

# Taylorin sarja ja Taylorin polynomi

## Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

Taylorin ja MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin jäännöstermi (virhearvio)

Potenssisarja

$$\sum c_k(x-a)^k = f(x)$$

määrittelee  $x$ :n funktion. Seuraavaksi toteamme mikä yhteys potenssisarjalla on sen määrittelemän funktion derivaattoihin

$$f(a), f'(a), f''(a), f^{(3)}(a), \dots$$

Potenssisarjan suppenemisvälin  $|x-a| < R$  sisäpisteissä funktio  $f(x)$  voidaan derivoida derivoimalla sarjaa. Tämä ei ole ihan itsestään selvä asia. Oikeastaan pitäisi ensin osoittaa, että

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{d}{dx} c_k(x-a)^k \right)$$

Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x)$$

Sivuutamme nyt tämän perustelun ja hyväksymme annettuna asiana, että potenssisarjan määrittelemä funktio voidaan suppenemisvälillä  $|x - a| < R$  derivoida sarjasta ja näin saatu derivaattafunktion potenssisarja suppenee samalla välillä  $|x - a| < R$ .

Tarkastellaan seuraavaa potenssisarjaa, kun  $x$  on suppenemisvälin sisäpiste

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

Voimme nyt helposti derivoida tämän lausekkeen niin monta kertaa kuin haluamme:

Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4c_5(x-a)^3 + \dots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x-a)^2 + \dots$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2c_5(x-a) + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3c_6(x-a)^2 + \dots$$

...

Ylläolevat ovat totta erityisesti, kun  $x = a$  eli

$$f(a) = c_0 = 0! \cdot c_0$$

$$f'(a) = c_1 = 1! \cdot c_1$$

$$f''(a) = 2 \cdot c_2 = 2! \cdot c_2$$

$$f^{(3)}(a) = 3 \cdot 2 \cdot c_3 = 3! \cdot c_3$$

$$f^{(4)}(a) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4 = 4! \cdot c_4$$

...

Saamme siis

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \text{ kun } |x-a| < R \end{aligned} \quad (2)$$

Sarjaa (2) sanotaan *Taylorin sarjaksi* ja jos  $a = 0$ , niin sarjaa sanotaan *MacLaurinin sarjaksi*.

Eräiden tuttujen funktioiden Taylorin sarja -esitykset löytyvät taulukkokirjoista.

**Esimerkki 1** ( $f(x) = e^x$ ,  $a = 0$ , eli "MacLaurin")

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \\ f''(x) = e^x \\ \vdots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

$$\begin{aligned} e^x &= c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)^2 + c_3(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \end{aligned}$$

**Esimerkki 2** ( $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $a = 0$ , eli "MacLaurin")

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \rightarrow \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \quad \rightarrow \quad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} \quad \rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -3! \quad \dots$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = f(x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k$$

Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

**Esimerkki 3** ( $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $a = 2$ , eli "Taylor")

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \rightarrow \quad f(2) = \ln 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \rightarrow \quad f'(2) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \rightarrow \quad f''(2) = \frac{-1}{3^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \quad \rightarrow \quad f'''(2) = \frac{2!}{3^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} \quad \rightarrow \quad f^{(4)}(2) = \frac{-3!}{3^4} \quad \dots \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 3 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{2!3^2}(x-2)^2 + \frac{2!}{3!3^3}(x-2)^3 - \frac{3!}{4!3^4}(x-2)^4 + \dots \\ &= \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot 3^k} (x-2)^k \end{aligned}$$

Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

**Esimerkki 4** ( $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $a = 0$ , eli "MacLaurin")

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \quad \rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \quad \rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-3/2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = \frac{-1}{2^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^3}(1+x)^{-5/2} \quad \rightarrow \quad f'''(0) = \frac{1 \cdot 3}{2^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}(1+x)^{-7/2} \quad \rightarrow \quad f^{(4)}(0) = \frac{-1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}$$

...  $\Rightarrow$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{15}{16}x^4 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!} x^k$$

Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

Jos Taylorin sarjasta otetaan vain  $n + 1$  termiä, niin saamme *Taylorin polynomin*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

**Esimerkki 5:** Jos

$$\ln(1+x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{2 \cdot 3^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 3^3}(x-2)^3 - \frac{1}{4 \cdot 3^4}(x-2)^4 + \dots$$

niin vastaava toisen kertaluvun Taylorin polynomi on

$$P_2(x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{18}(x-2)^2$$

Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

Aiheet

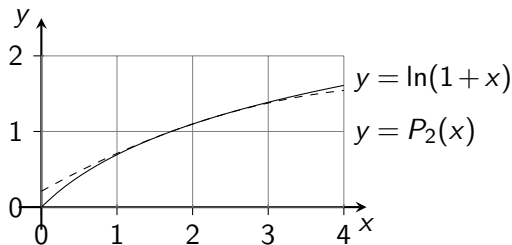
Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

**Esimerkki 6:** Piirretään funktion  $f(x) = \ln(1+x)$  ja sen toisen kertaluvun Taylorin polynomin  $P_2(x)$  kuvaajat (kehityskeskus  $a = 2$ )



Aiheet

Taylorin ja  
MacLaurinin sarjat

Esimerkkejä

Taylorin polynomi

Taylorin polynomin  
jäännöstermi  
(virhearvio)

Voidaan osoittaa (Todistus sivuutetaan tässä), että

Jos sarja  $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$  suppenee, kun  $|x-a| < R$  ja vastaava  $n$ :nnen kertaluvun

Taylorin polynomi on

$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$ , niin:

jos  $|x-a| < R$ , niin

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad \text{missä}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \text{ ja}$$

$z$  on jokin lukujen  $a$  ja  $x$  välillä oleva luku.

**Esimerkki 7:** Arvioidaan virhettä esimerkin 6 tapauksessa.  
Kun arvioimme, että

$$f(3) \approx P_2(3) = \ln 3 + \frac{1}{3}(3-2) - \frac{1}{18}(3-2)^2 = 1.376390066$$

niin todellisuudessa

$$f(3) = P_2(3) + R_2(3), \quad \text{missä}$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(z)}{3!}(x-2)^3$$

Koska  $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$  ja  $2 \leq z \leq 3$ , niin  $\frac{2}{3! \cdot 4^3} \leq R_2(x) \leq \frac{2}{3! \cdot 3^3}$ .

Siis  $1.381598 \leq f(3) \leq 1.388736$  (eli  $f(3) = 1.385 \pm 0.004$ )