Vaasan yliopisto, 2006

Matemaattinen analyysi, orms.1010

Korjaaja: lehtori Matti Laaksonen (menetelmätieteiden laitos / Tervahovi)

2. välikoe

26.05.2006 kello 9-12 salissa F416

1. Muodosta funktion Taylorin sarja kehityskeskuksena $a = 1$ funktioille

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^{0.5}, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^{2}$$

(Ohje: riittää, kun selvität viisi alimman asteen termiä sarjasta. Numeeriset arvot riittävät; ei tarvitse miettiä esitysmuotoa.)

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{0,5}$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{-0,5} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2^2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{-0,5}$$

$$f''(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2^2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{-3/2} \cdot \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2^4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2^4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{-5/2} \cdot \tfrac{1}{2} = 3 \cdot \tfrac{1}{2^6}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{-5/2}$$

$$f''''(x) = -\tfrac{5}{2} \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2^6}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\right)^{-7/2} \cdot \tfrac{1}{2} = -5 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2^8}\left(1 + \tfrac{1}{2}x\right)^{-7/2}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f'(1) &= \frac{1}{2^2} \\ f''(1) &= -\frac{1}{2^4} \\ f'''(1) &= \frac{3}{2^6} \\ f''''(1) &= \frac{5 \cdot 3}{2^8} \end{aligned}\right\}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2}(x-1) - \frac{1}{2^4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{2^6 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{5 \cdot 3}{2^8 \cdot 4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^2$$

$$g'(x) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)$$

$$g''(x) = \frac{1}{2}$$

$$g'''(x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= 1 \\ g'(1) &= 1 \\ g''(1) &= \tfrac{1}{2} \\ g'''(1) &= 0 \\ g''''(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

$$= 1 + (x-1) + \frac{1/2}{2!}(x-1)^2$$

$$= 1 + (x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$$

2. a) Suppeneeko seuraava sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k k!}{(2k)!}$$

b) Selitä sanallisesti (muutamaa lausekettakin saa käyttää) miten selvität potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

suppenemissäteen. Millä x:n arvoilla potenssisarja silloin suppenee?

a) Suhdetesti

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n\, n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10\,(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \quad \downarrow$$

sarja suppenee

b) (1) Jos raja-arvo $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$

on olemassa ja > 0, niin $R = \frac{1}{L}$

ja sarja suppenee, kun

$|x-a| < R$ eli $a-R < x < a+R$

(2) Jos $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 0$, niin $R = \infty$

ja sarja suppenee kaikilla x:n arvoilla

(3) Jos raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ ei ole

olemassa, niin sarjan suppeneminen pätee avoimelle

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{xy'}{2} = 1 - y$$

$$\frac{x}{2}\frac{dy}{dx} = 1-y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{1-y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\int \frac{-dy}{1-y} = \int \frac{2}{x}\,dx + C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad -\ln|1-y| = 2\ln x + \ln c_1$$

$$\Leftrightarrow \quad |1-y| = c_2 e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-y = c e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 1 - c e^{-x^2}}}$$

4. a) (4p) Ratkaise differentiaaliyhtälö $2y''+5y'+2y = 100$, kun alussa $y(0) = 30$ ja $y'(0) = -5$.
b) (2p) Onko tasapainoratkaisu stabiili?

a) DY: $2y''+5y'+2y = 100$, $y(0)=30$, $y'(0)=-5$

HY: $2y''+5y'+2y=0$

KY: $2r^2+5r+2=0$

$\Leftrightarrow r = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-5\pm 3}{4}$

$\Leftrightarrow r_1 = -2$ ja $r_2 = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow$ HY:n yleinen ratkaisu $\underline{y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}}$

DY:n yksityisratkaisu yritteellä

yrite $\left.\begin{array}{l} y_1 = A \\ y_1' = 0 \\ y_1'' = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2\cdot 0 + 5\cdot 0 + 2A = 100$

$\Leftrightarrow A = 50$

$y_1(x) = 50$

HY:n yleinen ratkaisu:

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = \underline{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + 50}$

$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

Alkuarvot

$\begin{cases} y(0) = 30 \\ y'(0) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 50 = 30 \\ -2C_1 - \frac{1}{2}C_2 = -5 \end{cases} \quad +2$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = -20 \\ \frac{3}{2}C_2 = -45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = -30 \end{cases}$

$\underline{\underline{V: \quad y(x) = 10e^{-2x} - 30e^{-\frac{1}{2}x} + 50}}$