Vaasan yliopisto, kevät 2013 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

1. välikoe ke 3.4.2013

$\boxed{\text{Ratkaise kolme tehtävää!}}$ Kokeessa saa saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa.

1. Tutki neliömuodon

$$f(x,y,z) = -x^2 + 2xy - 3y^2 - 2yz - z^2$$

definiittisyys.

$$f(x,y,z) = -x^2+2xy-3y^2-2yz-z^2$$

$$= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pääminorit $D_1 = -1 < 0$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3) - 1\cdot 1 = 2 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(3-1) - (-1-0) + 0$$

$$= -1 < 0$$

Koska $\left\{\begin{array}{l} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 < 0 \end{array}\right\}$, niin neliömuoto on negatiivisesti definiitti

Vastaus: neliömuoto on negatiivisesti definiitti

2. a) Osoita, että matriisin

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2, 1 ja -1.

b) Määritä ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit.

a)
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 0-\lambda & -1 \\ -6 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= +(5-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\left[\lambda^2+3\lambda-4\right] - 3\left[0-6\right] + 3\left[0-6\lambda\right]$$

$$= 5\lambda^2+15\lambda-20-\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda+18-18\lambda$$

$$= -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$$

$$\rightarrow P(2) = -2^3+2\cdot 2^2+2-2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$P(1) = -1^3+2\cdot 1^2+1-2 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$P(-1) = -(-1)^3+2\cdot(-1)^2+(-1)-2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -1$$

---

b)
$$B\bar{x} = 2\bar{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{aligned} 5x_1+3x_2+3x_3 &= 2x_1 \\ -x_3 &= 2x_2 \\ -6x_1-4x_2-3x_3 &= 2x_3 \end{aligned}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{aligned} 3x_1+3x_2+3x_3 &= 0 \quad \cdot 2 \\ -2x_2-x_3 &= 0 \quad \cdot 1 \\ -6x_1-4x_2-5x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} &\rightarrow x_1 = x_2 \\ &\rightarrow x_3 = -2x_2 \\ &\rightarrow 0 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}, \ a \neq 0$$

$$B\bar{x} = 1\cdot\bar{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{aligned} 5x_1+3x_2+3x_3 &= x_1 \\ -x_3 &= x_2 \\ -6x_1-4x_2-3x_3 &= x_3 \end{aligned}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{aligned} 4x_1+3x_2+3x_3 &= 0 \quad \cdot 1{,}5 \\ -x_2-x_3 &= 0 \quad \cdot 0{,}5 \\ -6x_1-4x_2-4x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} &\rightarrow x_1 = 0 \\ &\rightarrow x_3 = -x_2 \\ &\rightarrow 0 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix}, \ b \neq 0$$

$$B\bar{x} = -1\cdot\bar{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{aligned} 5x_1+3x_2+3x_3 &= -x_1 \\ -x_3 &= -x_2 \\ -6x_1-4x_2-3x_3 &= -x_3 \end{aligned}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{aligned} 6x_1+3x_2+3x_3 &= 0 \quad \cdot 1 \\ x_2-x_3 &= 0 \quad \cdot 1 \\ -6x_1-4x_2-2x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} &\rightarrow x_1 = -x_2 \\ &\rightarrow x_3 = x_2 \\ &\rightarrow 0 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \ c \neq 0$$

Vastaus $\lambda_1 = 2, \ \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}; \ \lambda_2 = 1, \ \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix}; \ \lambda_3 = -1, \ \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ c \end{pmatrix}$

3. Vaasan Raamipuu Oy myy sahauksen sivutuotteena syntyvän purun raaka-aineeksi kahteen jatkojalostus-kohteeseen. (1) Osasta purua tehdään lämmitykseen käytettävää pellettiä ja (2) osa purusta käytetään muovikomposiitti-levyjen valmistukseen. Viikossa purua syntyy 40 tonnia. Pelletit tehdään pienessä puristamossa, jonka koko tuotanto markkinoidaan lähialueilla. Jos pellettiä on paljon tarjolla, hinta putoaa, ja vastaavasti pienen tarjonnan tilanteessa hinta nousee. Pelletin valmistaja maksaa raaka-aineesta Raamipuulle hinnan, joka on suoraan verrannollinen pelletin markkinahintaan. Arvioidaan, että pelletiksi valmistettavan purun yksikköhinta on

$$p = 10.10 - 0.095 \cdot x, \quad \text{euroa/tonni},$$

missä x on pelletiksi valmistettavan purun määrä (tonnia/viikko). Muovikomposiitti-levyn valmistaja maksaa purusta 9.06 euroa/tonni, mutta tuotteen välivarastointi aiheuttaa kustannuksen 0.86 euroa/tonni, joten kate on 8.20 euroa tonnilta.

Tällä hetkellä yritys myy purua 15 tonnia viikossa pellettitehtaalle ja 25 tonnia viikossa levytehtaale.

Tarkista päätöksen järkevyys määrittämällä optimaaliset arvot pelletiksi valmistettavan purun määrälle x ja muovikomposiitiksi valmistettavan purun määrälle y ratkaisemalla seuraava optimointitehtävä

$$\begin{array}{lrcl} \max f(x,y) = & px + 8.20y \\ \text{ehdoin} & x + y & = & 40 \end{array}$$

(Ohje: jos saat eri tuloksen kuin $x = 15$ ja $y = 25$, niin vertaa tavoitefunktion arvoja eri ratkaisuissa.)

Lagrangen funktio

$$L(x,y,\lambda) = -(10{,}10 - 0{,}095x)x - 8{,}20y + \lambda(x+y-40)$$
$$= -10{,}10x + 0{,}095x^2 - 8{,}20y + \lambda(x+y-40)$$

Välttämätön ehd

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10{,}10 + 0{,}19x + \lambda = 0 & (1) \\ -8{,}20 + \lambda = 0 & (2) \\ x + y = 40 & (3) \end{cases}$$

$(2) \to \lambda = 8{,}20$

$(1) \to -10{,}10 + 0{,}19x + 8{,}20 = 0 \to x = 10{,}0$

$(3) \to 10{,}0 + y = 40 \to y = 30{,}0$

$f(10,30) = 10{,}10 \cdot 10 - 0{,}095 \cdot 10^2 + 8{,}20 \cdot 30 = 337{,}50$

$f(15,25) = 10{,}10 \cdot 15 - 0{,}095 \cdot 15^2 + 8{,}20 \cdot 25 = 335{,}13$

Vastaus: optimissa $x = 10{,}0$ ja $y = 30{,}0$

Tavoitefunktion arvo on silloin $f(10,30) = 337{,}50$

$(f(15,25) = 335{,}125)$

4. Mikä on rajoittamattoman optimointitehtävän:
a) lokaalin maksimikohdan välttämätön ehto ja
b) lokaalin maksimikohdan riittävä ehto

a) Välttämätön ehto sille, että piste $\bar{x}_0$ on lokaali maksimikohta on, että

"gradientti on nollavektori $\bar{x}_0$:ssa" eli

$$\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0} \quad \text{eli}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_0) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) = 0$$

b) Riittävä ehto sille, että piste $\bar{x}_0$ on lokaali maksimikohta on, että

(1) $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$ ja

(2) Hessin matriisi on negatiivisesti definiitti

Hessin matriisi on

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$