Vaasan yliopisto, kevät 2011 / ORMS1010 / Matti Laaksonen

Matemaattinen Analyysi

2. välikoe ti 10.5.2011

ratkaise 3 tehtävää!

Tentissä saa olla mukana laskin ja matemaattinen taulukkokirja (MAOL tms.)

1. a) (4p) Suppenevatko seuraavat sarjat

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+10)^2}{k!}, \quad b = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k},$$

b) (2p) Perustele seuraava väite (yhtälö 1p, epäyhtälö 1p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 2k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$$

a) suhdetesti

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+11)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+10)^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+22n+121}{n^3+20n^2+100n} \right|$$

$= 0 < 1 \rightarrow$ sarja suppenee

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2 > 1$$

$\rightarrow$ sarja hajaantuu

b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) +$$

$$= \frac{1}{2\cdot(2-1)} + \frac{1}{4\cdot(4-1)} + \frac{1}{6\cdot(6-1)} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 2k}$$

$\boxed{1}$

(1) Kaikilla $k \geq 1$

$k^2 \geq k$

$\Leftrightarrow (2k)^2 - 2k^2 \leq (2k)^2 - 2k$

$\Leftrightarrow 2k^2 \leq (2k)^2 - 2k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2k^2} \geq \frac{1}{(2k)^2 - 2k}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ suppenee

Majoranttiperiaatteen mukaan

$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 2k}$ suppenee

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 2k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$$

$\boxed{2}$

2. a) Muodosta funktion MacLaurinin sarja funktiolle

$$f(x) = (1-2x)^{-1}$$

(Ohje: riittää, kun selvität viisi alimman asteen termiä sarjasta. Numeeriset arvot riittävät; ei tarvitse miettiä esitysmuotoa.)
b) Millä x:n arvoilla seuraava potenssisarja suppenee

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2^2}(x-3)^2 + \frac{1}{2^3}(x-3)^3 + \frac{1}{2^4}(x-3)^4 + \dots$$

a)

$$f(x) = (1-2x)^{-1}$$
$$f'(x) = -1\cdot(1-2x)^{-2}\cdot(-2) = 2(1-2x)^{-2}$$
$$f''(x) = -2\cdot 2\cdot(1-2x)^{-3}\cdot(-2) = 2\cdot 2^2(1-2x)^{-3}$$
$$f'''(x) = -3\cdot 2\cdot 2^2(1-2x)^{-4}\cdot(-2) = 3\cdot 2\cdot 2^3(1-2x)^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = -4\cdot 3\cdot 2\cdot 2^3(1-2x)^{-5}\cdot(-2) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2^4(1-2x)^{-5}$$

$$f^{(k)}(x) = k!\cdot 2^k(1-2x)^{-k-1}$$

$f(0) = 1 = 0!\cdot 2^0 = 1$
$f'(0) = 2 = 1!\cdot 2^1 = 2$
$f''(0) = 2!\cdot 2^2 = 8$
$f'''(0) = 3!\cdot 2^3 = 48$
$f^{(4)}(0) = 4!\,2^4 = 384$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
$$= 1 + 2x + \frac{2!\cdot 2^2}{2!}x^2 + \frac{3!\cdot 2^3}{3!}x^3 + \dots$$
$$= \underline{1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \dots}$$

b)

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{1}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = 2$$

Sarja suppenee, kun $|x-3| < 2$
eli $1 < x < 5$

Vastaus: a) $\underline{f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots}$

b) <u>sarja suppenee, kun $1 < x < 5$</u>

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$xy' = y + x^2, \qquad y(1) = 5.$$

DY: $xy' = y + x^2$

HY: $xy' = y$

<u>HY ratkaistaan separoimalla</u>

$$x\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = e^{C_1} x$$

$$\underline{y_0 = Cx}$$

<u>DY:n yksityisratkaisu yritteellä</u>

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= Ax^2 + Bx + C \\ y_1' &= 2Ax + B \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{sij DY:öön}}$$

$$x(2Ax + B) = Ax^2 + Bx + C + x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = A + 1 \\ B = B \\ 0 = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \text{vapaa} \\ C = 0 \end{cases}$$

Termiä Bx ei kannata sisällyttää y_1:n lausekkeeseen, koska vastaava termi on jo y_0:ssa

$\rightarrow \quad y_1 = x^2$

$\therefore$ yleinen ratkaisu $y = y_0 + y_1 = \underline{Cx + x^2}$

Alkuarvo $\quad y(1) = 5$

$\Leftrightarrow \quad C \cdot 1 + 1^2 = 5$

$\Leftrightarrow \quad C = 4 \quad \rightarrow \quad y = 4x + x^2$

<u>Vastaus: $y(x) = 4x + x^2$</u>

4. a) (4p) Ratkaise differentiaaliyhtälö $4y'' + 5y' + y = -2x$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=0$.
b) (2p) Onko a-kohdan ratkaisu stabiili?

a) HY: $4y'' + 5y' + y = 0$ (Homogeeninen yhtälö)

KY: $4r^2 + 5r + 1 = 0$ (Karakteristinen yhtälö)

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4} = \frac{-5 \pm 3}{8}$$

$r_1 = -\frac{1}{4}$ ja $r_2 = -1$

$\Rightarrow$ HY:n yleinen ratkaisu $y_0 = C_1 e^{-\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x}$

DY:n yksityisratkaisu

yritä $\begin{cases} y_1 = Ax + B \\ y_1' = A \\ y_1'' = 0 \end{cases}$

$\overset{\text{sij}}{\Rightarrow}$ DY: $4\cdot 0 + 5A + (Ax + B) = -2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ 5A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 10 \end{cases}$$

$\therefore$ $y_1 = -2x + 10$

DY:n yleinen ratkaisu

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{-\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x} - 2x + 10$$

$$y' = -\tfrac{1}{4}C_1 e^{-\frac{1}{4}x} - C_2 e^{-x} - 2$$

Alkuarvot

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 10 = 1 \\ -\frac{1}{4}C_1 - C_2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -28/3 \\ C_2 = 1/3 \end{cases}$$

Vastaus: $y = -\frac{28}{3} e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{3} e^{-x} - 2x + 10$