Vaasan yliopisto, 2005

Matemaattinen analyysi, TMA.111

Korjaaja: lehtori Matti Laaksonen (menetelmätieteiden laitos / Tervahovi

2. välikoe 23.03.2005

Ratkaise 4 tehtävää.

Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!

1. Muodosta funktion MacLaurinin sarja funktiolle $f(x) = (1+x)^{1/3}$. (Ohje: riittää, kun saat laskettua numerokertoimet viidelle ensimmäiselle termille.)

2. a) (3p) Suppeneeko seuraava sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-k^{-1}}{k!}\right)$$

b) (2p) Selitä lyhyesti mitä tarkoittaa se, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee.
c) (1p) Selitä lyhyesti miten lasketaan potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-5)^k$ suppenemissäde.

3. Määritä differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y' - xy = x$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' - 8y = -40$, kun alussa $y(0) = 10$ ja $y'(0) = 0$.

5. a) Miten määritellää kahden muuttujan funktion $f(x,y)$ homogeenisuus?
b) Mitkä seuraavista funktioista ovat homogeenisia, ja jos ovat niin mitä astetta ne ovat?

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= 3x^2y + 5y^3 \\
h(x,y) &= \frac{x^3 - xy}{x^2 - y} \\
r(x,y) &= \sqrt{x+3y} \\
s(x,y) &= \ln(x+y) \\
u(x,y) &= (w(x+3y))^2, \quad \text{missä } x \mapsto w(x) \text{ on lineaarinen funktio}
\end{aligned}$$

Logaritmikaavoja:

$$\begin{aligned}
\ln(a \cdot b) &= \ln a + \ln b \\
\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \\
\ln(a^n) &= n \cdot \ln a
\end{aligned}$$

Vaasan yliopisto, 2005

Matemaattinen analyysi, TMA.111

Korjaaja: lehtori Matti Laaksonen (menetelmätieteiden laitos / Tervahovi

2. välikoe 23.03.2005

Ratkaise 4 tehtävää.

Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!

1. Muodosta funktion MacLaurinin sarja funktiolle $f(x) = (1+x)^{1/3}$.
(Ohje: riittää, kun saat laskettua numerokertoimet viidelle ensimmäiselle termille.)

$$f(x) = (1+x)^{1/3} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \qquad f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-5/3} \qquad f''(0) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f'''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-8/3} \qquad f'''(0) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-11/3} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2\cdot 1}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{5\cdot 2\cdot 1}{3^3\cdot 3!}x^3 - \frac{8\cdot 5\cdot 2\cdot 1}{3^4\cdot 4!}x^4 + \cdots$$

2. a) (3p) Suppeneeko seuraava sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-k^{-1}}{k!}\right)$$

b) (2p) Selitä lyhyesti mitä tarkoittaa se, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee.
c) (1p) Selitä lyhyesti miten lasketaan potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-5)^k$ suppenemissäde.

a) $a_k = \frac{k-1}{k \cdot k!}$

Suhdetesti

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{(k+1)(k+1)\cdot\cancel{k!}}\cdot\frac{k\cdot\cancel{k!}}{(k-1)}\right|$$

$$= \lim\left|\frac{k^2}{k^3-k^2+k-1}\right| = 0 < 1 \quad \downarrow$$

Sarja suppenee

b) Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee kun osasummien jono $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ suppenee

c) Jos raja-arvo

(1) $L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ on olemassa ja $L \neq 0$ niin suppenemissäde $R = \frac{1}{L}$ ja sarja suppenee kun $|x-5| < R$

(2) Jos $L = 0$, niin $R = \infty$ ja sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$

(3) Jos raja-arvo L ei ole olemassa, niin sarja suppenee vain kun $x = 5$.

3. Määritä differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y' - xy = x$$

Homogeeni yhtälö

$$y' - xy = 0$$
$$y' = xy$$
$$\frac{dy}{dx} = xy \iff \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$
$$|y| = C_2 e^{\frac{1}{2}x^2}$$
$$\underline{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}}$$ (Homogeeni yht. yleinen ratk.)

Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu

yrite $y = A$ (vakio)
$y' = 0$

DY: $0 - x \cdot A = x \iff A = -1$

$$\therefore \underline{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1}$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' - 8y = -40$, kun alussa $y(0) = 10$ ja $y'(0) = 0$.

Karakteristinen yhtälö

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$r_1 = 2 \quad \text{ja} \quad r_2 = -4$$

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}}$$

Täydellisen DY:n yksityisratkaisu

yritä $y = A$ (vakio)

$y' = 0$

$y'' = 0$

DY: $0 + 2 \cdot 0 - 8A = -40 \Leftrightarrow A = 5$

DY:n yleinen ratkaisu $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + 5}$

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 4C_2 e^{-4x}$$

Alkuarvot

$$\begin{cases} y(0) = 10 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 5 = 10 & -2 \\ 2C_1 - 4C_2 = 0 & \div 2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} C_1 + C_2 = 5 & \rightarrow C_1 = 10/3 \\ -6C_2 = -10 & \rightarrow C_2 = 5/3 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Vast: } y = \frac{10}{3} e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-4x} + 5}$$

5. a) Miten määritellää kahden muuttujan funktion $f(x,y)$ homogeenisuus?
b) Mitkä seuraavista funktioista ovat homogeenisia, ja jos ovat niin mitä astetta ne ovat?

		ON/EI	aste
$g(x,y) = 3x^2y + 5y^3$		ON	3
$h(x,y) = \dfrac{x^3 - xy}{x^2 - y}$		ON	1
$r(x,y) = \sqrt{x+3y}$		ON	1/2
$s(x,y) = \ln(x+y)$		EI	—
$u(x,y) = (w(x+3y))^2$,	missä $x \mapsto w(x)$ on lineaarinen funktio	ON	2

Logaritmikaavoja:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$
$$\ln(a^n) = n \cdot \ln a$$

a) $f(x,y)$ on astetta s oleva homogeeninen funktio, jos kaikille α, x, y on totta, että

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^s f(x,y)$$

b) $g(\alpha x, \alpha y) = 3(\alpha x)^2 \cdot \alpha y + 5(\alpha y)^3$
$= 3\alpha^2 x^2 \cdot \alpha y + 5\alpha^3 y^3 = \alpha^3 g(x,y)$
ON homog. astetta 3

$h(\alpha x, \alpha y) = \dfrac{\alpha^3(x^3 - xy)}{\alpha^2(x^2 - y)} = \alpha h(x,y)$ ON astetta 1

$r(\alpha x, \alpha y) = \sqrt{\alpha x + 3\alpha y} = \alpha^{\frac{1}{2}} r(x,y)$ ON astetta $\frac{1}{2}$

$s(\alpha x, \alpha y) = \ln(\alpha x + \alpha y) = \ln \alpha + s(x,y)$ EI ole

$u(\alpha x, \alpha y) = (w(\alpha(x+3y)))^2 = (\alpha w(x+3y))^2$

$= \alpha^2 (w(x+3y))^2 = \alpha^2 u(x,y)$

ON astetta 2