dy = f(x)dx \end{aligned} \quad (5.17)$$

josta yleinen ratkaisu saadaan integroimalla

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \quad (5.18)$$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(x) + C. \quad (5.19)$$

Perustelu: Malli kuvaa muuttujien x ja y muutosten suhdetta. Yhtälön (5.17) vasen puoli on funktion $G(y)$ differentiaali ja oikea puoli on funktion $F(x)$ differentiaali. Kun muuttujien x ja y arvoissa tapahtuu differentiaalisen pieni muutos, niin differentiaaliyhtälön (5.17) mukaan muutokset ovat sellaisia, että G :n ja F muutokset (differentiaalit) ovat yhtäsuuret. Jos nyt vakio C valitaan siten, että (5.19) on voimassa tarkastelun alussa, niin yhtälö on voimassa koko muutoksen ajan. \square

Esimerkki 5.2.1 Ratkaise DY: $y' = -xy$.

$$\begin{aligned}
DY &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -x dx \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x dx + C_1 \\
&\Leftrightarrow \ln |y| = -\frac{x^2}{2} + C_1 \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{x^2}{2} + C_1} \\
&\Leftrightarrow y = Ce^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.2.2 Ratkaise DY: $y' = \frac{x\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\begin{aligned}
DY &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + C \\
&\Leftrightarrow -2\sqrt{1-y} = -\sqrt{1-x^2} + C \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Huomaa, että yhtälö (5.20) on tehtävän implisiittinen ratkaisu. Ratkaisu voidaan esittää myös eksplisiittisessä muodossa

$$y = 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{1-x^2} - C)^2$$

Usein on makeasia, kumpi muoto on havainnollisempi.

Esimerkki 5.2.3 Ratkaise DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1}$$

Differentiaaliyhtälö on selvästi separoituva

$$\begin{aligned}
DY &\Leftrightarrow \int (y^4 + 1) dy = \int (x + 1) dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{5}y^5 + y = \frac{1}{2}x^2 + x + C
\end{aligned}$$

Ratkaisu saatiin helposti, mutta se on taas implisiittinen.

Esimerkki 5.2.4 Ratkaise DY

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{x-y}}{1+e^x} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{e^x e^{-y}}{1+e^x} \\ \Leftrightarrow \int e^y dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx + C \\ \Leftrightarrow e^y &= \ln(1+e^x) + C \\ \Leftrightarrow y &= \ln(\ln(1+e^x) + C) \end{aligned}$$

(Huomaa, että jos $C < 0$, niin $y(x)$ on määritelty vain, kun $x > \ln(e^{-C} - 1)$)

5.2.2 Muotoa $y' = f(\frac{y}{x})$ oleva DY

Jos DY on muotoa $y' = f(\frac{y}{x})$, niin sanomme sen olevan *homogeenifunktion määräämän*. Homogeenifunktion määräämä DY voidaan palauttaa separoituvaksi sijoituksella

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = u &\Leftrightarrow y = ux \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \end{aligned}$$

Kun tämä sijoitetaan DY:öön, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}x + u &= f(u) \\ \frac{du}{dx}x &= f(u) - u \\ \int \frac{du}{f(u) - u} &= \int \frac{dx}{x} + C \end{aligned}$$

Esimerkki 5.2.5 Ratkaise DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2}$$

Sijoitetaan yhtälöön

$$\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow \begin{cases} y &= ux \\ y' &= u'x + u \end{cases}$$

Sijoutuksen jälkeen saamme

$$\begin{aligned} \text{DY} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x + u &= \frac{(ux)^2 + xux - x^2}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x + u &= u^2 + u - 1 \\ \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2 - 1} &= \int \frac{dx}{x} + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| &= \ln |x| + \ln C_1 \\
\Leftrightarrow \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| &= \ln x^2 + \ln C_2 \\
\Leftrightarrow \frac{u-1}{u+1} &= Cx^2 \\
\Leftrightarrow u &= \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2} \\
\Leftrightarrow y &= ux = \frac{x+Cx^3}{1-Cx^2}
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.2.6 Ratkaise DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y-x}$$

DY on homogeenifunktion määräämää muotoa, sillä RHS = $2/(\frac{y}{x} - 1) = f(\frac{y}{x})$. Siis sijoitetaan

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} &= u \Leftrightarrow y = ux \\
\frac{dy}{dx} &= u + x \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

jolloin DY menee muotoon

$$\begin{aligned}
\text{DY} \Leftrightarrow u + x \frac{du}{dx} &= \frac{2x}{ux-x} = \frac{2}{u-1} \\
\Leftrightarrow x \frac{du}{dx} &= \frac{u^2 - u - 2}{1-u} \\
\Leftrightarrow \int \frac{1-u}{u^2 - u - 2} du &= \int \frac{1}{x} dx + C_1 \\
\Leftrightarrow \int \left(\frac{-1/3}{u-2} + \frac{-2/3}{u+1} \right) du &= \ln |x| + C_1 \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \ln |u-2| - \frac{2}{3} \ln |u+1| &= \ln |x| + \ln C_2 \\
\Leftrightarrow \ln |(u-2)(u+1)^2| &= \ln \left| \frac{1}{x^3} \right| + \ln C_3 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} - 2 \right) \left(\frac{y}{x} + 1 \right)^2 &= \frac{C}{x^3}
\end{aligned}$$

5.3 Lineaarinen 1. kertaluvun diff.yhtälö

ma5c.tex Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY on muotoa

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (\text{DY})$$

Tätä vastaava *homogeeninen* diff.yhtälö on

$$y' + f(x)y = 0. \quad (\text{HY})$$

Homogeeninen yhtälö (HY) on separoituva. Yhtälön (HY) ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \text{HY} &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -f(x)dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = -\int f(x)dx + \ln C_1 \\ &\Leftrightarrow y = Ce^{-\int f(x)dx} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Kaavaa (5.21) tärkeämpää on muistaa, että lineaarista DY:tä vastaava homogeeninen HY separoituu aina.

Lause 5.3.1 Jos $y = y_0(x)$ on homogeenisen yhtälön (HY) yleinen ratkaisu ja $y = y_1(x)$ on yhtälön (DY) eräs yksityisratkaisu, niin yhtälön (DY) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

Perustelu: Sijoitetaan $y(x)$ yhtälön (DY) vasenpuoleen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &y' + f(x)y \\ &= (y_0' + y_1') + f(x)(y_0 + y_1) \\ &= \underbrace{y_0' + f(x)y_0}_{=0} + \underbrace{y_1' + f(x)y_1}_{=g(x)} = g(x). \end{aligned}$$

Lauseen perusteella siis ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön yleisen ratkaisun löytämiseksi tulee määrittää vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu sekä alkuperäisen yhtälön jokin yksityisratkaisu. Ensimmäinen tehtävän osa on yleensä helppo, sillä HY separoituu aina. DY:n yksityisratkaisun löytäminen on usein vaikeampaa. Ennen kuin pohdimme yksityisratkaisun määrittämistä, käymme läpi yksinkertaisen esimerkin siitä, miten edellä ollutta lausetta käytetään.

Esimerkki 5.3.1 $y' - y = x$

(A) Etsitään ensin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu y_0 .

$$\begin{aligned} (\text{HY}) &\Leftrightarrow \frac{dy_0}{dx} - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy_0}{y_0} = \int dx + C_1 \\ &\Leftrightarrow \ln|y_0| = x + C_1 \\ &\Leftrightarrow y_0 = Ce^x \end{aligned}$$

(B) Toiseksi etsimme täydellisen yhtälön yksityisratkaisun.

$$y_1 = -x - 1$$

Systemaattinen menetelmä yksityisratkaisun löytämiseksi esitetään heti esimerkin jälkeen. Nyt tyydymme tarkistamaan, että arvauksemme on kelvollinen. ($y_1' - y_1 = (-1) - (-x - 1) = x$ (Ok).) Lauseen mukaan DY:n yleinen ratkaisu on nyt $y = y_0 + y_1$ eli

$$y = Ce^x - x - 1.$$

yksityisratkaisun löytäminen

Yksityisratkaisun löytämiseksi on kaksi keinoa, joista ensimmäinen (yrite) on helppoissa tapauksissa nopea ja tehokas, mutta ei aina onnistu. Toinen keino (vakion variointi) antaa aina ratkaisun, mutta on hieman työlämpi. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (5.22)$$

(B1) Yksityisratkaisun etsiminen yritteellä

”Arvataan” yhtälön (5.22) yksityisratkaisu lausekkeen $g(x)$ perusteella. Arvaus sisältää vakioita, jotka pitää määrittää sijoittamalla yrite yhtälöön. ”Arvaaminen” tuntuu epämatemaattiselta, mutta taitava laskija oppii pian hyvksi arvaajaksi niin, että lopulta kyse on lähinnä vakoiden arvojen laskemisesta. Seuraava taulukko auttaa oikean yritteen löytämisessä:

$g(x)$	yrite y_1
$ax + b$	$y_1 = Ax + B$
$ax^2 + bx + c$	$y_1 = Ax^2 + Bx + c$
ae^{kx}	$y_1 = Ae^{kx}$

Yritteen teossa on kaksi selvää sääntöä: (1) yritefunktio on samaa muotoa, kuin $g(x)$, (2) yritefunktio ei saa olla samaa muotoa, kuin homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun jokin termi. Jos $y_1(x)$ olisi luonnollinen yrite, mutta toinen sääntö estää sen käytön, niin yritetään funktiota $xy_1(x)$.

Esimerkki 5.3.2 $y' - y = e^{kx}, k \neq 1$.

Homogeeniyhtälö on

$$\begin{aligned} HY &\Leftrightarrow y_0' - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0 = Ce^x \end{aligned}$$

Yksityisratkaisun löytämiseksi teemme yritteen

$$y_1 = Ae^{kx} \Rightarrow y_1' = Ake^{kx}$$

tehtävä on esimerkiksi selvittää miten kauan lääkeainetta on kehossa lääkityksen lopettamisen jälkeen. Mallissa oletetaan, että λ on vakio, ja että sen arvo tunnetaan riittävän tarkasti. Todellisuudessa λ riippuu potilaan tilasta, ja sen arvo voi hoidon aikana muuttua merkittävästi. Jos $\lambda = 2$ eli elimistö poistaa lääkeaineesta 200% tunnissa (!!!), niin se ei tarkoita sitä, että lääke poistuisi puolessa tunnissa.

Esimerkki 5.4.2 Potilaan elimistössä on 1.0mg nukutusainetta. Seuraava lääkitys voidaan aloittaa vasta, kun nukutusaineen määrä on laskenut tasolle $1.5\mu\text{g}$. Milloin seuraava lääkitys voidaan aloittaa, kun nukutusaine poistuu elimistöstä aikavakiolla $\lambda = 2.0$. (Siis 200% tunnissa!?)

Kysytty aika T ratkaistaan mallista (5.36) sijoittamalla siihen $N_0 = 1.0\text{mg}$ ja $N = N(T) = 1.5\mu\text{g}$

$$\begin{aligned} 1.5 \cdot 10^{-3}\text{mg} &= 1.0\text{mg} \cdot e^{-2T} \\ \Leftrightarrow T &= \frac{\ln(1.5 \cdot 10^{-3})}{-2} = 3.25 \\ \Leftrightarrow T &= 3 \text{ tuntia } 15 \text{ minuuttia} \end{aligned}$$

5.4.2 Eksponentiaalinen kasvu

Edellinen esimerkki käsitteli määrän pienenemistä. Muutos oli suoraan verrannollinen määrään. Jos muuttujan y kasvuun liittyvä muutos on vastaavalla tavalla suoraan verrannollinen määrään, niin

$$\begin{aligned} dy &= \rho y dt \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \rho dt \\ y &= y_0 e^{\rho t} \end{aligned} \tag{5.37}$$

ρ on jatkuvan korkolaskun korkointensiteetti (growth rate). Tässä yhteydessä olisi ehkä luontevampaa puhua kasvuasteesta. Kirkointensiteetti ρ ja vuotuinen korkokanta i liittyvät toisiinsa yhtälön $e^\rho = 1 + i$ mukaan. Siis $\rho = \ln(1 + i)$ ja $i = e^\rho - 1$.

Esimerkki 5.4.3 Imatran voima arvioi Suomen energian kulutuksen kasvavan vuosittain 15%. Samaan aikaan EU arvioi energian kulutuksen kasvavan vuosittain 4%. Suomen osuus EU-maiden energian kulutuksesta on nyt noin 5%. Missä vaiheessa IVO arvelee Suomen kuluttavan puolet EU:n energiasta?

Olkoon $E_S(t)$ = Suomen energian kulutus ja $E_E(t)$ = Euroopan energian kulutus. Esitettyjen arvioiden perusteella kasvuintensiteetit ovat

$$\begin{aligned} e^{\rho_S} &= 1.15 \Rightarrow \rho_S = 0.1398 \\ e^{\rho_E} &= 1.04 \Rightarrow \rho_E = 0.0392 \end{aligned}$$

Tehtävässä annettujen tietojen perusteella

$$\begin{aligned} E_S(t) &= E_S(0) \cdot e^{\rho_S t} \\ E_E(t) &= E_E(0) \cdot e^{\rho_E t} \\ E_S(0) &= 0.05 \cdot E_E(0) \end{aligned}$$

Kun Suomen energian kulutus on puolet Euroopan energian kulutuksesta hetkellä T , niin

$$\begin{aligned} E_S(T) &= 0.5 \cdot E_E(T) \\ E_S(0) \cdot e^{\rho_S T} &= 0.5 \cdot E_E(0) \cdot e^{\rho_E T} \\ 0.05 \cdot e^{\rho_S T} &= 0.5 \cdot e^{\rho_E T} \\ e^{(\rho_S - \rho_E)T} &= 0.5/0.05 \\ e^{0.1006 \cdot T} &= 10 \\ T &= \ln(10)/0.1006 \\ T &= 22.9(\text{vuotta}) \end{aligned}$$

Esimerkki 5.4.4 Valmistelemme vuosiennustetta yritykselle, jonka myynnin volyyymi (tonneina) kasvaa arviolta 10% vuodessa, raaka-aineiden ja työpanoksen hinta kasvaa vuodessa noin 7% ja lopputuotteen hinnan arvellaan nousevan noin 15% vuodessa. Miten vuodessa muuttuu käyttökateprosentti, joka nyt on 20%, kun valmisvaraston kiertoaika on 2/vuosi ?

$$\begin{aligned} \text{käyttökate}\% &= \frac{\text{käyttökate}}{\text{liikevaihto}} \cdot 100\% \\ &= \frac{\text{liikevaihto} - \text{menot} + \text{varastojen kasvu}}{\text{liikevaihto}} \cdot 100\% \end{aligned} \quad (5.38)$$

Merkitään kasvavia suureita seuraavasti

$$p(t) = p_o e^{\rho_p t} = \text{tuotteen yksikköhinta}, \quad (5.39)$$

$$n(t) = n_o e^{\rho_n t} = \text{tuotteen tuotantonopeus (yks./vuosi)}, \quad (5.40)$$

$$c(t) = c_o e^{\rho_c t} = \text{tuotteen tuotantokustannus (mk/yks.)}. \quad (5.41)$$

Tämän vuoden tuloslaskelman eriä voidaan kuvata mallin (5.39)-(5.41) mukaisesti seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{liikevaihto} &= \int_{-1}^0 p(t)n(t-0.5)dt \\ &= p_o n_o e^{-\rho_n/2} \int_{-1}^0 e^{(\rho_p + \rho_n)t} dt \\ &= \frac{p_o n_o}{(\rho_p + \rho_n)\sqrt{1+i_n}} \left(1 - e^{-(\rho_p + \rho_n)}\right) \\ &= \frac{p_o n_o}{(\rho_p + \rho_n)\sqrt{1+i_n}} \left(1 - \frac{1}{(1+i_p)(1+i_n)}\right) = 0.8497 \cdot p_o n_o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{menot} &= \int_{-1}^0 c(t)n(t)dt \\
&= c_o n_o \int_{-1}^0 e^{(\rho_c + \rho_n)t} dt \\
&= \frac{c_o n_o}{\rho_c + \rho_n} \left(1 - e^{-(\rho_c + \rho_n)}\right) \\
&= \frac{c_o n_o}{\rho_c + \rho_n} \left(1 - \frac{1}{(1 + i_c)(1 + i_n)}\right) = 0.9228 \cdot c_o n_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{var. kasvu} &= \int_{-0.5}^0 c(t)n(t)dt - \int_{-1.5}^{-1} c(t)n(t)dt \\
&= c_o n_o \left(\int_{-0.5}^0 e^{(\rho_c + \rho_n)t} dt - \int_{-1.5}^{-1} e^{(\rho_c + \rho_n)t} dt \right) \\
&= \frac{c_o n_o}{\rho_c + \rho_n} \left(1 - e^{-(\rho_c + \rho_n)/2} - e^{-(\rho_c + \rho_n)} + e^{-3(\rho_c + \rho_n)/2}\right) \\
&= \frac{c_o n_o}{\rho_c + \rho_n} \left((1 - e^{-(\rho_c + \rho_n)/2})(1 - e^{-(\rho_c + \rho_n)}) \right) = 0.0722 \cdot c_o n_o
\end{aligned}$$

Sijoittamalla edelliset tulokset kaavaan (5.38) saadaan käyttökateprosentille lauseke

$$kk\%_o = \frac{0.8497 \cdot p_o n_o + 0.0722 \cdot c_o n_o - 0.9228 \cdot c_o n_o}{0.8497 \cdot p_o n_o} \cdot 100\% \quad (5.42)$$

$$kk\%_o = \left(1 - 1.0011 \cdot \frac{c_o}{p_o}\right) \cdot 100\% \quad (5.43)$$

Koska nyt käyttökateprosentti on 20%, niin

$$\begin{aligned}
1 - 1.0011 \cdot \frac{c_o}{p_o} &= 0.2 \\
\Leftrightarrow c_o/p_o &= 0.7991
\end{aligned} \quad (5.44)$$

Vuoden kuluttua käyttökateprosentti lasketaan täsmälleen samalla tavalla paitsi, että kaavassa (5.43) c_o on kasvanut 7% ja p_o on kasvanut 15%. Sijoittamalla nämä uudet arvot ja kaava (5.44) kaavaan (5.43) saadaan käyttökateprosentin uudeksi arvoksi

$$\begin{aligned}
kk\%_{01} &= \left(1 - 1.0011 \cdot \frac{1.07 \cdot c_o}{1.15 \cdot p_o}\right) \cdot 100\% \\
&= \left(1 - 1.0011 \cdot \frac{1.07}{1.15} \cdot 0.7991\right) \cdot 100\% \\
&= 25.9\%
\end{aligned}$$

Kritiikkiä: Kertymien laskeminen integroimalla virtaamista, johtaa monimutkaisiin laskelmiin. Lausekkeet ovat epähavainnollisia, vaikka lopputulos onkin uskottava. Mallin käyttöä yleisessä tapauksessa puoltaa se, että mallin avulla saadaan selville c_o/p_o .

Käytännössä tämä suhde tiedetään. Jos suhde on sama kuin mallin ennustama, niin mallin soveltaminen tuntuu hyväksyttävältä. Jos suhde poikkeaa mallin ennustamasta, niin malli tulee hylätä.

Edellä

$$\begin{aligned} \text{varaston kasvu} &= 0.0722 \cdot c_o n_o = 0.0722 \cdot 0.7991 \cdot p_o n_o \\ &= \frac{0.0722 \cdot 0.7991}{0.8497} \cdot 0.8497 \cdot p_o n_o \\ &= 0.0679 \cdot \text{liikevaihto} \end{aligned}$$

Pidetään tätä suhdetta tunnettuna ja ratkaistaan tehtävä yksinkertaisella korkolaskulla. Merkitään tämän vuoden tuotannon määrää N_o :lla ja vuoden keskihintoja C_o :lla ja P_o :lla. Käyttökateprosentti on

$$\begin{aligned} kk\%_0 &= \frac{P_o N_o + 0.0679 \cdot P_o N_o - C_o N_o}{P_o N_o} \cdot 100\% \\ &= (1.0679 - C_o/P_o) \cdot 100\% \end{aligned}$$

Koska tänä vuonna käyttökate% on 20%, saamme edellisestä yhtälöstä, että $C_o/P_o = 0.8679$. Ensi vuonna siis uusi arvo on

$$\begin{aligned} kk\%_1 &= (1.0679 - C_1/P_1) \cdot 100\% \\ &= \left(1.0679 - \frac{1.07 \cdot C_o}{1.15 \cdot P_o} \right) \cdot 100\% \\ &= \left(1.0679 - \frac{1.07}{1.15} \cdot 0.8679 \right) \cdot 100\% \\ &= 26.0\% \end{aligned}$$

Yksinkertainen korkolasku antaa siis melkein saman tuloksen, joten eksponentiaalisesti kasvaviin virtoihin perustuva malli ei tässä tapauksessa tunnu kovin tarpeelliselta. Lisäksi malli olettaa kaikkien kasvulukujen pysyvän vakioina kahden vuoden ajan, mikä on melko epäuskottavaa.

5.4.3 Logistinen kasvu

Pieni eläinpopulaatio kasvaa eksponentiaalisesti yhtälön $dN = ANdt$. Toisaalta populaation kasvaessa, tulee vastaan raja, jossa ymäritys ei enää pysty antamaan riittävästi ravintoa ja suojaa populaatiolle. P.F. Verhulst mallinsi populaation kasvua yhtälöllä

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2 \quad (5.45)$$

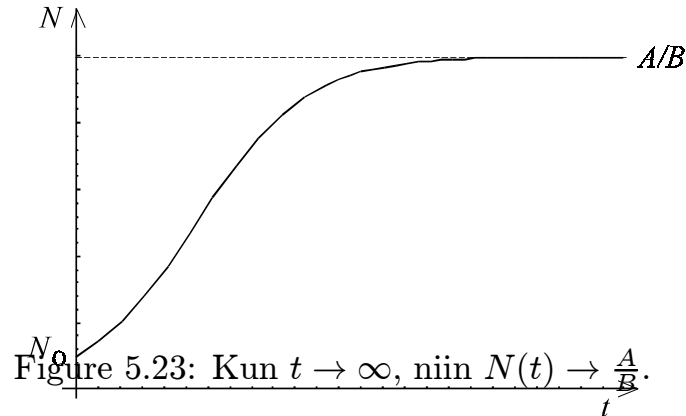


Figure 5.23: Kun $t \rightarrow \infty$, niin $N(t) \rightarrow \frac{A}{B}$.

Yhtälön viimeinen termi saa aikaan sen, että populaation kasvaessa sen kasvunopeus pienenee. Yhtälö separoituu seuraavasti

$$\begin{aligned}
 (5.45) \quad &\Leftrightarrow \int \frac{dN}{N(A - BN)} = \int dt + C_1 \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{A^{-1}}{N} dN + \int \frac{BA^{-1}}{A - BN} dN = \int dt + C_1 \\
 &\Leftrightarrow A^{-1} \ln N - A^{-1} \ln |A - BN| - C_1 = t \\
 &\Leftrightarrow e^{At} = C \frac{N}{A - BN}
 \end{aligned}$$

Kun $t = 0$, niin $N(0) = N_o$ ja $C = \frac{A - BN_o}{N_o}$. Siis

$$e^{At} = \frac{N(t)}{A - BN(t)} \cdot \frac{A - BN_o}{N_o} \quad (5.46)$$

$$\Leftrightarrow N(t) = \frac{A}{B + (AN_o^{-1} - B)e^{-At}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{A}{B} \quad (5.47)$$

Ratkaisu on parhaiten ymmärrettävissä funktion $N = N(t)$ kuvaajan avulla (ks kuva(5.23)).

Esimerkki 5.4.5 Muodostetaan yksinkertainen malli teknisen innovaation käyttöönotolle. Olkoon

$$\begin{aligned}
 R &= \text{yritysten lukumäärä,} \\
 N(t) &= \text{innovaatiota käyttävien yritysten määrä.}
 \end{aligned}$$

Malli perustuu ajatukseen, jonka mukaan yritys alkaa käyttää uutta innovaatiota yleensä vasta kun se vertaa omaa toimintaansa kilpailijaan, joka jo käyttää innovaatiota. Tämän todennäköisyys on suoraan verrannollinen lukuun $N(R - N)$. Siis

$$\begin{aligned} dN &= k \cdot N \cdot (R - N) \cdot dt \\ \frac{dN}{dt} &= \underbrace{kR}_A N - \underbrace{k}_B N^2. \end{aligned}$$

Malli on samaa muotoa kuin (5.45), joten

$$N(t) = \frac{R}{1 + (RN_o^{-1} - 1)e^{-kRt}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Innovaation käyttöönottoa kuvaa siis logistinen käyrä (5.23). Mallin mukaan siis kaikki yritykset lopulta ottavat teknisen innovaation käyttöön.

5.4.4 Auton hinta.

Auton hinnalle ei voi muodostaa sellaista mallia, joka kuvaisi oikein sekä kalliin urheiluauton, että halvan kansanauton hintaa, niiden käyttöaikana. Lähtökohdaksi otamme naivin mallin (M1)

$$dP = -aPdt, \quad (5.48)$$

jonka ratkaisu on

$$P(t) = P_o e^{-at}. \quad (5.49)$$

Ratkaisu (5.49) ei tyydytä kahdesta syystä. Ensiksi ratkaisun mukainen hinta menee nolnaan ajan kasvaessa rajatta. Tämä ei vastaa todellisuutta, sillä yleensä autolla on loppuun ajettunakin romuarvo. Toiseksi ratkaisun mukaan hinnan suhteellinen muutosnopeus $P'(t)/P(t) = -a$ on vakio, mikä ei lainkaan vastaa empiiristä aineistoa. Yleensä auton hinnan suhteellinen muutosnopeus (%/vuosi) on voimakkain alussa ja pienenee myöhemmin.

Parannamme mallia vaiheittain. Mallin parantelu johtaa, yleensä sarjaan yhä monimutkaisempia malleja, jotka sopivat yhä paremmin dataan, mutta joiden ratkaisut myös samalla monimutkaistuvat ja muuttuvat epähavainnollisiksi tai vaikeiksi soveltaa. Lukija tarkatkoon tätä ilmiötä, kun seuraavassa yritämme parantaa mallia.

Tartumme ensin romuarvon ongelmaan. Teemme sen helpon ratkaisun, että sanomme autolla olevan romuarvon b , ja käyttöarvon $P - b$, joka vähenee naivin mallin (5.48) mukaisesti. Siis malli (M2) on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P - b) &= -a(P - b) \\ \frac{dP}{dt} &= -a(P - b) \\ \int \frac{dP}{P - b} &= \int -adt + C_1 \\ \ln |P - b| &= -at + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= Ce^{-at} + b \\
 P(t) &= (P_o - b)e^{-at} + b
 \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned}
 P'(t)/P(t) &= \frac{-a(P_o - b)e^{-at}}{(P_o - b)e^{-at} + b} \\
 &= -a + \frac{ab}{(P_o - b)e^{-at} + b}
 \end{aligned}$$

Siis $P'(0)/P(0) = -a(1 - b/P_o)$ ja $P'/P \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Suhteellinen muutosnopeus ei siis enää ole vakio. Jotta saisimme mallin, joka sopii havaintojen kanssa, merkitsemme käyttöarvon suhteellista muutosta lausekkeella $-af(t)$, missä painofunktio f on jatkuva, vähenevä ja $f(0) = 1$. Olkoon $F(t) = \int_0^t f(u)du$, jolloin $F(0)=0$. Saamme kolmannen mallin (M3)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(P - b) &= -af(t)(P - b) \\
 \int \frac{dP}{P - b} &= \int -af(t)dt + C_1 \\
 \ln|P - b| &= -aF(t) + C_1 \\
 P &= Ce^{-aF(t)} + b \\
 P(t) &= (P_o - b)e^{-aF(t)} + b
 \end{aligned}$$

Painofunktioksi käyvät esimerkiksi

$$\begin{aligned}
 f_1(t) = e^{-kt} &\Rightarrow F_1(t) = k(1 - e^{-kt}) \\
 &\Rightarrow P_1(t) = (P_o - b)e^{-ak(1 - e^{-kt})} + b,
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

ja

$$\begin{aligned}
 f_2(t) = \frac{1}{1 + kt} &\Rightarrow F_2(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kt) \\
 &\Rightarrow P_2(t) = (P_o - b)(1 + kt)^{-a/k} + b.
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Ratkaisut on saatu samalla periaatteella käyttäen hieman toisistaan eroavia painofunktioita. Ratkaisuissa on silti merkittävä ero, sillä

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) &= (P_o - b)e^{-ak} + b > b \text{ ja} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) &= b,
 \end{aligned}$$

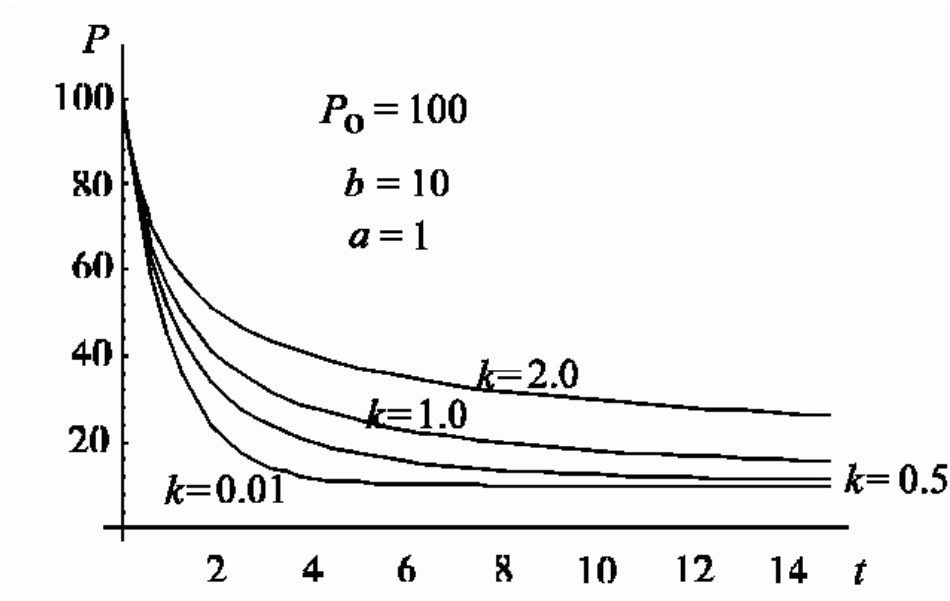


Figure 5.24: $P=P(t)$, kun $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 1.0$ ja $k = 2.0$.

joten painofunktion f_1 käyttö johtaa ratkaisuun, jossa auton käyttöarvo ei koskaan kulu kokonaan pois. Tämä ei tunnu kovin uskottavalta, joten toistaiseksi parhaalta tuntuu malli (5.51), jonka DY on

$$dP = \frac{-a(P - b)}{1 + kt} dt. \quad (5.52)$$

Parametri a määräytyy hinnan muutoksesta ensimmäisen vuoden aikana ja parametri b on auton romuarvo, joka myös voidaan melko luotettavasti arvioida auton ostohetkellä. Jäljelle jää parametri k , jonka merkitystä voi tulkita kuvasta (5.24), jossa on piirretty hintakäyrät, kun $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 1.0$ ja $k = 2.0$. Kuva osoittaa, että vaikka periaatteessa käyttöarvo meneekin aina nolnaan, niin tämä saattaa olla niin hidasta, että se ei tapahdu realistisessa ajassa.

5.5 Numeerinen simulointi

Joskus differentiaaliyhtälön täydellinen ratkaiseminen on vaikeata, mutta silti haluamme tietää ratkaisufunktion arvon tietyllä hetkellä tulevaisuudessa. Tämä voidaan tehdä numeerisesti. Ratkaisemme yhden esimerkin kahdella tavalla, mutta emme kehitä ideaa pidemmälle, koska asiaa käsitellään lisää muilla kursseilla. Valitsemme esimerkki DY:ksi helposti separoituvan ja ratkeavan DY:n, jotta voimme verrata numeerisesti saamaamme ratkaisua ”oikeaan” ratkaisuun.

Esimerkki 5.5.1 Mikä on funktion $y(x)$ arvo hetkellä $x = 2$, kun $y(0) = 1$ ja y toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y' - 2xy = 2x^3 - 2x. \quad (5.53)$$

Esimerkki 5.5.2 Haetaan lausekkeet korkeammille derivaatoille

$$y'(x) = 2x^3 - 2x + 2xy(x) \quad (5.64)$$

$$y''(x) = 6x^2 - 2 + 2y(x) + 2xy'(x) \quad (5.65)$$

$$y'''(x) = 12x + 4y'(x) + 2xy''(x) \quad (5.66)$$

$$y^{(4)}(x) = 12 + 6y''(x) + 2xy''' \quad (5.67)$$

Nyt voimme soveltaa Taylorin polynomia numeeriseen laskentaan

$$y_{t+1} = y_t + \sum_{k=1}^N \frac{y^{(k)}(x_t)}{k!} h^k \quad (5.68)$$

Algoritmi

$$\text{alkuarvot} \quad (5.69)$$

$$x_0 = 0 \quad (5.70)$$

$$y_0 = 1 \quad (5.71)$$

$$h = 0.05 \quad (5.72)$$

$$\text{toistetaan} \quad (5.73)$$

$$y1_t = 2x_t^3 - 2x_t + 2x_t y_t \quad (5.74)$$

$$y2_t = 6x_t^2 - 2 + 2y_t + 2x_t y1_t \quad (5.75)$$

$$y3_t = 12x_t + 4y1_t + 2x_t y2_t \quad (5.76)$$

$$y4_t = 12 + 6y2_t + 2x_t y3_t \quad (5.77)$$

$$y_{t+1} = y_t + h y1_t + h^2 y2_t / 2 + h^3 y3_t / 6 + h^4 y4_t / 24 \quad (5.78)$$

$$x_{t+1} = x_t + h \quad (5.79)$$

Neljänkymmenen toistokerran jälkeen saadaan $y(2) \approx y_{40} = 50,5952$. Tulos on tällä kertaa varsin hyvä. ///

Esimerkessä tiesimme oikean ratkaisun, jolloin oli helppo tarkistaa numeerisen ratkaisun tarkkuus. Yleensä numeerisia menetelmiä joudutaan käyttämään, kun tarkkaa ratkaisua ei osata muodostaa. Silloin virhearvion tekeminen on hankalampaa. Jätämme näiden asioiden tarkastelun numeerisen matematiikan kurssille.

5.6 2. kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen DY

Määrittelemme ensin joitakin termejä, jotka tulevat jatkossa toistuvasti esiin.

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (lyhennettynä ”II k.l:n DY”) on yhtälö, joka sitoo toisiinsa muuttujan x ja funktiot $y(x)$, $y'(x)$ ja $y''(x)$. Se on siis muotoa

$$f(x, y, y', y'') = 0.$$

Kertalukua 2 olevan DY:n ratkaisu sisältää yleensä 2 parametria (vakiota). Tällaista ratkaisua sanotaan *yleiseksi ratkaisuksi*. Kun parametreille valitaan arvot, saadaan DY:n jokin *yksityisratkaisu*. Jos ratkaisua ei saada yleisestä ratkaisusta millään parametrien arvoilla, sanotaan ratkaisua *erikoisratkaisuksi*.

Esitetty määritelmä on tavattoman yleinen, eikä näin laajalle yhtälöjoukolle ole helppo löytää yhteisiä ominaisuuksia. Rajoitamme yhtälöjoukkoa seuraavasti.

Lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on yhtälö, joka on lineaarinen y :n ja sen derivaattojen suhteen. Se on siis muotoa

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \quad (5.80)$$

Sanallisen määritelmän mukaan yhtälö voisi myös olla muotoa $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Jakamalla tämä lausekella $a(x)$ saadaan muoto (5.80), missä $f(x) = b(x)/a(x)$, $g(x) = c(x)/a(x)$ ja $h(x) = d(x)/a(x)$. DY:n lineaarisuus on hyvin suuri rajoitus edelliseen. Tästä johtuen ne on paljon helpompi ratkaista.

Lineaarinen, vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on edellisen erikoistapaus, jossa y' :n ja y :n kertoimet ovat vakioita. Se on siis muotoa

$$y'' + ay' + by = h(x) \quad (5.81)$$

Yhtälöiden (5.80) ja (5.81) oikeasta puolesta, eli lausekkeesta $h(x)$ käytetään usein nimitystä **RHS** (eli **Right Hand Side**).

Jos yhtälön (5.80) tai (5.81) RHS on identtisesti nolla, niin yhtälö on **homogeeninen**. Jokaiseen lineaariseen DY:öön liittyy sitä vastaava homogeeninen yhtälö, joka saadaan asettamalla RHS nolaksi.

Tässä luvussa tarkastelemme II k.l:n DY:n ratkaisemista. Aloitamme helpoimmasta tapauksesta, eli II k.l:n lineaarisesta vakiokertoimisesta DY:stä. Tämä tapaus tulee oppia täydellisesti. Tämän jälkeen esitellään ei-lineaarisiin ja epälineaarisiin DY:hin liittyvää teoriaa ja esimerkkejä. Epälineaarisen DY:n ratkaiseminen on usein toivottoman vaikea tehtävä, joka onnistuu vain numeerisesti simuloimalla. Suurin osa taloudellisista malleista on lineaarisia ja vakiokertoimisia. Toisaalta taloudellisissa ilmiöissä on melkein aina piirteitä, joiden mallinnus onnistuu vain epälineaarilla DY:llä. Siten epälineaarisuus on suuri haaste tutkimukselle.

Tällä kurssilla ei opita epälineaarisen DY:n ratkaisemista, mutta myöhemmissä luvuissa opimme tutkimaan epälineaarisen DY:n tasapainoratkaisun stabiilisuutta, joka on taloudellisten ilmiöiden kannalta hyvin mielekäs kysymys, ja jonka ratkaiseminen onnistuu mainiosti tällä kurssilla opituilla taidoilla.

5.6.1 II k.l:n vakiokertoiminen lineaarinen DY

Aloitamme kahdella kaikkia lineaarisia differentiaalyhtälöitä koskevalla lauseella.

Lause 5.6.1 Yhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = y_o(x) + y_1(x)$$

missä $y = y_o(x)$ on homogeeniyhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ yleinen ratkaisu ja $y = y_1(x)$ on alkuperäisen yhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ eräs yksityisratkaisu.

Perustelu: Olkoon $y_2(x)$ yhtälön (5.80) yleinen ratkaisu. Siinä on siis kaksi vakiota C_1 ja C_2 . Kun näille vakioille annetaan arvot (esim. $C_1 = C_2 = 0$), niin saadaan yksityisratkaisu $y_1(x)$. Funktio $y_o(x) = y_2(x) - y_1(x)$ on homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu ja $y_o(x) + y_1(x)$ on lauseen mukainen muoto yleiselle ratkaisulle. \square

Lause 5.6.2 Jos $y = y_1(x)$ ja $y = y_2(x)$ ovat homogeeniyhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ sellaisia yksityisratkaisuja, että niiden suhde $y_1(x)/y_2(x)$ ei ole vakio, niin yhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ yleinen ratkaisu on muotoa

$$y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita.

Perustelu: sivuutetaan. \square

Lauseet 5.6.1 ja 5.6.2 ovat voimassa myös ei-vakiokertoimiselle lineaariselle yhtälölle (5.80). Seuraavassa tarkastelemme vakiokertoimista lineaarista differentiaaliyhtälöä (DY) ja sitä vastaavaa homogeeniyhtälöä (HY)

$$y'' + ay' + by = h(x), \quad (\text{DY})$$

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (\text{HY})$$

Etsitään HY:n yleistä ratkaisua tekemällä yrite

$$y = e^{rx} \Rightarrow \begin{cases} y' &= r e^{rx} \\ y'' &= r^2 e^{rx} \end{cases}$$

Kun yrite sijoitetaan homogeeniyhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} \text{HY} &\Leftrightarrow y'' + ay' + by = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} (r^2 + ar + b) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (r^2 + ar + b) = 0$$

karakteristinen yhtälö

Yrite on siis HY:n yksityisratkaisu, jos vakion r arvo on karakteristisen yhtälön juuri. Olkoot r_1 ja r_2 karakteristisen yhtälön juuret. Erotamme kolme tapausta:

1) Erisuuret reaali juuret:

Jos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ja $r_1 \neq r_2$, niin homogeeniselle saadaan kaksi ratkaisua

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ ja } y_2 = e^{r_2 x}.$$

Koska niiden suhde $y_1/y_2 = e^{(r_1-r_2)x}$ ei ole vakio, on HY:n yleinen ratkaisu

$$\underline{\underline{y_o = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}}$$

2) Kaksoisjuuri:

Jos $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$, niin eräs HY:n yksityisratkaisu on

$$y_1 = e^{rx}$$

Etsitään toista yksityisratkaisua tekemällä yrite

$$y_2 = x e^{rx}, \Rightarrow \begin{cases} y' &= e^{rx} + r x e^{rx} \\ y'' &= 2r e^{rx} + r^2 x e^{rx} \end{cases}$$

Sijoitetaan yrite HY:ön

$$\begin{aligned} HY &\Leftrightarrow y'' + ay' + by = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} ((r^2 x + 2r) + (a + arx) + (bx)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} x + (2r + a) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = -a/2 \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö on tosi, sillä r on karakteristisen yhtälön kaksoisjuuri, eli

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{a}{2}.$$

Kokeilemamme yrite $y_2 = x e^{rx}$ on siis HY:n yksityisratkaisu. Koska suhde $y_2/y_1 = x$ ei ole vakio, on HY:n yleinen ratkaisu

$$\underline{\underline{y_o = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}}}$$

3) Kompleksijuuret:

Jos r_1 ja r_2 eivät ole reaalityyppisiä, ne ovat toistensa liittolukuja ja voimme merkitä $r_1 = \alpha + i\beta$ ja $r_2 = \alpha - i\beta$. Silloin

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ e^{r_2 x} &= e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} e^{r_1 x} + \frac{1}{2} e^{r_2 x} = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2 &= \frac{1}{2i} e^{r_1 x} - \frac{1}{2i} e^{r_2 x} = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

ovat HY:n yksityisratkaisuja ja koska niiden suhde ei ole vakio, on HY:n yleinen ratkaisu

$$\underline{\underline{y_o = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x}} \quad (5.82)$$

Esimerkki 5.6.1 Koska kompleksiluvuilla laskeminen ei aina vakuuta kaikkia lukijoita, tarkistamme ratkaisun (5.82) suoralla sijoituksella. α on karakteristisen yhtälön ratkaisun reaalisosa ja β on ratkaisun imaginaariosa. Siis

$$\begin{aligned} \alpha &= -a/2, \\ \beta &= (\sqrt{-a^2 + 4b})/2. \end{aligned}$$

Kun funktio (5.82) sijoitetaan homogeeniyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} \text{HY} &\Leftrightarrow 0 = b(y) + a(y') + (y'') \\ &\Leftrightarrow 0 = b(C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x) \\ &\quad + a((C_1 \alpha + C_2 \beta) e^{\alpha x} \cos \beta x + (C_2 \alpha - C_1 \beta) e^{\alpha x} \sin \beta x) \\ &\quad + (C_1 \alpha^2 + 2C_2 \alpha \beta - C_1 \beta^2) e^{\alpha x} \cos \beta x \\ &\quad + (C_2 \alpha^2 - 2C_1 \alpha \beta - C_2 \beta^2) e^{\alpha x} \sin \beta x \\ &\Leftrightarrow 0 = (bC_1 + aC_1 \alpha + aC_2 \beta + C_1 \alpha^2 + 2C_2 \alpha \beta - C_1 \beta^2) \cos \beta x \\ &\quad + (bC_2 + aC_2 \alpha - aC_1 \beta + C_2 \alpha^2 - 2C_1 \alpha \beta - C_2 \beta^2) \sin \beta x \\ &\Leftrightarrow 0 = (C_1 (b - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - (\frac{-a^2}{4} + b)) + C_2 (a\beta - a\beta)) \cos \beta x \\ &\quad (C_1 (-a\beta + a\beta) + C_2 (b - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - (\frac{-a^2}{4} + b))) \sin \beta x \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Edelliset kohdat 1)–3) sisältävät ohjeen siitä, miten homogeeniyhtälön HY yleinen ratkaisu saadaan määritettyä. Jatkossa tärkeä kysymys koskee homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun suppenemista. Sanomme, että ratkaisun termi suppenee (konvergoi), jos sen raja-arvo on 0, kun $x \rightarrow \infty$. Vastaavasti sanomme, että ratkaisun termi hajaantuu (divergoi), jos se ei pysy rajoitettuna, kun $x \rightarrow \infty$. Jos kerroin C_j ei ole

nolla, niin termille pätee:

$C_j e^{r_j x}$	suppenee, kun $r_j < 0$ hajaantuu, kun $r_j > 0$
$C_j x e^{r_j x}$	suppenee, kun $r_j < 0$ hajaantuu, kun $r_j > 0$
$C_j e^{\alpha x} \cos \beta x$	suppenee, kun $\alpha < 0$ hajaantuu, kun $\alpha > 0$
$C_j e^{\alpha x} \sin \beta x$	suppenee, kun $\alpha < 0$ hajaantuu, kun $\alpha > 0$

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu suppenee, jos kaikki sen termit suppenevat, ja hajaantuu, jos ainakin yksi sen termeistä hajaantuu.

Seuraava tehtävä on löytää täydellisen yhtälön DY jokin yksityisratkaisu. Yleensä taloudellisissa sovelluksissa RHS = $h(x)$ on melko yksinkertainen. Silloin yksityisratkaisu löytyy yrittäällä samoin kuin I kertaluvun tapauksessa. Seuraavat esimerkit riittävät asian selvittämiseen.

Esimerkki 5.6.2 Ratkaise $y'' + 4y' + 3y = 3x^2$.

Ratkaistaan karakteristinen yhtälö

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 3 &= 0 \\ r &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} \\ &\Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = -3 \end{aligned}$$

Siis HY:n yleinen ratkaisu on $y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Seuraavaksi etsimme DY:n yksityisratkaisun yrittäällä

$$\begin{aligned} y_1 = Ax^2 + Bx + C &\Rightarrow y_1' = 2Ax + B \\ &\Rightarrow y_1'' = 2A \end{aligned}$$

Kun yrite sijoitetaan DY:öön, saadaan

$$\begin{aligned} DY &\Leftrightarrow y'' + 4y' + 3y = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow (2A) + 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow 3Ax^2 + (8A + 3B)x + (2A + 4B + 3C) = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 3 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 3C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2A = -2 \\ C = -2A/3 - 4B/3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Siis yksityisratkaisu on $y_1 = x^2 - 2x + 2$ ja alkuperäisen yhtälön DY yleinen ratkaisu on

$$\underline{\underline{y = y_o + y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + x^2 - 2x + 2}}$$

Esimerkki 5.6.3 Määritä se differentiaaliyhtälön $y'' + 3y' + 2y = 10$ ratkaisu, joka toteuttaa reunaehdot $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 4$.

Ratkaistaan karakteristinen yhtälö

$$\begin{aligned} r^2 + 3r + 2 &= 0 \\ r &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} \\ &\Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = -2 \end{aligned}$$

Siis HY:n yleinen ratkaisu on $y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

Seuraavaksi etsimme DY:n yksityisratkaisun yritteellä:

$$y_1 = A \Rightarrow y_1' = y_1'' = 0$$

(nyrkkisääntö: kun RHS on vakio ja DY vakiokertoiminen, niin yritekin on vakio!)

Kun yrite sijoitetaan DY:öön, saadaan

$$\begin{aligned} DY &\Leftrightarrow y'' + 3y' + 2y = 10 \\ &\Leftrightarrow 0 + 0 + 2A = 10 \\ &\Leftrightarrow A = 5 \end{aligned}$$

Siis yksityisratkaisu on $y_1 = 5$ ja alkuperäisen yhtälön DY yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 5 \\ \Rightarrow y' &= -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Seuraavaksi etsimme DY:n yleiseen ratkaisuun sisältyville vakioille C_1 ja C_2 sellaiset arvot, että reunaehdot toteutuvat. Siis

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + 5 = 1 \\ -C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -4 \\ -C_1 - 2C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tehtävän ratkaisu on siis

$$\underline{\underline{y = -4e^{-x} + 5.}}$$

Tämän tyyppisen tehtävän ratkaisuvaiheet ovat:

- (1) Ratkaise r_1 ja r_2 karakteristisesta yhtälöstä.
- (2) Kirjoita HY:n yleinen ratkaisu $y_o = \dots$
- (3) Etsi DY:n yksityisratkaisu $y_1 = \dots$
- (4) Kirjoita DY:n yleinen ratkaisu $y = y_o + y_1$
- (5) Ratkaise C_1 ja C_2 reunaehtojen perusteella
- (6) Kirjoita vastaus.

(Tässä kokematon laskija tekee yleensä alussa sen virheen, että yrittää ratkaista C_1 :n ja C_2 :n numeroarvot heti, kun törmää niihin, eli kohdan (2) jälkeen. Tämä on virhe, sillä reunaehdot sanovat jotakin DY:n ratkaisusta, jonka yleinen muoto on tiedossa vasta kohdan (4) jälkeen!)

Esimerkki 5.6.4 Monopoliyritys tuottaa tuotetta S yksikköä päivässä. Kysyntäfunktio (yksikköä päivässä) on lineaarinen

$$D = a - bP \quad (5.83)$$

ja hintaa korjataan päivittäin siten, että

$$dP = c(Q^* - Q)dt \quad (5.84)$$

missä Q on varaston koko ja Q^* on suunnitelmien mukainen varaston koko. Vakiot S, a, b ja c ovat nyt positiivisia. Miten hinta asettuu ajan kuluessa?

Ongelmaa kuvataan nyt virtausuureilla. Tuotantonopeus S on virtausnopeus varastoon. Kysyntä D on vastaavasti virtausnopeus varastosta pois. Siten varaston muutos on $dQ = (S - D)dt$ eli

$$Q' = S - D. \quad (5.85)$$

Yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$\begin{aligned} (5.84) \quad &\Leftrightarrow P' = cQ^* - cQ \\ &\Rightarrow P'' = -cQ' \\ &\stackrel{(5.85)}{\Rightarrow} P'' = -cS + cD \\ &\stackrel{(5.83)}{\Rightarrow} P'' = -cS + c(a - bP) \\ &\Leftrightarrow P'' + bcP = ca - cS \end{aligned} \quad (5.86)$$

Hinta P toteuttaa siis differentiaaliyhtälön (5.86), joka on II kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen DY (ja myös RHS on vakio!). Vastaava homogeeniyhtälö on

$$P'' + bcP = 0,$$

ja sen karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$r^2 + bc = 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{bc}, r_2 = -i\sqrt{bc}.$$

Siis $\alpha = 0$ ja $\beta = \sqrt{bc}$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siis $P_o = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$. DY:n yksityisratkaisu on selvästikin $P_1 = (a - S)/b$. Hinta on siis ajan funktiona

$$\underline{\underline{P(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t + \frac{a-S}{b}}} \quad (5.87)$$

Edellä käsitelty malli on kovin naiivi, eikä sen antamaa ratkaisua kannata ilmiön selityksenä ottaa kovin kirjaimellisesti. Eräitä huomioita voidaan kuitenkin tehdä

- (1) Ratkaisun vakiotermin $(a - S)/b$ on se hinta, jolla kysyntä ja tarjonta kohtaavat eli $D = S$.
- (2) Homogeeniyhtälön ratkaisu $P_o(t)$ kuvaa hinnan vaihtelua tasapainohinnan ympärillä. Tämä vaihtelu ei tasaannu (P_o ei suppene), mikä tuntuu käytännössä omituiselta. Jos hinta todella tottelisi jonkin aikaa ratkaisua (5.87), niin monopoli varmasti tekisi asiasta tarvittavat johtopäätökset. Jos monopoli ei tajua asiaa ajoissa, niin asiakkaissa varmasti on sellaisia, jotka oppivat käyttämään hinnan vaihtelua hyväkseen, jolloin naivi malli ei enää riitä ilmiön kuvaamiseen.
- (3) Ratkaisussa ei esiinny vakiota Q^* !. Tästä ei pide tehdä liian pikaisia johtopäätöksiä, sillä Q^* vaikuttaa alkuarvoon $P'(0)$ ja sitä kautta myös ratkaisuun. Tasapainohinta on kuitenkin riippumaton Q^* :stä.

Jokainen esitetty huomio on pienen mietiskelytuokion arvoinen. Erityisesti kolmas huomio ansaitsee alleviivauksen. Tässä tapauksessa löydetty riippumattomuus on aika triviaali, mutta usein tällainen riippumattomuus on hyvin tärkeä havainto. Lukija luultavasti tuntee Modigliani-Millerin teorian, jossa eräin oletuksin muodostetaan malli yrityksen rahavirroille ja niiden perusteella johdetaan lauseke yrityksen arvolle. Tässä lausekkeessa ei esiinny eräs mallin keskeinen parametri, nimittäin yrityksen velkaisuusaste. Mallin mukaan siis yrityksen arvo ei eräin oletuksin riipu sen velkaisuusasteesta. Tämä riippumattomuus on paljon tunnetumpi kuin itse malli tai sen antaman ratkaisun lauseke.

Esimerkki 5.6.5 Edellisen esimerkin monopoliyritys tuottaa tuotetta S yksikköä päivässä. Kysyntäfunktio on

$$D = a - bP + kP' \quad (5.88)$$

ja hintaa korjataan päivittäin siten, että

$$dP = c(Q^* - Q)dt + r\left(\frac{S - a}{b} - P\right)dt \quad (5.89)$$

missä Q on varaston koko ja Q^* on suunnitelmien mukainen varaston koko. Vakiot S, a, b, c, k ja r ovat nyt positiivisia. Miten hinta asettuu ajan kuluessa?

Edellisen esimerkin muunnelmä perustuu seuraavaan perisideaan. Osa asiakkaista siirtää hankintojaan huomiseen, jos hinnat ovat laskussa, jolloin kysyntä laskee ja vastaavasti aientaa hankintojaan, jos hinnat ovat nousussa, jolloin kysyntä nousee. Tätä hankintojen siirtämisvalmiutta kuvaa parametri $k > 0$. Yhtälön (5.89) mukaan yrityksellä on nyt kaksi tavoitetta. Se pyrkii saamaan varaston suunnitellun kokoiseksi ja toisaalta se pyrkii saamaan hinnan tasapainoon. Vakiot c ja r kuvaavat vastaavien

säätöprosessien nopeuksia ja niiden suhde c/r kertoo vastaavien tavoitteiden painosuhteet. Samoin kuin edellä saamme differentiaaliyhtälön

$$\begin{aligned}
 (5.89) \quad &\Leftrightarrow P' = c(Q^* - Q) + r\left(\frac{S - a}{b} - P\right) \\
 &\Rightarrow P'' = -cQ' - rP' \\
 &\Rightarrow P'' = cD - cS - rP' \\
 &\stackrel{(5.88)}{\Rightarrow} P'' = c(a - bP + kP') - cS - rP' \\
 &\Leftrightarrow P'' + (r - ck)P' + bcP = ca - cS
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

Ratkaisun suppeneminen kohden tasapainoa (tasapainon stabiilisuus) voidaan tutkia nyt ratkaisemalla karakteristisen yhtälön juuret ja tutkimalla niiden merkit. On kuitenkin olemassa varsin yksinkertainen sääntö, jolla tutkitaan ratkaisun (5.90) stabiilisuus. Tämä sääntö esitetään seuraavassa kappaleessa, minkä jälkeen palaamme takaisin tähän esimerkkiin.

5.6.2 Tasapainon stabiilisuus

Lause 5.6.3 II kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälön

$$y'' + ay' + by = 0$$

ratkaisu suppenee (on stabiili), jos ja vain jos

$$a > 0, \text{ ja } b > 0.$$

Perustelu: Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ ja } r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Juuret ovat reaaliset, jos ja vain jos $a^2 - 4b \geq 0$. Siinä tapauksessa $r_1 \geq r_2$. Siis

$$\begin{aligned}
 &r_1 \text{ ja } r_2 \text{ ovat reaaliset ja ratkaisu suppenee} \\
 \Leftrightarrow &a^2 - 4b \geq 0 \text{ ja } \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0 \\
 \Leftrightarrow &a > 0 \text{ ja } 0 < b \leq a^2/4
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

Juuret ovat kompleksiset, jos ja vain jos $a^2 - 4b < 0$. Siinä tapauksessa juuren reaaliosa $\alpha = -a/2$. Siis

$$\begin{aligned}
 &\text{juuret ovat kompleksiset ja ratkaisu suppenee} \\
 \Leftrightarrow &a^2 - 4b < 0 \text{ ja } -a/2 < 0 \\
 \Leftrightarrow &a > 0 \text{ ja } b > a^2/4
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Ratkaisu suppenee, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} & (5.91) \text{ tai } (5.92) \\ \Leftrightarrow & (a > 0 \text{ ja } 0 < b \leq a^2/4) \text{ tai } (a > 0 \text{ ja } b > a^2/4) \\ \Leftrightarrow & a > 0 \text{ ja } b > 0 \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.6.6 Edellisen esimerkin differentiaaliyhtälön

$$P'' + (r - ck)P' + bcP = ca - cS$$

ratkaisu on stabiili, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} & r - ck > 0 \text{ ja } bc > 0 \\ \Leftrightarrow & r > ck, \end{aligned}$$

sillä mallin kaikki parametrit ovat positiivisia, ja siksi toinen epäyhtälö on aina tosi.

5.7 1. kertaluvun lin. vakiokert. DY-ryhmä

Tämän kappaleen teoria on helppo yleistää. Silti aloitamme kaksiulotteisella tarkastelulla, koska kahden muuttujan tapaus on helppo esittää graafisesti.

5.7.1 Kahden muuttujan tapaus

Seuraavassa muuttujat x , y , u ja v ovat kaikki ajan t funktioita, $y = y(t)$, $x = x(t)$, $u = u(t)$, $v = v(t)$. Tarkastellaan ensin DY-paria

$$\begin{cases} du/dt = a_{11}u + a_{12}v + b_1 \\ dv/dt = a_{21}u + a_{22}v + b_2 \end{cases}, \quad (5.93)$$

missä oletamme nyt kerroinmatriisiin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

olevan säännöllisen. Muuttujien u ja v tasapainoarvot u^* ja v^* saadaan ehdosta

$$\begin{cases} du/dt = 0 \\ dv/dt = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

Merkitään poikkeamia tasapainosta $\tilde{u} = u - u^*$ ja $\tilde{v} = v - v^*$. Poikkeamat noudattavat DY:tä

$$\begin{pmatrix} d\tilde{u}/dt \\ d\tilde{v}/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

Jos kerroinmatriisin ominisarvot λ_1 ja λ_2 ovat erisuuret ja vastaavat ominaisvektorit ovat $\omega_1 \in \mathbb{R}^2$ ja $\omega_2 \in \mathbb{R}^2$. Olkoon \mathbf{T} matriisi, jonka sarakkeina ovat \mathbf{A} :n ominaisvektorit. Silloin

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

Muuttujan vaihdolla

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

saamme kirjoitettua DY:n (5.93) muotoon

$$\text{DY} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d\tilde{u}/dt \\ d\tilde{v}/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (5.99)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx/dt = \lambda_1 x \\ dy/dt = \lambda_2 y \end{cases} \quad (5.102)$$

Koska ominisarvot λ_1, λ_2 ovat matriisin \mathbf{A} karakteristisen yhtälön juuret, ne ovat joko reaaliset tai toistensa kompleksikonjugaatit. Toisin sanoen jos $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, niin $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$.

Yleinen ratkaisu on silloin jokin seuraavista

Jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, niin

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_{21} C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \omega_{12} C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_{22} C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ja $\lambda_1 = \lambda_2$, niin

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ \tilde{v} &= a_{12}^{-1} (\tilde{u}' - a_{11} \tilde{u}) \end{aligned}$$

Jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, ja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, niin

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} e^{\alpha t} (C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)) \\ e^{\alpha t} (C_3 \sin(\beta t) + C_4 \cos(\beta t)) \end{pmatrix}$$

(Edellä tapaus $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_1 = \lambda_2$, on perusteltava toisin kuin kaksi muuta tapausta. Helpoin tapa on yhdistää DY-ryhmän yhtälöt yhdeksi yhden muuttujan toisen kertaluvun DY:ksi. Sivuumme, nyt tämän tarkastelun.)

Määritelmä 5.7.1 Ensimmäisen kertaluvun kahden muuttujan differentiaaliyhtälöparin (5.93) tasapainoratkaisu $u(t) = u^*$ ja $v(t) = v^*$ on dynaamisesti stabiili, jos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}(t) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}(t) = 0$$

Lause 5.7.1 Ensimmäisen kertaluvun kahden muuttujan differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{pmatrix} du/dt \\ dv/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

tasapainoratkaisu on dynaamisesti stabiili, jos kerroinmatriisin \mathbf{A} ominaisarvot λ_1 ja λ_2 toteuttavat toisen seuraavista ehdoista

$$(a) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \lambda_1 < 0, \quad \text{ja} \quad \lambda_2 < 0$$

tai

$$(b) \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \quad \text{ja} \quad \alpha < 0$$

Helpoin tapa hahmottaa systeemin käyttäytymistä lähellä tasapainoa, on piirtää ratkaisuria tasapainopisteen lähelle (x, y) -koordinaatistoon. Kuvissa 5.26a)-g) on perustapaukset.

Esimerkki 5.7.1 Tutkitaan ensimmäisen kertaluvun lineaarista vakiokertoimista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} dx/dt = 1 - x + y \\ dy/dt = 2 + x - 2y \end{cases} \quad (5.103)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

Tasapainon $(x^*; y^*)^T = (4; 3)^T$ stabiilisuus selviää kerroinmatriisin ominaisarvoista

$$\begin{vmatrix} (-1 - \lambda) & 1 \\ 1 & (-2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.105)$$

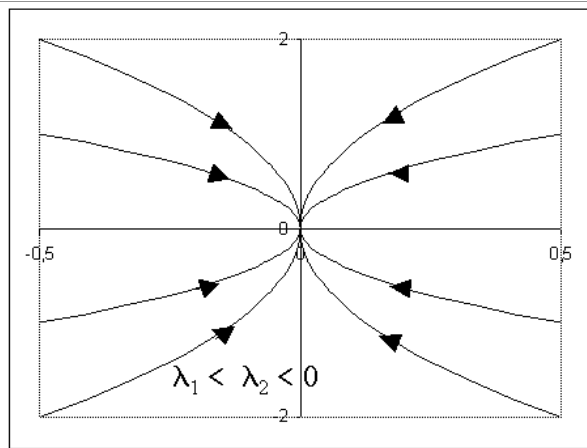
$$\Leftrightarrow (-1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

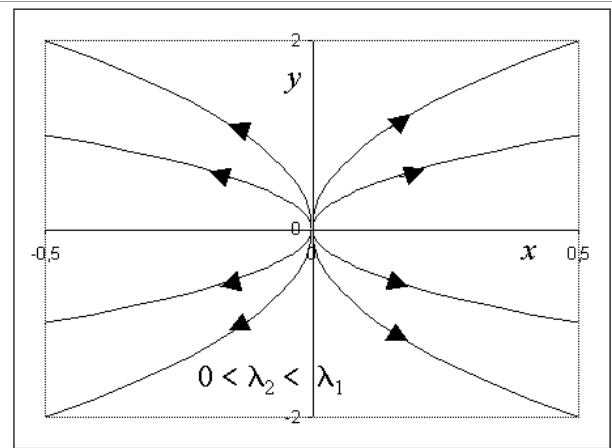
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2.618 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 0.382 \quad (5.106)$$

Tasapaino on siis epästabiili noodi.

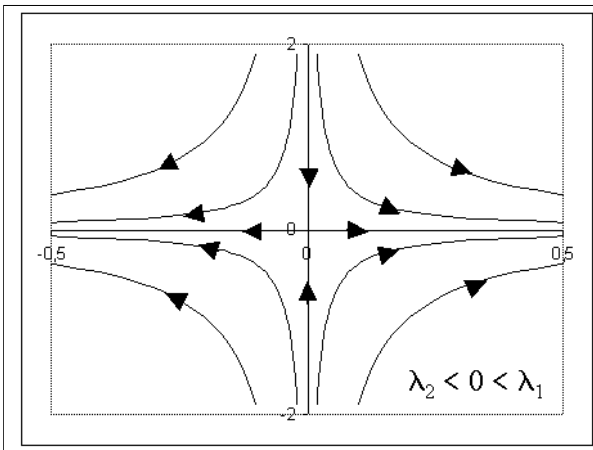
///



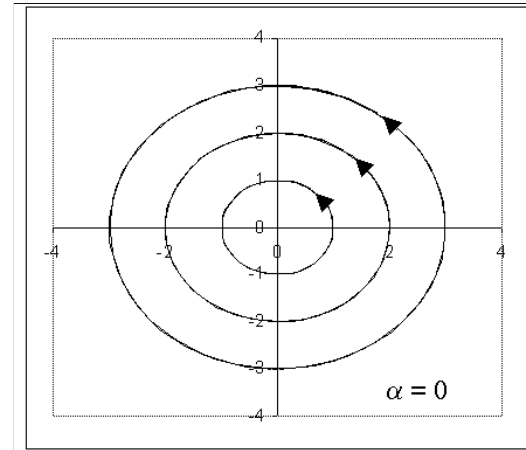
a) stabiili noodi (node)



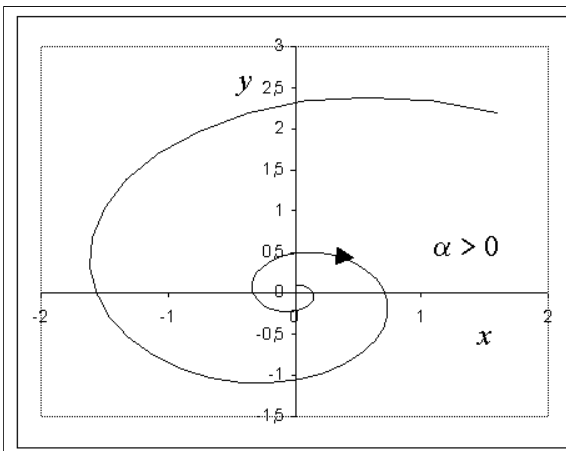
b) epästabiili noodi (node).



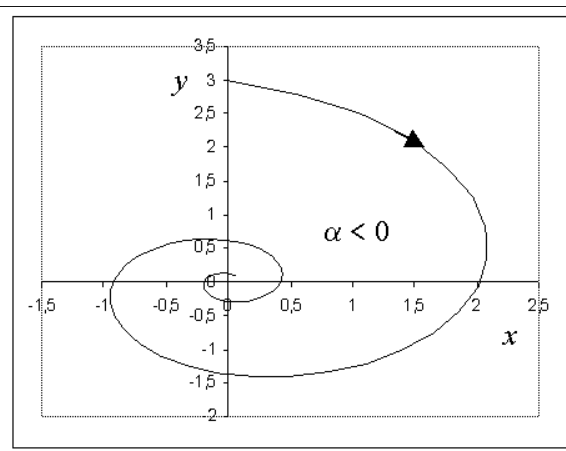
c) satulapiste (saddle point) (epästabiili).



d) keskus (center) (epästabiili).



e) epästabiili spiraali (focus).



f) stabiili spiraali (focus).

Figure 5.26: Ratkaisuurat tasapainon lähellä.

5.7.2 Monen muuttujan tapaus

Edellisen kappaleen tulokset yleistyvät helposti useamman muuttujan tapauksiin.

Lause 5.7.2 Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Silloin DY-ryhmän

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

tasapainoratkaisu on stabiili, jos ja vain jos kaikki reaaliset kerroinmatriisin \mathbf{A} ominaisarvot ovat negatiivisia ja kaikkien kompleksisten ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia.

5.8 Yleinen tasapainon stabiilisuus

Aloitamme tämän kappaleen diskreetillä mallilla, joka on johdantona saman ilmiön jatkuvalle mallille. Samalla tulemme varovaisiksi tasapainojen stabiilisuuksien suhteen.

Esimerkki 5.8.1 Olkoon x_t yrityksen markkinaosuus ($0 \leq x_t \leq 1$) jaksolla t . Ilman markkinointiponnistuksia markkinaosuus pienenee niin, että

$$\Delta x_{pois,t} = -rx_t \quad (5.107)$$

missä r on poistumakerroin, $0 < r < 1$. Yritys käyttää markkinointiin panoksen b_t , joka on suoraan verrannollinen markkinaosuuteen $b_t = \alpha x_t$. Markkinoinnin vaikutus markkinaosuuteen on

$$\Delta x_{uudet,t} = \beta b_t(1 - x_t) = ax_t(1 - x_t), a > 0 \quad (5.108)$$

Yhdistämällä muutostermit, saamme markkinaosuuden dynamiikkaa kuvaavan mallin

$$x_{t+1} = (1 - r)x_t + ax_t(1 - x_t) = f(x_t). \quad (5.109)$$

Mallin tasapainoratkaisut saadaan yhtälöstä

$$x^* = f(x^*) \quad (5.110)$$

$$\Leftrightarrow x^* = (1 - r)x^* + ax^*(1 - x^*)$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^*(-r + a - ax^*)$$

$$\Leftrightarrow x_1^* = 0 \quad \text{ja} \quad x_2^* = \frac{a - r}{a} \quad (5.111)$$

Systemin stabiilisuutta tasapainon lähellä voidaan arvioida funktion f Taylorin sarjan avulla seuraavasti

$$x_{t+1} = f(x_t) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x_t - x^*) \quad (5.112)$$

$$\Rightarrow x_{t+1} - x^* \approx f'(x^*)(x_t - x^*) \quad (5.113)$$

$$\Rightarrow \frac{|\tilde{x}_{t+1}|}{|\tilde{x}_t|} \approx |f'(x^*)| \quad (5.114)$$

Tasapaino x^* on siis stabiili ($\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_t = 0$), jos

$$|f'(x^*)| < 1. \quad (5.115)$$

Askelfunktion derivaatta on nyt

$$f'(x^*) = 1 - r + a - 2ax^* \quad (5.116)$$

Tasapaino $x_1^* = 0$ on stabiili, jos

$$-1 < f'(0) < 1 \quad (5.117)$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - r + a < 1$$

$$\Leftrightarrow r - 2 < a < r \quad (5.118)$$

Tasapaino $x_2^* = 1 - r/a$ on stabiili, jos

$$-1 < f'(1 - r/a) < 1 \quad (5.119)$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - r + a - 2a(1 - r/a) < 1$$

$$\Leftrightarrow r < a < r + 2 \quad (5.120)$$

Kun siis markkinointiponnistus on heikko, $a < r$, niin yrityksen markkinaosuus kuluu kokonaan pois. Kun markkinointiponnistus on riittävä, $r < a < r + 2$, niin markkinaosuus saadaan vakiinnutettua tasapainoarvoonsa. Mitä tapahtuu, jos $a > r + 2$?

Kuvaan 5.27 on piirretty simuloitu ratkaisu, kun $r = 0.2$, $a = 3$ ja $x_0 = 0.5$. Ratkaisu on esimerkki kaoottisesta aikasarjasta. Malli ei enää toimi tyydyttävästi, sillä muuttuja x_t saa ykköstä suurempia arvoja, mikä on vastoin oletustamme. (Emme nyt käsittele kaoottisia ilmiöitä enempää.) ///

Esimerkki 5.8.2 Teemme edellisen esimerkin tilasteesta jatkuvan DY-mallin. Olkoon $x(t)$ yrityksen markkinaosuus ja $y(t)$ yrityksen markkinointiponnistus (kassavirta). Yrityksen markkinointiponnistuksen tavoitetaso on $y_{tavoite} = ax$. Jotta markkinointi olisi kohdallaan, sitä tarkistetaan ajoittain niin, että tämä säätö-prosessi noudattaa likimain mallia $dy/dt = ax - y$. Yksinkertainen yrityksen markkinaosuutta ja markkinointia kuvaava malli on nyt

$$\begin{cases} dx/dt &= -rx + y(1 - x) \\ dy/dt &= ax - y \end{cases} \quad (5.121)$$

Helposti nähdään, että mallin tasapainoratkaisut ovat $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ ja $(x_2^*, y_2^*) = (1 - r/a, a - r)$. Ennen kuin otamme kantaa tasapainojen stabiilisuuteen, tutkimme yleistä tapausta. ///

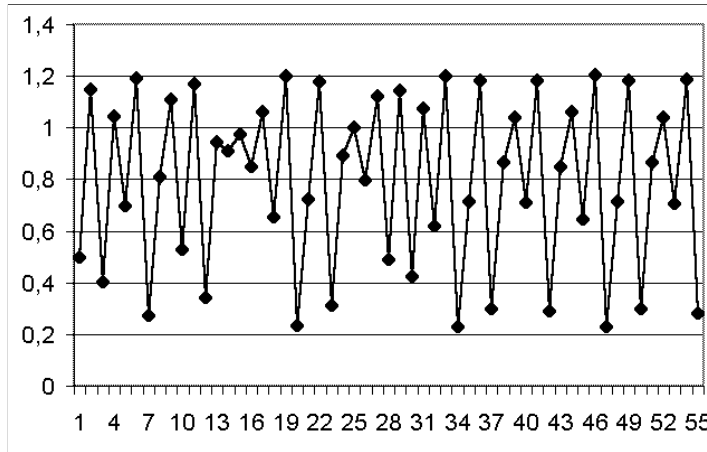


Figure 5.27: Mallin $x_{t+1} = 0.8x_t + 3x_t(1 - x_t)$ ratkaisu, kun $x_0 = 0.5$.

Olkoon tutkittavana epälineaarinen DY-ryhmä

$$\begin{cases} dx/dt = f(x, y) \\ dy/dt = g(x, y) \end{cases} \quad (5.122)$$

Lähellä tasapainopistettä $x \approx x^*$ ja $y \approx y^*$ asetamme $\tilde{x} = x - x^*$ ja $\tilde{y} = y - y^*$.
Voimme arvioida

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt \approx f_x \tilde{x} + f_y \tilde{y} \\ d\tilde{y}/dt \approx g_x \tilde{x} + g_y \tilde{y} \end{cases} \quad (5.123)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{y}/dt \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (5.124)$$

missä osittaisderivaatat on laskettu tasapainopisteessä. Lähellä tasapainoa systeemi käyttäytyy siis likimain kuin lineaarinen malli (5.124). Stabilisuus tutkitaan siis derivaatta-matriisiin

$$D = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

ominaisarvoista. Palataan nyt edellä kesken jääneeseen esimerkkiin.

Esimerkki 5.8.3 Edellä

$$\begin{cases} dx/dt = -rx + y(1 - x) = f(x, y) \\ dy/dt = ax - y = g(x, y) \end{cases} \quad (5.125)$$

Osittaisderivaatat ja derivaatta-matriisi ovat

$$\begin{aligned} f_x &= -r - y \\ f_y &= 1 - x \\ g_x &= a \end{aligned}$$

$$g_y = -1 \quad (5.126)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -r - y & 1 - x \\ a & -1 \end{pmatrix} \quad (5.127)$$

Tasapainopisteessä $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ siis

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} -r & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \quad (5.128)$$

Ominaisarvoille pätee

$$\begin{aligned} (-r - \lambda)(-1 - \lambda) - a &= 0 \\ \lambda^2 + (1 + r)\lambda + (r - a) &= 0 \\ \lambda &= \frac{-(1 + r) \pm \sqrt{(1 + r)^2 - 4(r - a)}}{2} \end{aligned}$$

Molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia, jos juuretettava on pienempi kuin $(1 + r)^2$, eli

$$a < r.$$

(Jos juuretettava on negatiivinen, niin λ on kompleksinen ja sen reaaliosa on negatiivinen, joten tässäkin tapauksessa tasapaino on stabiili.)

Tasapainopisteessä $(x_2^*, y_2^*) = (1 - r/a, a - r)$ derivaatta-matriisi on

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} -r - y_2^* & 1 - x_2^* \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & r/a \\ a & -1 \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

Ominaisarvoille pätee

$$\begin{aligned} (-a - \lambda)(-1 - \lambda) - r &= 0 \\ \lambda^2 + (1 + a)\lambda + (a - r) &= 0 \\ \lambda &= \frac{-(1 + a) \pm \sqrt{(1 + a)^2 - 4(a - r)}}{2} \end{aligned}$$

Molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia, jos juuretettava on pienempi kuin $(1 + a)^2$, eli

$$a > r.$$

(Jos juuretettava on negatiivinen, niin λ on kompleksinen ja sen reaaliosa on negatiivinen, joten tässäkin tapauksessa tasapaino on stabiili.) ///

Esimerkki 5.8.4 Edellisessä esimerkissä oli useita muutosnopeuteen liittyviä kertoimia asetettu ykkösiksi, jotta laskeminen näyttäisi helpommalta. Oikeastaan mallin pitäisi olla

$$\begin{cases} dx/dt = -rx + \alpha y(1 - x) = f(x, y) \\ dy/dt = \beta(ax - y) = g(x, y) \end{cases} \quad (5.130)$$

Olkoon yrityksen liikevaihto 157 000 € /kk ja markkinaosuus $x = 0.25 = 25\%$. Tällä hetkellä yritys katsoo markkinointipanoksen oikeaksi suuruudeksi 8000 € /kk. Valitaan y :n yksiköksi 1000 € /kk. Silloin

$$a \cdot 0.25 = 8 \Rightarrow a = 32 \quad (5.131)$$

On arveltu, että ilman markkinointipanosta markkinaosuus kuluu pois suhteellisella vauhdilla 10%/kk, joten (kun aikayksikkönä on kk)

$$dx/dt = -rx \Rightarrow r = -\frac{dx/x}{dt} = 0.1 \quad (5.132)$$

Tuhannen euron markkinointipanoksen (/kk) arvellaan kääntävän 2% ei-asiakkaista asiakkaiksi kuukaudessa. Siis

$$\frac{\alpha y(1-x)}{1-x} = 0.02 \cdot y \Rightarrow \alpha = 0.02 \quad (5.133)$$

Markkinointipanoksen suhteellinen muutosnopeus on 20%/kk. Siis

$$d\tilde{y}/dt = -\beta\tilde{y} \Rightarrow \beta = -\frac{d\tilde{y}/\tilde{y}}{dt} = 0.2 \quad (5.134)$$

Saamme siis konkreettisen mallin

$$\begin{cases} dx/dt &= -0.1x + 0.02y(1-x) \\ dy/dt &= 0.2(32x - y) \end{cases} \quad (5.135)$$

Tasapainoratkaisut ovat $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ ja $(x_2^*, y_2^*) = (0.844; 27.0)$. Derivaattamatriisi on

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} -0.1 - 0.02y & 0.02(1-x) \\ 6.4 & -0.2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{D}^{(1)} &= \begin{pmatrix} -0.1 & 0.02 \\ 6.4 & -0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1^{(1)} = -0.511, \lambda_2^{(1)} = 0.211 \\ \Rightarrow \mathbf{D}^{(2)} &= \begin{pmatrix} -0.64 & 0.00312 \\ 6.4 & -0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1^{(2)} = -0.681, \lambda_2^{(2)} = -0.156 \end{aligned} \quad (5.136)$$

Siis ei-triviaali tasapaino on stabiili. Hyvä! Yritys tulee vielä kasvamaan! ///

Esimerkki 5.8.5 Tarkistetaan vielä onko edellisen esimerkin yrityksellä markkinointipanoksen -kerroin a kohdallaan. Jos a palautetaan numeroarvosta parametriksi, niin malli menee muotoon

$$\begin{cases} dx/dt &= -0.1x + 0.02y(1-x) &= f(x, y) \\ dy/dt &= 0.2(ax - y) &= g(x, y) \end{cases} \quad (5.137)$$

Tasapainoratkaisut ovat $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ ja $(x_2^*, y_2^*) = (1 - 5/a; a - 5)$. Jos myynnistä saatava kate on 20%, niin voitto tasapainossa markkinointikustannukset huomioiden

on

$$P(a) = 0.2 \cdot x^* \cdot 628\,000 - y^* \quad (5.138)$$

$$= 0.2 \cdot (1 - 5/a) \cdot 628\,000 - (a - 5) \cdot 1000 \quad (5.139)$$

$$= 130\,600 - 628\,000/a - 1000a \quad (5.140)$$

Suurin voitto tasapainossa saadaan, kun

$$P'(a) = 0 \Rightarrow a \approx 25 \quad (5.141)$$

Yritys siis panostaa markkinointiin enemmän kuin sen tasapainossa kannattaisi. Toisaalta yritys ei vielä ole tasapainotilanteessa, joten on ymmärrettävää, että haluttua markkinaosuutta haetaan aggressiivisesti. Optimaalinen panostus transientissa vaiheessa kuuluu niin sanotun optimiohjausteorian (optimal control theory) alaan. Emme nyt paneudu optimiohjauksen teoriaan. ///