Determinantti

Kaksirivinen determinantti

Kolmirivinen determinantti

Determinantin yleinen kehittäminen

Determinantin ominaisuuksia

Nimityksiä tulevaa varten

2×2-matriisin

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2×2-matriisin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esim. Jos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

niin

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla eliminoimalla muuttuja y.

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot a_{22} \\ \cdot(-a_{12}) \end{array} \right.$$

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla eliminoimalla muuttuja y.

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot(-a_{12}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcl} a_{11}a_{22}x & + & a_{12}a_{22}y & = & a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x & - & a_{12}a_{22}y & = & -a_{12}b_2 \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x & & & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

JOHTOPÄÄTÖS:
Kahden yhtälön ja kahden muuttujan yhtälöryhmällä

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos

$$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0.$$

3×3-matriisin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \quad +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} [2] & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad +[2]\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & [3] & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad +2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - [3]\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & [1] \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad +2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + [1]\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad +2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
=\quad & +2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
=\quad & 2\cdot(5\cdot 7 - 0\cdot(-6)) - 3\cdot(0\cdot 7 - 0\cdot 4) + 1\cdot(0\cdot(-6) - 5\cdot 4)
\end{aligned}
$$

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
= \quad & +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
= \quad & 2 \cdot (5 \cdot 7 - 0 \cdot (-6)) - 3 \cdot (0 \cdot 7 - 0 \cdot 4) + 1 \cdot (0 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) \\
= \quad & 2 \cdot (35 - 0) - 3 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (0 - 20)
\end{aligned}
$$

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
= \quad & +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
= \quad & 2 \cdot (5 \cdot 7 - 0 \cdot (-6)) - 3 \cdot (0 \cdot 7 - 0 \cdot 4) + 1 \cdot (0 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) \\
= \quad & 2 \cdot (35 - 0) - 3 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (0 - 20) \\
= \quad & 70 - 0 - 20 = 50
\end{aligned}
$$

Determinantti voidaan kehittää minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen.
Merkit pitää katsoa kaaviosta

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ [0] & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad -[0] \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & [5] & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + [5] \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & [0] \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad -0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - [0]\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & [0] \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - [0] \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -0 + 5 \cdot (14 - 4) - 0 = 50 \end{aligned}$$

- $\det(\boldsymbol{I}) = 1.$

Determinantin ominaisuuksia

- $\det(\boldsymbol{I}) = 1$.
- Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi $\boldsymbol{A}^{-1}$), jos ja vain jos $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

- $\det(\boldsymbol{I}) = 1$.
- Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi $\boldsymbol{A}^{-1}$), jos ja vain jos $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$
- $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$

- $\det(\boldsymbol{I}) = 1$.
- Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi $\boldsymbol{A}^{-1}$), jos ja vain jos $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$
- $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
- $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$

- Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku

Determinantin ominaisuuksia

- Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0

Determinantin ominaisuuksia

- Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0
- Jos jokin kaavion rivi lisätään reaaliluvulla kerrottuna kaavion toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantin arvo on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantin arvo (sama pätee sarakkeille)

Determinantin ominaisuuksia

- Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0
- Jos jokin kaavion rivi lisätään reaaliluvulla kerrottuna kaavion toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantin arvo on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantin arvo (sama pätee sarakkeille)
- Kolmiomuodossa olevan kaavion determinantti on diagonaali-alkioiden tulo.

$$\text{Matriisi} \quad = \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nimityksiä tulevaa varten

$$
\begin{aligned}
\text{Matriisi} &= \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Alimatriisi} &= \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Matriisi} &= \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Alimatriisi} &= \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Minori} &= \det(\boldsymbol{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Matriisi} &= \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Alimatriisi} &= \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Minori} &= \det(\boldsymbol{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30 \\
\text{Kofaktori} &= (-1)^{1+2}\det(\boldsymbol{A}_{12}) = -30
\end{aligned}
$$