Vaasan yliopisto, kevät 2014 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

2. välikoe 15.5.2014

ratkaise 3 tehtävää!

Tentissä saa olla mukana laskin ja matemaattinen taulukkokirja (MAOL tms.)

Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!

1. Kirjoita Lagrangen funktio ja muodosta välttämätön ehto optimointitehtävälle

$$\begin{cases} \min \quad z \;=\; x^2 - 2xy + 4y^2 \\ \text{st.} \qquad\quad 3x + 4y = 10 \end{cases}$$

Lagrangen funktio:

$$\mathscr{L} \;=\; x^2 - 2xy + 4y^2 + \lambda(3x + 4y - 10)$$

Välttämätön ehto:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_x = 0 \\ \mathscr{L}_y = 0 \\ \mathscr{L}_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3\lambda = 0 \\ -2x + 8y + 4\lambda = 0 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$$

2. a) mikä on Cauchyn kriteeri jonon suppenemiselle,
b) Millä x:n arvoilla seuraavat sarjat suppenenevat?

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10k}{3^k}(x-2)^k, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{(2k)!}x^k$$

a) Cauchyn suppenemis-kriteeri jonolle: Jono (a_k) suppenee, jos jokaista positiivista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa indeksi n_ε niin, että

$$|a_k - a_{k+p}| < \varepsilon, \text{ aina, kun } k \geq n_\varepsilon, p \geq 1.$$

b)

$$L \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10(n+1)}{3^{(n+1)}}\cdot\frac{3^n}{10n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10n+10}{30n}\right| = \frac{1}{3}$$

$\longrightarrow R = \dfrac{1}{L} = 3$

$\rightarrow$ ensimmäinen sarja suppenee, kun

$$-3 < x-2 < 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < x < 5$$

$$L \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{(n+1)}}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{10^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10}{(2n+2)(2n+1)}\right| = 0$$

$\longrightarrow R = \infty$

$\rightarrow$ ensimmäinen sarja suppenee kaikilla x:n arvoilla

3. Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{y} \\
\Leftrightarrow y\,dy &= x^2\,dx \\
\Leftrightarrow \int y\,dy &= \int x^2\,dx \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}C \\
\Leftrightarrow y &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}
\end{aligned}$$

4. Ratkaise $y'' + 5y' + 4y = 20$, kun $y(0) = 2$, ja $y'(0) = 0$.

Differentiaaliyhtälö:

(DY): $y'' + 5y' + 4y = 20$

Homogeeniyhtälö:

(HY): $y'' + 5y' + 4y = 0$

Karakteristinen yhtälö:

$$\begin{aligned}
r^2 + 5r + 4 &= 0 \\
\Leftrightarrow r &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2} \\
&\rightarrow \quad r_1 = -1, \qquad r_2 = -4
\end{aligned}$$

HY:n yleinen ratkaisu: $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$

DY:n yksityisratkaisu yritteellä $y_1(x) = A$, $y_1'(x) = 0$, $y_1''(x) = 0$

$$\text{(DY:) } y'' + 5y' + 4y = 20 \qquad \rightarrow \qquad 0 + 0 + 4A = 20 \qquad \rightarrow \qquad A = 5.$$

Siis $y_(x) = 5$, ja DY:n yleinen ratkaisu: $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + 5.$

Alkuarvot:
$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x}$.

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 5 = 2 \\ -C_1 - 4C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vastaus: $y(x) = -4e^{-x} + e^{-4x} + 5.$