TMA.111 Matemaattinen analyysi

© Matti Laaksonen, 2003

Vaasan Yliopisto, 2003
Teknillinen tiedekunta
Matemaattisten tieteiden laitos
PL 700 (Wolffintie 34)
65101 VAASA
Vaasan yliopisto

Matemaattinen analyysi 2003, sisältö:

1. Johdanto 1
1.1. Kurssin tavoitteet 1

2. Matriisilaskentaa 3
2.1. Lineaarialgebran kertausta 3
2.1.1 Sisätulo ja normi 5
2.1.2 Lineaarinen riippumattomuus ja kanta 7
2.1.3 Kannanvaihto 13
2.2. Matriisin rangi 17
2.3. Lineaarikuvaus 20
2.3.1 Lineaarikuvauksen matriisi 20
2.3.2 Ydin ja kuva 24
2.4. Matriisin ominaisarvot 27
2.5. Similaarisuus 34
2.6. Matriisin diagonalisointi 35
2.7. Matriisin LU-hajoitelma 37
2.8. Matriisin QR-hajoitelma 40
2.9. Matriisin singulaariarvohajoitelma 42
2.10. Matriisin definiittisyys 43
2.11. Yleinen lineaariavaruus* *

3. Ääriarvotehtäviä 47
3.1. Yhden muuttujan tapaus, kertaus 47
3.2. Kahden muuttujan tapaus ilman rajoitteita 54
3.2.1 Gradientti, välttämätön ehto 57
3.2.2 Hessian, riittävä ehto 61
3.2.3 Optimin etsiminen numeerisesti 63
3.2.4 Esimerkkejä 65
3.3. Monen muuttujan tapaus ilman rajoitteita 66
3.4. Rajoitteellinen optimointi, yhtälörajoite 68
3.4.1 Sijoituskeino 69
3.4.2 Lagrangen kertojat, yhtälörajoite 71
3.4.3 Resurssirajoite, resurssin varjohinta 76
3.5. Rajoitteellinen optimointi, epäyhtälörajoite 79
3.5.1 Graafinen ratkaisu 79
3.5.2 Laskeva ja käypä suunta 82
3.5.3 Lagrangen kertojat, epäyhtälörajoite 84
3.5.4 Optimointitehtävän relaksaatio 89
3.6. Pienimmän neliösumman menetelmä 91
3.6.1 Approksimointi polynomilla 91

3.6.2 Lineaarisen mallin sovitus 94

4. Jonot ja sarjat 103
4.1. Supremum ja infimum 103
4.2. Jonon suppeneminen 104
4.3. Sarjan suppeneminen 106
4.4. Majoranttiperiaate, suppenemistestejä 107
4.5. Transientin kassavirran nykyarvo 109
4.6. Potenssisarja, suppenemisväli 114
4.7. Taylorin ja MacLaurinin sarjat 117
4.8. Taylorin polynomi 119

5. Dynaamisen ilmiön mallinnus 120
5.1. Differentiaaliyhtälö 120
5.2. Ensimmäisen kertaluvun DY 125
5.2.1 Separoituva DY 125
5.2.1 Muotoa $y' = f(\frac{y}{x})$ oleva DY 127
5.3. Lineaarinen 1. kertaluvun diff.yhtälö 128
5.4. Sovelluksia 133
5.4.1 Lääkkeen määrä elimistössä 134
5.4.2 Eksponentiaalinen kasvu 135
5.4.3 Logistinen kasvu 138
5.4.4 Auton hinta 140
5.5. Numeerinen simulointi 142
5.6. 2. kertaluvun lineaarinen vakiokert. DY 144
5.7. 1. kertaluvun lin. vakiokert. DY-ryhmä 154
5.8. Yleinen tasapainon stabiilisuus 158

6. Kirjallisuutta *

1. Johdanto

1.1 Kurssin tavoitteet

Tämän kurssin tavoite on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet jatkaa operaatioanalyysin ja taloustieteiden opiskelua. Jatkossa opiskelija saa tutustua sovelluksiin, joissa "saatu hyöty" riippuu monesta muuttujasta. Luonnollinen tehtävä silloin on löytää muuttujille sellaiset arvot, että hyöty saadaan mahdollisimman suureksi. Tämän perustehtävän ratkaisemista sanotaan optimoinniksi. Jo talousmatematiikan perusteissa tutustuttiin lineaariseen optimointiin. Tällä kurssilla tavoitefunktio ja rajoitteet saavat olla epälineaarisia.

Kurssin sisältö jakautuu karkeasti neljään osaan:

1. matriisilaskentaa
2. optimointia
3. jonoja ja sarjoja
4. differentiaaliyhtälöitä

Kurssin alussa esitettäviä matriisien ominaisuuksia tarvitaan myöhemmin optimoinnin ja differentiaaliyhtälöiden yhteydessä. Matriiseja opiskelija tulee tarvitsemaan muillakin kursseilla, joten asiakokonaisuus on tärkeä. Matriisiosuus alkaa lineaarialgebran kertauksella, jota luultavasti ei tämän kurssin tentissä tulla kysymään. Missä kertaus loppuu ja uusi materiaali alkaa riippuu kulloisenkin vuoden luennoijasta ja edeltävien kurssien toteutuksesta.

* merkinnät, sanonnat
* matriisilaskut Excel:llä
* graafiset esitykset
* analyysi, harjoittele kirjainten käsittelyä lausekkeissa

2. Matriisilaskentaa

2.1 Lineaarialgebran kertausta

Merkitsemme koulumatematiikasta tuttua vektoria $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ sarake matriisilla

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Merkintätavan muutos helpottaa jatkossa siirtymistä useamman kuin kahden koordinaatin vektoreihin. Yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen on nyt helposti määriteltävissä.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Perinteinen ja hyvä tapa saada mielikuva edellä olleista vektoreista on ajatella ne siirtymisinä. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ = "kaksi oikealle ja kolme ylös", $\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ = "viisi oikealle ja yksi ylös" ja $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ = "kaksi oikealle ja kolme ylös ja vielä viisi oikealle ja yksi ylös" = "seitsemän oikealle ja neljä ylös" (ks. Kuva 2.1).

Käytämme n-alkioisten vektoreiden joukolle merkintää

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \mid \ a_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Sanomme $\mathbb{R}^n$:ää n-ulotteiseksi Euklidiseksi vektoriavaruudeksi. $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ ovat lukion matematiikasta tutut lukusuora, taso ja kolmiulotteinen avaruus. (Meidän käyttämämme merkintä $\mathbb{R}^n$ muistuttaa siitä, että vekrotin koordinaatit a_j ovat reaalilukuja. Monessa kirjassa halutaan korostaa Eukleideen nimeä, ja sillon vastaava merkintä yleensä on E^n.)

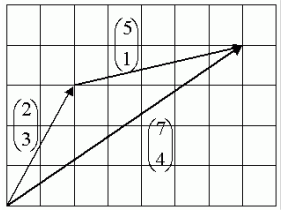


Figure 2.1: $(\,2\;\;3\,)^{\mathrm{T}} + (\,5\;\;1\,)^{\mathrm{T}} = (\,7\;\;4\,)^{\mathrm{T}}$

Yleistämme $\mathbb{R}^2$:ssa niin luonnolliset yhteenlasku- ja reaaliluvulla kertomis-säännöt $\mathbb{R}^n$:ään seuraavasti. Olkoot $\mathbf{a} = (\,a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n\,) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = (\,b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n\,) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} = (\,c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n\,) \in \mathbb{R}^n$ ja $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad c_j = a_j + b_j,\ \forall j = 1, \dots, n \tag{2.1}$$
$$\mu\mathbf{a} = \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad c_j = \mu a_j,\ \forall j = 1, \dots, n \tag{2.2}$$

On tärkeätä huomata, että vektoreille on sovittu kahden vektorin yhteenlasku ja vektorin kertominen reaaliluvulla, mutta kahden vektorin kertomista ei ole määritelty. Yllä sovittu merkintä, noudattelee matriisinotaatiota. Joskus on tarpeen erotella matriisin alkioita (vektorin koordinaatteja) toisistaan. Seuraavassa kaksi esimerkkiä, joissa erottimet ovat tarpeen.

$$\begin{pmatrix} ax \\ yz^2 \end{pmatrix} = (\,ax,\ yz^2\,)^{\mathrm{T}}, \qquad \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.3 \end{pmatrix} = (\,2.4;\ 1.3\,)^{\mathrm{T}},$$

Sovitaan vielä merkinnöistä

$$\mathbf{0} = (\,0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\,)^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$
$$\mathbf{1} = (\,1 \quad 1 \quad \dots \quad 1\,)^{\mathrm{T}} \tag{2.4}$$
$$\mathbf{e}_k = (\,\delta_{1k} \quad \delta_{2k} \quad \dots \quad \delta_{nk}\,)^{\mathrm{T}}, \quad \text{missä } \delta_{kk} = 1, \text{ ja } \delta_{jk} = 0, \text{ kun } j \neq k \tag{2.5}$$

Esimerkiksi $\mathbb{R}^3$:ssa

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Sisätulo ja normi

Kahden vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ sisätulo $\langle \mathbf{a}|\mathbf{b} \rangle$ ja vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ normi $\|\mathbf{a}\|$ määritellään seuraavasti

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = (\,a_1 \quad a_2 \quad a_3\,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{2.6}$$
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{2.7}$$

Sisätulo on siis lukiosta tuttu pistetulo ja normi on vektorin pituus. Nyt yleistämme seuraavasti.

Määritelmä 2.1.1 Kahden vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sisätulo $\langle \mathbf{a}|\mathbf{b} \rangle$ ja vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ normi $\|\mathbf{a}\|$ ovat

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \tag{2.8}$$
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \tag{2.9}$$

Sisätulon arvo on reaaliluku, joten sisätulo ei ole vektoreiden välinen laskutoimitus. (Siksi vältämme nyt pistetulomerkintää.) Kahden vektorin sanotaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan eli ortogonaaliset (merkitään $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) jos niiden sisätulo on nolla, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}|\mathbf{b} \rangle = 0$. Normi on mitta vektorin suuruudelle. Kaksi vektoria ovat lähellä toisiaan, jos niiden erotuksen normi on pieni

Esimerkki 2.1.1 Olkoon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ N:stä havaintoarvosta muodostuva havaintovektori (aikasarja). Havaintosarjan keskiarvo on

$$\mu_a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_N)/N = N^{-1}\langle \mathbf{a}|\mathbf{1} \rangle \tag{2.10}$$

Havaintojen poikkeama keskiarvosta (vaihtelu) saadaan vähentämällä keskiarvo jokaisesta havainnosta

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_1 - \mu_a, a_2 - \mu_a, \ldots, a_N - \mu_a)^{\mathrm{T}} = \mathbf{a} - \mu_a\mathbf{1} \tag{2.11}$$

Vaihtelun suuruutta on tapana mitata varianssilla s_a^2, joka on

$$\begin{aligned} s_a^2 = \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}\|^2}{N-1} &= (N-1)^{-1}\langle \mathbf{a} - \mu_a\mathbf{1}|\mathbf{a} - \mu_a\mathbf{1} \rangle \\ &= (N-1)^{-1}(\langle \mathbf{a}|\mathbf{a} \rangle - \mu_a\langle \mathbf{a}|\mathbf{1} \rangle - \mu_a\langle \mathbf{1}|\mathbf{a} \rangle + \mu_a^2\langle \mathbf{1}|\mathbf{1} \rangle) \\ &= \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - N\mu_a^2}{N-1} \quad (\in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ toinen aikasarja ja μ_b sen keskiarvo ja $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$ sen poikkeama keskiarvosta. Jos kummankin aikasarjan poikkeamat keskiarvosta noudattavat yhteistä rytmiä, niin tulo $\tilde{a}_j\tilde{b}_j$ on useimmiten positiivinen. Silloin $\langle \tilde{\mathbf{a}}|\tilde{\mathbf{b}} \rangle = \sum \tilde{a}_j\tilde{b}_j$ on

positiivinen. Tätä yhteisvaihtelua on tapana mitata kovarianssilla

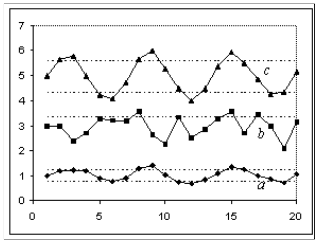
$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\langle\tilde{\mathbf{a}}|\tilde{\mathbf{b}}\rangle}{N-1} &= (N-a)^{-1}\langle\mathbf{a}-\mu_a\mathbf{1}|\mathbf{b}-\mu_b\mathbf{1}\rangle \\ &= (N-a)^{-1}(\langle\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle - \mu_b\langle\mathbf{a}|\mathbf{1}\rangle - \mu_a\langle\mathbf{1}|\mathbf{b}\rangle + \mu_a\mu_b\langle\mathbf{1}|\mathbf{1}\rangle) \\ &= \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} - N\mu_a\mu_b}{N-1} \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Kahden aikasarjan välinen korrelaatio r_{ab} määritellään lausekkeella

$$r_{ab} = \frac{\mathrm{cov}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{s_a s_b} \qquad (2.14)$$

Seuraavassa taulukossa on kolme aikasarjaa ja vastaavat varianssit, kovarianssit ja korrelaatiokertoimet.

j	a_j	b_j	c_j
1	1.000	3.000	5.000
2	1.165	2.986	5.648
3	1.224	2.388	5.790
4	1.171	2.698	4.988
5	0.894	3.275	4.243
6	0.767	3.199	4.077
7	0.893	3.188	4.753
8	1.285	3.556	5.665
9	1.389	2.628	6.021
10	1.011	2.251	5.289
11	0.733	3.349	4.497
12	0.671	2.514	4.013
13	0.823	2.857	4.497
14	1.076	3.286	5.366
15	1.327	3.575	5.939
16	1.247	2.714	5.501
17	0.976	3.449	4.863
18	0.849	2.996	4.272
19	0.704	2.106	4.343
20	1.063	3.157	5.165



$\mu_a = 1.013$ $\mu_b = 2.959$ $\mu_c = 4.997$
$s_a = 0.219$ $s_b = 0.429$ $s_c = 0.643$

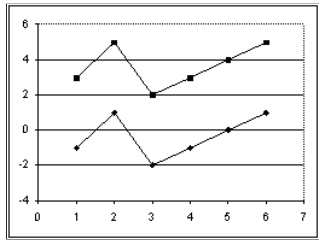
$\mathrm{cov}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0.012$, $r_{a,b} = 0.126$
$\mathrm{cov}(\mathbf{a},\mathbf{c}) = 0.132$, $r_{a,c} = 0.941$
$\mathrm{cov}(\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0.014$, $r_{b,c} = 0.053$

Esimerkki 2.1.2 Yhteisvaihtelua käsitellään paljon riippuvuusanalyysin kurssilla. Tälä kurssilla emme jatka aiheen käsittelyä enempää kuin yhdellä huomiolla. Koska usein taloudelliset aikasarjat esitetään muodossa, jossa havaintojen keskiarvo on likimain nolla, ymmärretään helposti aikasarjojen ortogonaalisuus ja korreloimattomuus samaksi asiaksi. Tämä ei kuitenkaan ole totta. Seuraava vastaesimerkki osoittaa eron.

j	a_j	b_j
1	-1,000	3,000
2	1,000	5,000
3	-2,000	2,000
4	-1,000	3,000
5	0,000	4,000
6	1,000	5,000

μ	-0.333	3.667
s	1.211	1.211

$\mathrm{cov}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1.222$
$r_{a,b} = 1.000$,
$\langle\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = 0$



Aikasarjat korreloivat täydellisesti, vaikka ovatkin keskenään ortogonaaliset.

2.1.2 lineaarinen riippumattomuus ja kanta

Esimerkki 2.1.3 Olkoon yrityksen A osakkeen arvo 20 € ja yrityksen B osakkeen arvo 10 € . Sijoittaja tarkastelee omaisuutensa rakennetta ryhmittelemällä sijoittamansa rahat kolmeen osaan "mekaaninen puunjalostus", "paperi" ja "kemianteollisuus". Yrityksen A liikevaihdosta puolet tulee sahatavarasta ja puolet paperin valmistuksesta. Yrityksen B liikevaihdosta puolet tulee hienopaperista ja puolet värikemikaalien myynnistä. Yritysten osakkeiden arvojen jakautumiset eri toimialoille voidaan esittää vektoreilla

$$\mathbf{v}_A = \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Sijoittaja haluaa sijoittaa 1000 € siten, että 50% sijoituksesta menee paperinvalmistukseen loppu jakautuu tasan mekaanisen puunjalostuksen ja kemian teollisuuden kesken. Tavoitteena on siis jakauma

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix}250\\500\\250\end{pmatrix}. \qquad (2.16)$$

Tämä onnistuu ostamalla 25 kappaletta A-osaketta ja 50 kappaletta B-osaketta, sillä

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix}250\\500\\250\end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + 50\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix} = 25\mathbf{v}_A + 50\mathbf{v}_B \qquad (2.17)$$

Toinen sijoittaja haluaa sijoittaa 1000 € siten, että 50% sijoituksesta menee mekaaniseen puuhun ja loput tasan paperiteollisuuteen ja kemian teollisuuteen. (Siis

$\mathbf{w}_2 = (500;\ 250;\ 250)^{\mathrm{T}}$.) Tämä on jo vaikeampaa. Perusteellinen ratkaisuyritys johtaa seuraavaan päättelyketjuun

$$x\mathbf{v}_A + y\mathbf{v}_B = \mathbf{w}_2 \tag{2.18}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}500\\250\\250\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}10 & 0\\10 & 5\\0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}500\\250\\250\end{pmatrix}$$

$$\overset{Gauss}{\longleftrightarrow} \quad \left(\begin{array}{cc|c}10 & 0 & 500\\10 & 5 & 250\\0 & 5 & 250\end{array}\right) \begin{array}{l}:10\\:10\\:5\end{array}$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 50\\1 & 0.5 & 25\\0 & 1 & 50\end{array}\right) \begin{array}{l}-1\\ \leftarrow\\ \ \end{array} \quad \begin{array}{c}\ \\ \downarrow\\ \uparrow\end{array}$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0.5 & 50\\0 & 1 & 50\\0 & 0.5 & -25\end{array}\right) \begin{array}{l}\ \\ \ \\ \leftarrow\end{array} \quad \begin{array}{l}\ \\ \ \\ -0.5\end{array}$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0.5 & 50\\0 & 1 & 50\\0 & 0 & -50\end{array}\right) \rightarrow \text{ ei ratkaisua!}$$

///

Sovimme seuraavista sanonnoista.

Määritelmä 2.1.2 Olkoon $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vektoreita ja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ reaalilukuja.

(1) Jos

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m$$

niin sanomme, että vektori $\mathbf{u}$ on *lineaarikombinaatio* (linear combination) vektoreista $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$.

(2) Vektorijoukon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ kaikkien lineaarikombinaatioiden joukko on sen *virittämä aliavaruus* (a subspace of $\mathbb{R}^n$ spanned by $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$)

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} \text{ on lineaarikombinaatio vektoreista } \mathbf{v}_j\}$$

Määritelmä 2.1.3 (1) Vektorijoukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ on *lineaarisesti riippuva (sidottu)* (linearly dependent), jos on olemassa reaaliluvut $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, joista ainakin yksi ei ole nolla, niin että

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

(2) Vektorijoukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ on *lineaarisesti riippumaton (vapaa)* (linearly independent), jos se ei ole sidottu, eli

$$(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0)$$

Lineaarisesti riippuva eli sidottu vektorijoukko voidaan myös luonnehtia sanomalla, että vektorijoukko on sidottu, jos ainakin yksi vektoreista voidaan lausua muiden lineaarikombinaationa.

Vektorijoukko ei välttämättä viritä koko $\mathbb{R}^n$:ää. Esimerkissä 2.1.3 toisen sijoittajan tavoitejakauma $\mathbf{w}_2$ ei ole toteutettavissa $\mathbf{v}_A$:n ja $\mathbf{v}_B$:n lineaarikombinaationa ($\mathbf{w}_2 \notin \mathrm{span}\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B\}$). Jos toinen sijoittaja haluaa toteuttaa suunnitelmansa, niin hänen tulee etsiä kolmas yritys C niin, että $\mathbf{w}_2 \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C\}$. Asia on selvä, jos $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C\} = \mathbb{R}^3$. Tämän kappaleen lopussa saamme ehdon sille, että vektorijoukko virittää $\mathbb{R}^n$:n.

Määritelmä 2.1.4 Jos vektorijoukko $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ on lineaarisesti riippumaton, niin sanomme että se on virittämänsä aliavaruuden $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *kanta* (base). Vektoreita $\mathbf{v}_j \in E$ sanotaan *kantavektoreiksi.*

Jos kantavektorit ovat keskenään ortogonaaliset eli $\langle \mathbf{v}_j \,|\, \mathbf{v}_k \rangle = 0$, kun $j \neq k$, niin kanta on *ortogonaalinen* (orthogonal). Jos kanta on ortogonaalinen ja lisäksi $\|\mathbf{v}_j\| = 1, j = 1, \ldots, m$, niin kanta on *ortonormitettu* (orthonormal).

Esimerkki 2.1.4 Tutkitaan muodostavatko esimerkin 2.1.3 vektorit $\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B\}$ virittämänsä aliavaruuden kannan. Lineaarisen riippumattomuuden määritelmän perusteella riittää osoittaa, että

$$(\lambda_1\mathbf{v}_A + \lambda_2\mathbf{v}_B = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$$

Osoitamme tämän seuraavasti

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{v}_A + \lambda_2\mathbf{v}_B = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}10\lambda_1 & & & = & 0\\ 10\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & = & 0\\ & & 5\lambda_2 & = & 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0\end{aligned}$$

Siis vektorit muodostavat kannan. ///

Esimerkki 2.1.5 Olkoon esimerkin 2.1.3 sijoittajilla käytettävissään kolmas osake, C-osake, johon liittyvä jakauma on $\mathbf{v}_C = (10\ 5\ 0)^{\mathrm{T}}$. Sijoitusneuvoja neuvottelee asiakkaidensa kanssa ja määrittää kullekin sopivan jakauman $\mathbf{w}$. Voidaanko tämä jakauma aina toteuttaa lineaarikombinaationa vektoreista $\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C\}$, eli onko $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C\} = \mathbb{R}^3$?

Olkoon nyt $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ mikä tahansa asiakkaan toivoma painovektori. Määritämme sitä vastaavat lineaarikombinaation kertoimet λ_1, λ_2 ja λ_3 siten, että

$$\lambda_1\mathbf{v}_A + \lambda_2\mathbf{v}_B + \lambda_3\mathbf{v}_C = \mathbf{w} \tag{2.19}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Tästä yhtälöryhmästä saadaan λ:t aina ratkaistua, sillä yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti ei ole nolla. Siis $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C\} = \mathbb{R}^3$ ja mikä tahansa asiakkaan toivoma painovektori voidaan toteuttaa vektoreiden $\{\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C\}$ lineaarikombinaationa. ///

Pian esimerkkimme sijoitusneuvoja saa vastauksen muutamaan peruskysymykseensä. Sitä ennen määrittelemme vielä aliavaruuden dimension ja annamme muutaman muutaman kantoihin liittyvän ominaisuuden lauseiden muodossa.

Voidaan osoittaa, että jos lineaarisesti riipppumattomat vektorijoukot $E_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ ja $E_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ virittävät saman lineaarisen aliavaruuden $H = \mathrm{span}(E_1) = \mathrm{span}(E_2)$, niin kannoissa E_1 ja E_2 on yhtä monta kantavektoria. Tämä oikeuttaa määrittelemään.

Määritelmä 2.1.5 Lineaarisen aliavaruuden $H \subset \mathbb{R}^n$ *dimensio*, $\dim(H)$ on sen kannan kantavektoreiden lukumäärä.

Lause 2.1.1 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Todistus. Selvästi $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ on $\mathbb{R}^n$:n kanta. □

Lause 2.1.2 Olkoon $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ joukko vektoreita ja olkoon $\mathbf{V}$ matriisi, jonka sarakkeina ovat vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. ($\mathbf{V}$ on siis $(n \times m)$-matriisi.) Silloin E on $\mathbb{R}^n$:n kanta, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} m &= n \quad \text{ja lisäksi} \\ \det(\mathbf{V}) &\neq 0. \end{aligned}$$

Todistus. [$\Rightarrow$] Oletetaan ensin, että E on $\mathbb{R}^n$:n kanta. Lauseen (2.1.1) mukaan $m = n$. Koska $m = n$ matriisi $\mathbf{V}$ on neliömatriisi ja voimme päätellä seuraavasti (vertaa esimerkin 2.1.5päättelyyn)

$$\begin{aligned} & E \text{ on kanta} \\ \Rightarrow\ & E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \text{ on lineaarisesti riippumaton} \\ \Leftrightarrow\ & ((\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0)) \\ \Leftrightarrow\ & \text{ryhmällä } \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on vain triviaali ratkaisu} \\ \Leftrightarrow\ & \det(\mathbf{V}) \neq 0 \end{aligned}$$

[$\Leftarrow$] Oletetaan toiseksi, että $m = n$ ja $\det(V) \neq 0$. Vastaava päättely kuin edellä osoittaa, että E on lineaarisesti riippumaton. Lisäksi voimme päätellä, että

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{V}) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \text{ryhmällä } \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{w} \text{ on ratkaisu kaikilla } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow\ & \text{jokainen } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \text{ voidaan lausua lineaarikombinaationa} \\ & \mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \\ \Leftrightarrow\ & E \text{ virittää } \mathbb{R}^n\text{:n} \end{aligned}$$

Siis E on $\mathbb{R}^n$:n kanta. □

Esimerkki 2.1.6 a) Vektorijoukko

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

on $\mathbb{R}^3$:n kanta sillä

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 43 \neq 0$$

b) Vektorijoukko

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ei ole $\mathbb{R}^3$:n kanta sillä

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c) Vektorijoukko

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ei ole $\mathbb{R}^3$:n kanta sillä kantavektoreita on liian vähän (E_3 ei viritä $\mathbb{R}^3$:a).
d) Vektorijoukko

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ei ole $\mathbb{R}^3$:n kanta sillä kantavektoreita on liian monta (E_4 ei ole vapaa). ///

Joissakin tilanteissa laskeminen helpottuu, jos lineaariselle aliavaruudelle $H = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ on käytettävissä ortonormaali kanta. Voidaan osoittaa, että ortonormaali kanta aina löytyy. Seuraava menettely antaa ortogonaalisen kannan, josta ortonormaali kanta saadaan kertomalla jokainen kantavektori norminsa käänteisluvulla.

Lause 2.1.3 (Gram-Schmidt) Olkoon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ lineaarisesti riippumaton ja $H = \text{span}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}) \subset \mathbb{R}^n$. Jos asetetaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_m &= \mathbf{v}_m - \frac{\langle \mathbf{v}_m \,|\, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_m \,|\, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_m \,|\, \mathbf{u}_{m-1} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\, \mathbf{u}_{m-1} \rangle} \mathbf{u}_{m-1}
\end{aligned}$$

niin $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ on H:n ortogonaalinen kanta. Lisäksi

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}, \text{ kun } 1 \leq k \leq m.$$

Todistus. HT. □

Määritelmä 2.1.6 Olkoon $H \subset \mathbb{R}^n$ lineaarinen aliavaruus. H:n *ortogonaalikomplementti* (orthogonal complement) $H^\perp$ koostuu niistä $\mathbb{R}^n$:n vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia H:n vektoreita vastaan. Siis

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{h} \rangle = 0, \text{ kaikille } \mathbf{h} \in H\}$$

Olkoon $H \subset \mathbb{R}^n$ lineaarinen aliavaruus ja $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ sen kanta. Nyt siis $\dim(H) = k \leq n$. Laajennetaan vektorijoukko V kanonisen kannan vektoreilla joukoksi V' asettamalla $\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j$, kun $j = 1, \ldots, k$ ja $\mathbf{v}'_{k+i} = \mathbf{e}_i$, kun $i = 1, \ldots, n$. Soveltamalla Gram-Schmidt -prosessia tähän vektorijoukkoon sillä muutoksella, että jos askeleella i saadaan $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, niin hylätään $\mathbf{u}_i$ ja jätetään jatkossa $\mathbf{u}_i$ lausekkeista pois. Tämä Gram-Schmidt -prosessin muunnelma johtaa ortonormaaliin $\mathbb{R}^n$:n kantaan, jonka ensimmäiset k kantavektoria $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ virittävät H:n ja loput $n - k$ kantavektoria $\{\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ virittävät H:n ortogonaalikomplementin $H^\perp$.

Erityisesti siis

$$\dim(H) + \dim(H^\perp) = n \tag{2.22}$$

ja jokainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voidaan yksikäsitteisellä tavalla esittää muodossa

$$\mathbf{x} = \underbrace{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k}_{\in H} + \underbrace{\lambda_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n}_{\in H^\perp} \tag{2.23}$$

2.1.3 Kannanvaihto

Laskeminen on aina helpointa, jos käytetään kanonista kantaa $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. (Huomaa merkintäsopimus (2.5).) Valitettavasti joskus on pakko vaihtaa kantaa. Seuraava tarkastelu kannattaa ensimmäisellä lukukerralla lukea kursoorisesti. Lue se uudelleen ja tarkemmin, kun siihen myöhemmin viitataan.

Määritelmä 2.1.7 Olkoon $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ lineaariavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Jos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja sen esitys kannassa E on

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n,$$

niin kertoimista muodostamme vektorin

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}^E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

jota sanomme *vektorin* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *koordinaattivektoriksi kannassa* E. (Jos kanta on selvä se jätetään merkitsemättä.)

Olkoon seuraavassa $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ja $E' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ kaksi $\mathbb{R}^n$:n kantaa. Koska jokainen E:n kantavektori voidaan lausua yksikäsitteisellä tavalla kannassa E', on olemassa reaaliluvut a_{ij} siten, että

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{u}_1 &=& a_{11}\mathbf{u}'_1 + a_{21}\mathbf{u}'_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}'_n \\ \mathbf{u}_2 &=& a_{12}\mathbf{u}'_1 + a_{22}\mathbf{u}'_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{u}'_n \\ &\vdots& \\ \mathbf{u}_n &=& a_{1n}\mathbf{u}'_1 + a_{2n}\mathbf{u}'_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}'_n \end{array} \right. \tag{2.24}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}'_n \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Määritelmä 2.1.8 Jos kaava (2.25) on voimassa, niin sanomme, että $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on *kannanvaihtomatriisi.*

Huomaa, että kaavan (2.25) vasen (oikea) puoli ei oikeastaan ole matriisi. Matriisihan on lukukaavio, mutta (2.25):ssa on kaavio, jonka alkiot ovat kaavioita. Tällaista tietorakennetta sanomme *tensoriksi.* Tällä kurssilla emme opettele tensorilaskentaa, mutta on hyvä tuntea termi. Kun lasketaan Mathematica -ohjelmalla tai vastaavalla muulla ohjelmalla matriisilaskuja, tulee lausekkeita kirjoittaessa helposti syntaksivirheitä. Jos silloin virheilmoituksessa esiintyy sana "tensor", niin kannattaa tarkistaa, ettei ole sijoittanut matriisin alkioksi vektoria.

Olkoon nyt $\mathbf{x}$ vektori, jolla on eri kannoissa esitykset

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n = x'_1\mathbf{u}'_1 + x'_2\mathbf{u}'_2 + \ldots + x'_n\mathbf{u}'_n. \tag{2.26}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n && (2.27) \\ &= x_1\left(a_{11}\mathbf{u}'_1 + a_{21}\mathbf{u}'_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}'_n\right) && (2.28) \\ &\quad + x_2\left(a_{12}\mathbf{u}'_1 + a_{22}\mathbf{u}'_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{u}'_n\right) \\ &\quad + \ldots + x_n\left(a_{1n}\mathbf{u}'_1 + a_{2n}\mathbf{u}'_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}'_n\right) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\mathbf{u}'_1 && (2.29) \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\mathbf{u}'_2 \\ &\quad + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\mathbf{u}'_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'_1 &=& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &=& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots& \\ x'_n &=& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array} \right. \tag{2.30}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \tag{2.31}$$

Kokoamme joitakin kannanvaihdon ominaisuuksia lauseiksi, joihin vetoamme myöhemmissä kappaleissa.

Lause 2.1.4 Olkoon $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ja $E' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ kaksi $\mathbb{R}^n$:n kantaa ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jos $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on kannanvaihtomatriisi siten, että

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}'_n \end{pmatrix},$$

niin koordinaattivektoreille on voimassa

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}' &= \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \\ \vec{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}' \end{aligned}$$

Todistus. Edellä tuli perusteltua kaikki muu paitsi käänteismatriisin $\mathbf{A}^{-1}$ olemassaolo. Matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeiden tulee olla lineaarisesti riippumattomat, sillä muuten kannan E kantavektorit eivät olisi lineaarisesti riippumattomat. Siis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Mistä edelleen seuraa käänteismatriisin olemassaolo. □

Esimerkki 2.1.7 Tarkastellaan $\mathbb{R}^2$:n kantoja $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ja $E' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, joille

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{u}_1 &=& 0.5\mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}_2 &=& 1.5\mathbf{u}'_1 - 2\mathbf{u}'_2 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1.5 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

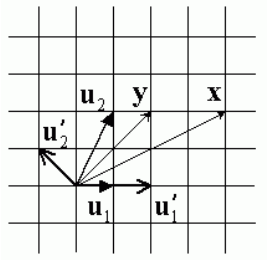


Figure 2.2: Eräs mahdollinen esimerkin 2.1.7 realisaatio.

Siis

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Vektorin $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ esitys kannassa E' saadaan laskemalla

$$\vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = 3\mathbf{u}'_1 - 2\mathbf{u}'_2 \tag{2.35}$$

Vektorin $\mathbf{y} = 2\mathbf{u}'_1 - 2\mathbf{u}'_2$ esitys kannassa E saadaan laskemalla

$$\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{2.37}$$

Kuvassa 2.2 on piirretty esimerkkitilanne, jossa kannanvaihtomatriisi on sama kuin edellä. Huomaa kuitenkin, että laskut edellä laskettiin käyttän koordinaattivektoreita ja kannanvaihtomatriisia.

Lause 2.1.5 Olkoon $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ja $E' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2, \ldots, \mathbf{u'}_n\}$ kaksi $\mathbb{R}^n$:n ortonormitettua kantaa. Jos $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on kannanvaihtomatriisi siten, että

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n)^{\mathrm{T}},$$

niin

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

eli matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeet ovat keskenään ortogonaaliset yksikkövektorit ja siis muodostavat $\mathbb{R}^n$:n ortonormitetun kannan.

Todistus. Käytämme matriisin $\mathbf{A}$ j:nnestä sarakeesta merkintää $\mathbf{a}_{\bullet j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}}$. Nyt

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle \mathbf{u}_i \mid \mathbf{u}_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{u}'_k \mid \sum_{p=1}^{n} a_{pj}\mathbf{u}'_p \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pj}\delta_{kp} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \mathbf{a}_{\bullet i}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{\bullet j} \\ &= \langle \mathbf{a}_{\bullet i} \mid \mathbf{a}_{\bullet j} \rangle \end{aligned} \tag{2.38}$$

□

Lause 2.1.6 Olkoon $E' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ lineaariavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanoninen kanta ja $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ toinen $\mathbb{R}^n$:n kanta. Olkoon $\mathbf{U}$ matriisi, jonka j:s sarake on kannan E j:s kantavektori $\mathbf{u}_j$. Olkoon $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ vektori ja $\vec{\mathbf{x}}$ sen koordinaattivektori kannassa E. Silloin

$$\mathbf{x}' = \mathbf{U}\vec{\mathbf{x}} \quad \text{ja} \quad \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}'$$

Todistus. HT □

2.2 Matriisin rangi

Edellisen kappaleen esimerkin 2.1.3 sijoittajien käytettävissä on enemmän kuin kaksi tai kolme osaketta. Kun sijoitusneuvoja alkaa muodostaa ratkaisuehdotusta asiakkaalleen, hän ensin määrittää asiakkaan toiveiden mukaisen tavoitejakauman $\mathbf{w}$. Sitten hän valitsee tavoitejakauman mukaisen lineaarikombinaation osakkeista, joita hän nyt pitää parhaina sijoituskohteina

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m. \tag{2.39}$$

Sijoitusneuvojan toimintaa helpottaa suuresti, jos hän jo etukäteen varmistuu siitä, että

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \mathbb{R}^3, \tag{2.40}$$

jolloin lineaarikombinaatio (2.39) on aina olemassa. Jos $m = 3$, niin $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ on $\mathbb{R}^3$:n kanta ja lineaarikombinaation kertoimet $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ovat yksikäsitteiset. Tämä helpottaa neuvojan työtä, mutta ei ole optimaalista sijoittajan kannalta.

Periaatteessa osakkeen j arvo markkinoilla on $u_j^{(m)} = \langle \mathbf{v}_j \mid \mathbf{1} \rangle$. Jos kuitenkin sijoittaja antaa osakkeille tästä poikkeavat arvot u_j ja tavoitefunktio on lineaarinen, niin lineaarikombinaation (2.39) arvo on $z = u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \ldots + u_m\lambda_m$.

Muodostetaan matriisi $\mathbf{V}$, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$. Sijoittajan kokema höty maksimoituu, kun neuvoja ratkaisee lineaarikombinaation kertoimet

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ LP-mallista

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \max z = & u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \ldots + u_m\lambda_m & & \\ \text{ehdoin} & \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m & = & \mathbf{w} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcl} \max z = & u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \ldots + u_m\lambda_m & & \\ \text{ehdoin} & \lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{12} + \ldots + \lambda_m v_{1m} & = & w_1 \\ & \lambda_1 v_{21} + \lambda_2 v_{22} + \ldots + \lambda_m v_{2m} & = & w_2 \\ & \lambda_1 v_{31} + \lambda_2 v_{32} + \ldots + \lambda_m v_{3m} & = & w_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \max z = & \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\lambda \\ \text{ehdoin} & \mathbf{V}\lambda = \mathbf{w} \end{array} \right.$$

Tällaisia LP-malleja on käsitelty talousmatematiikan perusteiden kurssilla ja operaatioanalyysin kurssilla niihin paneudutaan lisää. Nyt jätämme sijoitusneuvojan hetkeksi.

Palaamme miettimään milloin vektorijoukossa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ on riittävästi vektoreita virittämään $\mathbb{R}^n$:n. Ehto (2.40) on tosi, jos matriisissa $\mathbf{V}$ on n lineaarisesti riippumatonta saraketta. Käytämme jatkossa seuraavia nimityksiä.

Määritelmä 2.2.1 Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$(n \times m)$-matriisi. Matriisin $\mathbf{A}$ i:s rivi ja j:s sarake ovat

$$\mathbf{a}_{i\bullet} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{a}_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeiden virittämä $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus on

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet m}\} \in \mathbb{R}^n$$

Matriisin $\mathbf{A}$ rivien virittämä $\mathbb{R}^m$:n aliavaruus on

$$\mathrm{Row}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_{1\bullet}, \mathbf{a}_{2\bullet}, \ldots, \mathbf{a}_{n\bullet}\} \in \mathbb{R}^m$$

Määritelmä 2.2.2 Matriisin $\mathbf{A}$ lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden lukumäärä on matriisin *säännöllisyysaste* eli *rangi* (rank). Toisin sanoen

$$\mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{span}\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet m}\}) = \dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A}))$$

Englanninkielisissä kirjoissa sanotaan usein $(n \times n)$-neliömatriisista $\mathbf{A}$, että se on "a matrix of full rank" jos $\mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = n$. Tämä on yhtäpitävää seuraavien ilmaisujen kanssa

$\mathbf{A}$ on "full rank" $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = n$
$\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A})) = n$
$\Leftrightarrow$ matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat
$\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ on säännöllinen (eli on olemassa $\mathbf{A}^{-1}$)

Esimerkki 2.2.1 Onko

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3 \ ? \tag{2.41}$$

Asian voi tarkistaa helposti MatLab-ohjelmalla seuraavasti

```
EDU>> V=[10 3 1 13 7 ; 2 1 -1 3 1 ; 1 0 1 1 1]

V =

    10     3     1    13     7
     2     1    -1     3     1
     1     0     1     1     1

EDU>> rank(V)

ans =

     2
```

Mathematica-ohjelma ei tunne "Rank-funktiota" vaan TensorRank-funktion. Lyhyt ohje kuuluu: TensorRank[expr] gives the depth to which expr is a full array, with all the parts at a particular level being lists of the same length.

```
In[1]:=
Vlist={{10,2,1},{3,1,0},{1,-1,1},{13,3,1},{7,1,1}}

Out[1]=
{{10,2,1},{3,1,0},{1,-1,1},{13,3,1},{7,1,1}}

In[2]:=
TensorRank[Vlist]

Out[2]=
2
```

Siis vektorit eivät viritä $\mathbb{R}^3$:a. ///

Rangin määrittämistä emme nyt opettele. Periaatteessa on melko helppo kehittää Gram-Schmidt'n menetelmästä muunnos, jonka avulla matriisin rangi voidaan selvittää. Käytännössä ongelmaksi muodostuu se, että pyöristysvirheiden takia joskus saadaan laskutoimituksen tuloksena nollan sijasta hyvin pieni luku, joka ei ole nolla. (Esimerkiksi $\approx 10^{-17} \neq 0$.)

2.3 Lineaarikuvaus

2.3.1 Lineaarikuvauksen matriisi

Tarkastellaan ensin kuvausta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Kuvauksen lineaarisuus määritellään seuraavasti

Määritelmä 2.3.1 Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v})$ on *lineaarinen* (linear), joss

(1) kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
(2) kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ on voimassa $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$

Seuraava kuvio saattaa tehdä asian konkreettiseksi.
Prosessi

$$\text{panos } \mathbf{u} \longrightarrow \boxed{\text{prosessi } f} \longrightarrow \text{ tuotos } f(\mathbf{u})$$

on lineaarinen, jos kahdesta osapanoksesta saatu kokonaistuotos on osatuotosten summa

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \longrightarrow \boxed{\text{prosessi } f} \longrightarrow f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

ja panoksen puolittaminen (lambdaaminen) puolittaa (lambdaa) myös tuotoksen

$$0.5\mathbf{u} \longrightarrow \boxed{\text{prosessi } f} \longrightarrow 0.5f(\mathbf{u}).$$

Lineaarisuus oli keskeinen oletus peruskurssilla käsiteltyjen LP-mallien tavoitefunktiolle. Nyt erona LP-mallin tavoitefunktioon on, että sekä panos, että tuotos ovat vektoreita.

Esimerkki 2.3.1 Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B. Yhden tuotteen valmistamiseen tarvittavat tuotannontekijöiden määrät on luetteloitu seuraavassa taulukossa.

tuot. tekijä	A	B
työ (min)	20	30
lasi (m^2)	3	1
alumiinilista (m)	12	8

Muodostetaan A:n valmistusmäärästä x_1 ja B:n valmistusmäärästä x_2 (päätösmuuttujista) valmistusmäärä-vektori

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Tuotannontekijöiden tarpeet, d_1 (työ / min), d_2 (lasi / m^2), d_3 (alum.lista / m), kootaan myös vektoriksi

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Tuotannontekijöiden tarve on funktio tuotantomäärä-vektorista

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 3 & 1 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} f(\mathbf{x}). \tag{2.44}$$

Funktio $\mathbf{d} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ on lineaarinen, sillä matriisikertolasku $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ toteuttaa määritelmän 2.3.1 ehdot (1) ja (2). ///

Edellisen esimerkin funktio todetaan helposti lineaariseksi, koska se voidaan tulkita matriisilla kertomiseksi. Käänteinen on myös totta.

Lause 2.3.1 Jos kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarinen, niin on olemassa $(m \times n)$-matriisi $\mathbf{A}$ siten, että $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Todistus. Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanoninen kanta ja vastaavasti $E' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^m$ kanoninen kanta. (Huomaa

merkintäsopimus (2.5).) Vektorit $f(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^n$ voidaan lausua kannan E' avulla yksikäsitteisellä tavalla.

$$f(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{e}'_1 + a_{2j}\mathbf{e}'_2 + \ldots + a_{mj}\mathbf{e}'_m \tag{2.45}$$

Kootaan näistä lineaarikombinaatioiden kertoimista matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Jos $\mathbf{x} = (\,x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\,) \in \mathbb{R}^{\mathrm{T}}$, niin merkitään $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jolloin

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= f(x_1\mathbf{e}_1) + f(x_2\mathbf{e}_2) + \ldots + f(x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\
&= x_1(a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{21}\mathbf{e}'_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{e}'_m) + x_2(a_{12}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{e}'_m) \\
&\quad + \ldots + x_n(a_{1n}\mathbf{e}'_1 + a_{2n}\mathbf{e}'_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{e}'_m) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k\right)\mathbf{e}'_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k\right)\mathbf{e}'_2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k\right)\mathbf{e}'_m \\
&= b_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + b_m\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix} = \mathbf{Ax}
\end{aligned}$$

□

Joskus joudumme käyttämään ei-kanonisia kantoja.

Määritelmä 2.3.2 Olkoon L lineaariavaruus ja $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset L$ sen kanta ja olkoon H lineaariavaruus ja $F = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset H$ sen kanta. $(m\times n)$-matriisi $\mathbf{A}_E^F$ on *lineaarikuvauksen $f : L \to H$ matriisi kannoissa E ja F*, jos kaikilla $\mathbf{x} \in L$ ja $\mathbf{y} \in H$ on voimassa

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y} = f(\mathbf{x})) \quad &\Leftrightarrow \quad (\vec{\mathbf{y}}^F = \mathbf{A}_E^F\vec{\mathbf{x}}^E) \\
&\Leftrightarrow \quad f(\mathbf{x})\text{:n koordinaatit kannassa } F \text{ saadaan kertomalla} \\
&\qquad\quad \text{matriisilla } \mathbf{A}_E^F \text{ vektorin } \mathbf{x} \text{ koordinaatit kannassa } E
\end{aligned}$$

Lause 2.3.2 Olkoon L lineaariavaruus ja $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset L$ sen kanta ja olkoon H lineaariavaruus ja $F = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset H$ sen kanta. Olkoon $\mathbf{V}$ matriisi, jonka sarakkeina onat kannan E kantavektorit ja olkoon $\mathbf{W}$ matriisi, jonka sarakkeina ovat kannan F kantavektorit. Jos $\mathbf{A}$ on lineaarikuvauksen $f : L \to H$ matriisi kanoonisissa kannoissa, niin f:n matriisi kannoissa E ja F on

$$\mathbf{A}_E^F = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{AV}$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Suora lasku ja lause 2.1.6 antavat

$$\vec{\mathbf{y}}^F = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{AV}\vec{\mathbf{x}}^E \tag{2.46}$$

□

Esimerkki 2.3.2 Tutkitaan uudelleen esimerkin (2.3.1) yritystä. Jos yritys myy tuotantonsa kampanjapaketteina seuraavasti

	myynti-paketti 1	myynti-paketti 2
tuotetta A	2	1
tuotetta B	0	2

Suunnittelukauden valmistusmäärä -vektori $\mathbf{x} = (\,x_1 \quad x_2\,)^{\mathrm{T}}$ ja saman kauden myynti $\mathbf{y} = (\,y_1 \quad y_2\,)^{\mathrm{T}}$ (paketteina mitattuna) toteuttavat ehdon

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Toisin sanoen myyntivektori $\mathbf{y}$ on valmistusmäärä -vektorin koordinaattivektori kannassa

$$E = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} \tag{2.48}$$

Jos yritys hankkii tarvitsemansa tuotannontekijät kolmelta alihankkijalta panoksina seuraavasti

	panos 1	panos 2	panos 3
työ (min)	60	10	0
lasi (m^2)	0	1	1
alum.lista (m)	0	0	10

Suunnittelukauden tuotannontekijöiden tarve -vektori $\mathbf{d} = (\,d_1 \quad d_2 \quad d_3\,)^{\mathrm{T}}$ ja saman kauden alihankinta $\mathbf{s} = (\,s_1 \quad s_2 \quad s_3\,)^{\mathrm{T}}$ (panoksina mitattuna) toteuttavat ehdon

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix}60\\0\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}10\\1\\0\end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix}0\\1\\10\end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Toisin sanoen alihankinta-vektori $\mathbf{s}$ on tuotannontekijöiden tarve -vektorin koordinaattivektori kannassa

$$F = \left\{\begin{pmatrix}60\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\10\end{pmatrix}\right\} \tag{2.50}$$

Lauseen (2.3.2) merkinnöin siis

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix}60 & 10 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 10\end{pmatrix} \tag{2.51}$$

ja panosten tarve myynnin funktiona on

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y} \qquad (2.52)\\ &= \begin{pmatrix} 60 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 3 & 1 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} 1/60 & -1/6 & 1/60 \\ 0 & 1 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 3 & 1 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0667 & 0.9667 \\ 3.6000 & 2.2000 \\ 2.4000 & 2.8000 \end{pmatrix} \mathbf{y}\end{aligned}$$

///

2.3.2 Ydin ja kuva

Tarkastellaan lineaarikuvausta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, jonka matriisi kanonisissa kannoissa on $(m \times n)$-matriisi $\mathbf{A}$.

Määritelmä 2.3.3 Lineaarikuvauksen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ydin* (kernel) on määrittely-avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

ja *kuva* (range) on maaliavaruuden $\mathbb{R}^m$ osajoukko

$$f(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ siten, että } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$$

Helposti nähdään, että f:n matriisin $\mathbf{A}$ sarakevektoreiden virittämä aliavaruus $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ on sama kuin f:n kuva. Seuraavan määritelmän toinen osa ei siis ole ristiriidassa aiemman kanssa

Määritelmä 2.3.4 $(m \times n)$-matriisin *ydin* (null space) on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus

$$\mathrm{Nul}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ja *kuva* (column space) on $\mathbb{R}^m$:n aliavaruus

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ siten, että } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$$

Huomaa, että ytimen määritelmässä tapaamme taas peruskurssilla mainitun asian: $\mathbf{A}\mathbf{x}$ voi olla nolla-vektori, vaikka $\mathbf{A}$ ei ole nollamatriisi eikä $\mathbf{x}$ ole nollavektori.

Esimerkki 2.3.3 Määritetään (3×5)-matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \qquad (2.53)$$

ydin eli ratkaistaan kaikki yhtälön $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisut. Ratkaistaan ryhmä Gaussin algoritmilla

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \overset{Gauss}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} +3 \\ \\ \leftarrow \\ \end{matrix} \qquad (2.54)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ -5 \\ \leftarrow \\ \end{matrix} \qquad (2.55)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (2.56)$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (2.57)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases} \qquad (2.58)$$

Toisin sanoen x_2, x_4 ja x_5 voidaan valita vapaasti ja x_1 ja x_3 lasketaan sen jälkeen yhtälöistä (2.58). Jos asetamme $x_2 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$ ja $x_5 = \lambda_3$, niin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2} + \lambda_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_3} \qquad (2.59)$$

Siis jokainen $\mathbf{x} \in \mathrm{Nul}(\mathbf{A})$ on lausuttavissa yksikäsitteisellä tavalla $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3$. Siis kolmikko

$$U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad (2.60)$$

virittää ytimen, eli $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \mathrm{Nul}(\mathbf{A})$. Se on myös vapaa (sivuutamme osoituksen) joten se on ytimen kanta. ///

Esimerkki 2.3.4 Toiseksi määritämme kannan matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

kuvalle, Col($\mathbf{A}$). Gaussin algoritmin mukaisissa kaavioissa (2.54) ... (2.56) on "pivot"-alkiot merkitty vahvennettuina. Pivot sarakkeet ovat ensimmäinen ja kolmas. Muissa sarakkeissa ei pivot alkioita ole löytynyt. Helposti nähdään, että sarake, johon ei pivot-alkiota saada, on alkuperäisessä matriisissa lausuttavissa edeltävien sarakkeiden lineaarikombinaationa. Siis lineaarisesti riippumattomien $\mathbf{A}$:n sarakkeiden lukumäärä saadaan laskemalla pivot-sarakkeiden lukumäärä kaaviosta (2.56). Vastaavat $\mathbf{A}$:n sarakkeet

$$\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.62}$$

ovat Col($\mathbf{A}$):n kanta. ///

Edeltävät esimerkit antavat perustelun seuraavalle väitteelle.

Lause 2.3.3 Olkoon $\mathbf{A}$ mikä tahansa $(m \times n)$-matriisi. Silloin

(1) $\dim(\text{Nul}(\mathbf{A})) + \text{Rank}(\mathbf{A}) = n$
(2) $(m < n) \Rightarrow (\dim(\text{Nul}(\mathbf{A})) > 0)$

Todistus. Emme esitä tarkkaa todistusta, vaan vetoamme esimerkkeihin 2.3.3 ja 2.3.4. Esimerkkien tapauksessa Rank($\mathbf{A}$) saatiin laskemalla pivot-sarakkeiden lukumäärä kaaviosta (2.56) ja $\dim(\text{Nul}(\mathbf{A}))$ saadaan laskemalla ei-pivot -sarakkeet kaaviosta (2.56). Sarakkeita (RHS ei ole mukana luvussa) on n kappaletta, joten esimerkin tapauksessa väite on voimassa. Yleisempi todistus sivuutetaan. (2) seuraa (1):stä koska Rank($\mathbf{A}$) $\leq m$. □

Suoraan kokeilemalla näkee, että

$$(\text{Row}(\mathbf{A}))^{\perp} = \text{Nul}(\mathbf{A}) \quad \text{ja} \quad (\text{Col}(\mathbf{A}))^{\perp} = \text{Nul}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \tag{2.63}$$

Yhdistämällä nämä ja yhtälö (2.22) lauseeseen 2.3.3 saadaan.

Lause 2.3.4 Jos $\mathbf{A}$ on $(m \times n)$-matriisi, niin

$$\text{Rank}(\mathbf{A}) = \text{Rank}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \text{Rank}(\mathbf{A}) &= \dim(\text{Col}(\mathbf{A})) \overset{2.22}{=} m - \dim(\text{Col}(\mathbf{A})^{\perp}) \\ &\overset{2.63}{=} m - \dim(\text{Nul}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})) \overset{L2.3.3}{=} \text{Rank}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \end{aligned} \tag{2.64}$$

□

2.4 Matriisin ominaisarvot

Tässä kappaleessa tutkimme asiaa, jonka täydellinen käsittely olisi tämän kurssin kannalta liian raskas kokonaisuus. Siksi "poimimme rusinat pullasta", eli esitämme asian viidessä vaiheessa

Helppo osa. Ominaisarvot ja ominaisvektorit on helppo määritellä. ($\sim 1/2$ sivua)

Esimerkit. Laskemme läpi pari esimerkkiä. Niistä käy ilmi, että ominaisarvo saattaa olla kompleksiluku. Tämä on sovellusten kannalta hankalaa. (~ 3 sivua)

Selityksiä. Tässä osiossa esitellään joitakin nimityksia kompleksisten matriisien teoriasta. Kaikki todistukset sivuutetaan. (~ 1 sivu)

"Rusinat pullasta". Todetaan muutama määritelmistä helposti seuraava ominaisuus. Erityisesti todetaan, että symmetrisen $(n \times n)$-matriisin ominaisarvot ovat reaaliset, ja sen ominaisvektorit virittävät $\mathbb{R}^n$:n. Tämä tekee jatkon helpoksi. (~ 2 sivu)

Sovellukset. Sovellukset ovat myöhemmissä kappaleissa. Mainittakoon: (1) matriisin diagonalisointi (2) jälki ja determinantti (3) singulaariarvot (4) definiittisyys (5) dynaamisen mallin kiintopisteen stabiilisuus.

Määritelmä 2.4.1 Olkoon $\mathbf{A}$ $(n \times n)$-matriisi ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Niitä arvoja $\lambda \in \mathbb{C}$ (tai $\lambda \in \mathbb{R}$), joilla yhtälöryhmällä

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

on ei-triviaaleja ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) ratkaisuja, sanotaan matriisin $\mathbf{A}$ *ominaisarvoiksi* (eigenvalue). Jos $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, niin $\mathbf{x}$ on ominaisarvoon λ liittyvä *ominaisvektori* (eigenvector).

Jos määritelmän yhtälöryhmä muutetaan homogeeniseksi

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} && (2.65) \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} && (2.66) \end{aligned}$$

niin peruskurssin tietojen perusteella on selvää, että homogeenisella yhtälöryhmällä (2.66) on ei-triviaaleja ratkaisuja, jos ja vain jos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{2.67}$$

Edellinen yhtälö tulee niin usein käyttöön, että sovimme seuraavista nimityksistä.

Määritelmä 2.4.2 Yhtälö

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

on matriisiin $\mathbf{A}$ liittyvä *karakteristinen yhtälö* ja sen vasen puoli

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

on matriisiin $\mathbf{A}$ liittyvä *karakteristinen polynomi.*

Edeltävistä määritelmistä seuraa nyrkkisääntö

ominaisarvot = karakteristisen yhtälön juuret

Esimerkki 2.4.1 Perustapaus. Ratkaistaan matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

ominaisarvot. Muodostetaan karakteristinen polynomi ja ratkaistaan sen nollakohdat.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - (-1)\cdot(-6) \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4) \end{aligned} \tag{2.69}$$

Saamme ominaisarvot (karakteristisen polynomin nollakohdat)

$$\lambda_1 = -1 \text{ ja } \lambda_2 = 4 \tag{2.70}$$

///

Esimerkki 2.4.2 (**Perusesimerkki jatkuu.**) Ratkaistaan edellisen esimerkin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit.

Tapaus $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_1 \\ -6x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 3x_1$$

Siis: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix}, a \neq 0$

Tapaus $\lambda_1 = 4$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4x_1 \\ -6x_1 + x_2 = 4x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Siis: $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -2b \end{pmatrix}, b \neq 0$

Voimme valita $a = 1$ ja $b = 1$ ja antaa seuraavan vastauksen. Matriisin ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = -1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \lambda_2 = 4, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tarkistus:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

///

Esimerkki 2.4.3 (**Kaksinkertainen ominaisarvo.**) Ratkaistaan matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(3-\lambda) - 0] - 0 + (-1)[0 - (-1-\lambda)] \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-2) \end{aligned} \tag{2.72}$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = -1$ (yksinkertainen juuri) ja $\lambda_2 = 2$ (karakteristisen yhtälön kertalukua kaksi oleva juuri). Seuraavaksi ratkaisemme ominaisvektorit.

Tapaus $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 & & - & x_3 & = & -x_1 \\ & -x_2 & + & x_3 & = & -x_2 \\ x_1 & & + & 3x_3 & = & -x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 0$$

Siis: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, a \neq 0$

Tapaus $\lambda_2 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 & & - & x_3 & = & 2x_1 \\ & -x_2 & + & x_3 & = & 2x_2 \\ x_1 & & + & 3x_3 & = & 2x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x_1 & & - & x_3 & = & 0 & +1 \\ & -3x_2 & & x_3 & = & 0 & \\ x_1 & & + & x_3 & = & 0 & \leftarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x_1 & & - & x_3 & = & 0 \\ & -3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -x_3 \\ 3x_2 & = & x_3 \end{cases}$$

Siis: $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3b \\ b \\ 3b \end{pmatrix}, b \neq 0$

Voimme valita $a = 1$ ja $b = 1$, jolloin ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = -1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

///

Esimerkki 2.4.4 (Kompleksinen ominaisarvo.) Ratkaistaan matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \tag{2.74}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2+1) = (2-\lambda)(\lambda+i)(\lambda-i) \tag{2.75}$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$ ja $\lambda_3 = -i$. Kompleksiset ominaisarvot ovat uutta ja outoa. Voimme laskea nytkin ominaisvektorit, mutta joudumme hyväksymään sen, että ominaisvektorien koordinaatit ovat kompleksiset. Lasku,jonka nyt sivuutamme, johtaa tulokseen

$$\lambda_1 = 2, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \lambda_2 = i, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ ja } \lambda_3 = -i, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

///

Kompleksisten matriisien teoria on oleellisesti yksinkertaisempi, kuin teoria joka syntyisi, jos hyväksyisimme vain reaaliset matriisit. Yksi oleellinen syy tähän on se, että hyväksyessämme kompleksiset arvot voimme aina olettaa, että $n \times n$-matriisin karakteristinen polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \tag{2.76}$$

Sama juuri voi esiintyä edellä useampaan kertaan (kertaluku). Kun korkeampaa kertalukua oleva juuri lasketaan niin monta kertaa, kuin se esiintyy polynomissa (2.76), niin voimme sanoa, että $(n \times n)$-matriisilla on tasan n ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Lause 2.4.1 Olkoon $(n \times n)$-matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Silloin

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Todistus.

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) = P(0) \tag{2.77}$$

$$\overset{2.76}{=} (-1)^n(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)\cdots(0-\lambda_n) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

□

Lause 2.4.2 $(n \times n)$-matriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen (eli sillä on käänteismatriisi), jos ja vain jos sen ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ovat kaikki eri suuria kuin 0.

Todistus.

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \tag{2.78}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0 \tag{2.79}$$

□

Matriisin $\mathbf{A}$ diagonaalialkioiden summaa kutsutaan matriisin *jäljeksi* (trace)

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}. \tag{2.80}$$

Lause 2.4.3 Olkoon $(n \times n)$-matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Silloin

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 2.4.5 Esimerkin (2.4.3) matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ ominaisarvot } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2 \tag{2.81}$$

Siis

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \quad = \quad (-1) \cdot 2 \cdot 2 = -4 = \det(\mathbf{A}) \text{ ok} \tag{2.82}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad = \quad (-1) + 2 + 2 = 3 = \text{trace}(\mathbf{A}) \text{ ok} \tag{2.83}$$

///

Kompleksisten matriisien tapauksessa sisätulo ja normi on määriteltävä uudelleen. Kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku on $\overline{z} = x - iy$. Silloin

$$\overline{z}\, z = (x - iy)(x + iy) = \underbrace{x^2 + y^2}_{=|z|^2} \geq 0 \tag{2.84}$$

Kompleksisen matriisin $\mathbf{A}$ *liittomatriisi* $\overline{\mathbf{A}}$ saadaan korvaamalla sen jokainen alkio liittoalkiollaan ja matriisin transponointi korvataan matriisin *Hermitoinnilla* $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$.

Esimerkki 2.4.6

$$\text{jos} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & i \\ 1 & 0 & 2-i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{niin} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & -i \\ 1 & 0 & 2+i \\ 0 & -5i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & -5i \\ -i & 2+i & 3 \end{pmatrix}$$

///

Erityisesti kompleksiselle vektoreille $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$ ja $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$ asetamme

$$\langle \mathbf{z} \mid \mathbf{w} \rangle \quad = \quad \mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k w_k \tag{2.85}$$

$$\|\mathbf{z}\| \quad = \quad \sqrt{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{z}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2} \in \mathbb{R} \tag{2.86}$$

Määritelmä 2.4.3 Neliömatriisi on *normaali* (normal), jos $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$.
Neliömatriisi on *hermiittinen* (hermitian), jos $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$.
Neliömatriisi on *unitaarinen* (unitary), jos $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{-1}$.

Kompleksisten matriisien teoriassa voidaan osoittaa, että normaalin matriisin ominaisvektoreista voidaan valita n vektoria, joista muodostuu lineaarisesti riippumaton joukko, ja hermiittisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset.

Reaalisen matriisin hermiittisyys merkitsee symmetrisyyttä $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, jolloin matriisi on symmetrinen diagonaalinsa suhteen.

Esimerkki 2.4.7

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ on symmetrinen sillä } \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \tag{2.87}$$

///

Reaalisten matriisien tapauksessa edellä mainitut kompleksisten matriisien teoriasta saadut yleiset tulokset kääntyvät erittäin käyttökelpoiseen muotoon. Seuraava tulos perustuu siihen, että reaalinen symmetrinen matriisi on sekä hermiittinen että normaali. (Käyttökelpoisuus tulee siitä, että useissa sovelluksissa matriisit ovat symmetrisiä.)

Lause 2.4.4 Olkoon $\mathbf{A}$ reaalinen $(n \times n)$-matriisi. Jos $\mathbf{A}$ on symmetrinen $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, niin sen kaikki ominaisarvot ovat reaalisia ja sen ominaisvektoreista voidaan valita lineaarisesti riippumaton joukko $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ niin, että $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Valitut ominaisvektorit siis virittävät $\mathbb{R}^n$:n.

Huomaa, että ylläoleva lause on "JOS-lause" (se ei ole "jos ja vain jos-lause"). Esimerkkien 2.4.1–2.4.4 matriiseista yksikään ei ole symmetrinen tai edes normaali. Silti kahden ominaisarvot ovat reaaliset ja yhden ominaisvektoreista saadaan valittua n riippumatonta (esimerkki 2.4.1). Lauseen merkitys tulee nähdä siten, että reaalisen symmetrisen matriisin tapauksessa tiedämme jo etukäteen, että ominaisarvojen ja ominaisvektorien laskemisessa ei tule ongelmia.

2.5 Similaarisuus

Määritelmä 2.5.1 $(n \times n)$-matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat *similaariset* (similar), jos on olemassa säännöllinen matriisi $\mathbf{T}$ (*similariteettimuunnos -matriisi*) siten, että

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}.$$

Jos muunnosmatriisi $\mathbf{T}$ on unitaarinen ($\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}^{-1}$) niin $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat *unitaarisimilaariset* eli

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{T}.$$

Lause 2.5.1 Jos matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat similaariset, $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$, niin

(1) niillä on samat ominaisarvot,
(2) jos $\mathbf{x}_j$ on $\mathbf{A}$:n ominaisvektori, niin $\mathbf{T}\mathbf{x}_j$ on samaan ominaisarvoon liittyvä $\mathbf{B}$:n ominaisvektori.

Todistus: Matriiseilla on samat karakteristiset polynomit, sillä

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = P_A(\lambda) \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}\mathbf{x}_j) = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{x}_j = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \mathbf{T}\lambda_j\mathbf{x}_j = \lambda_j(\mathbf{T}\mathbf{x}_j) \tag{2.89}$$

□

2.6 Matriisin diagonalisointi

Määritelmä 2.6.1 *Diagonaalimatriisi* $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ on $n \times n$-matriisi

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\lambda_j = d_j, \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \tag{2.90}$$

sillä esimerkiksi, kun $n = 4$ ja $j = 2$ saamme

$$\mathbf{D}\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = d_2\mathbf{e}_2 \tag{2.91}$$

Jos lineaarisen kuvauksen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x}$ matriisi on diagonaalinen $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, niin kuvaus on varsin yksinkertainen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ d_2 x_2 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}. \tag{2.92}$$

$\mathbf{y}$:n ensimmäinen koordinaatti riippuu vain $\mathbf{x}$:n ensimmäisestä koordinaatista, jne.

Yllä esitetystä herää kysymys. Voidaanko sopivalla kannanvaihdolla (vert. lause 2.3.2) muuttaa lineaarikuvauksen matriisi diagonaaliseksi? Aina se ei onnistu, mutta tietyin ehdoin se onnistuu!

Lause 2.6.1 Olkoon $(n \times n)$-matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Olkoon $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ niitä vastaavat ominaisvektorit ($\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j, \forall j = 1, \ldots, n$) ja olkoon $\mathbf{X}$ matriisi, jonka j:s sarake on j:s ominaisarvo $\mathbf{x}_j$.
Jos ominaisvektorit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ muodostavat vapaan joukon, niin

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Esimerkki 2.6.1 Esimerkeissä (2.4.1–2.4.3) oli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \lambda_2 = 4, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2.93}$$

Siis

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} && (2.95) \\ &= \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} && (2.96) \end{aligned}$$

///

Määritelmä 2.6.2 Sanomme, että neliömatriisi on *diagonalisoituva*, jos se on similaarinen diagonaalimatriisin kanssa.

Seuraavat lauseet ovat hyödyksi.

Lause 2.6.2 Jos $(n \times n)$-matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ovat kaikki eri suuret, niin vastaavat ominaisvektorit muodostavat linearisesti riippumattoman joukon.

Todistus. Oletamme ensin, että (1) $p-1$ ensimmäista ominaisvektoria muodostavat vapaan joukon ja osoitamme, että silloin myös (2) p ensimmästä ominaisvektoria ovat vapaat.

$$\text{jos } \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{p} b_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned} \text{niin } \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda_p \mathbf{v} \\ &= \sum_{k=1}^{p} b_k \lambda_k \mathbf{x}_k - \sum_{k=1}^{p} b_k \lambda_p \mathbf{x}_k \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} b_k (\lambda_k - \lambda_p) \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

Viimeisessä lausekkeessa on nolla-vektori lausuttu lineaarikombinaationa vektoreista $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{p-1}$, joten oletuksen (1) mukaan lineaarikombinaation kertoimet ovat nollia. Siis $b_1 = b_2 = \ldots = b_{p-1} = 0$. Silloin yhtälöstä (2.97) seuraa, että myös $b_p = 0$. Lopputulos on

$$(b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \ldots + b_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}) \Rightarrow (b_1 = b_2 = \ldots b_n = 0), \tag{2.98}$$

eli p ensimmäistä ominaisvektoria ovat vapaat. Toistamalla päättely p:n arvoilla $2, 3, \ldots, n$ saadaan väite todistettua loppuun. □

Yhdistämällä edellinen lause ja lause 2.4.4 lauseeseen 2.6.1 saadaan.

Lause 2.6.3 (1) Jos neliömatriisin kaikki ominaisarvot ovat eri suuria, niin matriisi on diagonalisoituva.
(2) Symmetrinen matriisi ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$) on diagonalisoituva.

2.7 Matriisin LU-hajoitelma

Tässä ja kahdessa seuraavassa kappaleessa käsitellään matriisien erilaisia hajoitelmia. On tärkeätä huomata, että näitä hajoitelmia on useita. Kirjallisuudesta niitä löytyy vielä lisää.

Ratkaistaan kertauksen vuoksi yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.99}$$

Kun yhtälöryhmä ratkaistaan Gaussin menetelmällä voidaan menetellä seuraavasti

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & -8 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2 & -3 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} \tag{2.100}$$

$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -11 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2 \\ \leftarrow \end{matrix} \tag{2.101}$$

$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \#1 \\ \#2 \\ \#3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{yläkolmiomuoto} \\ \text{(row echelon form)} \end{matrix} \tag{2.102}$$

$$\longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \#3 \rightarrow \\ \#2 \rightarrow \\ \#1 \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = (-6 - 6x_3)/2 = (-6+6)/2 = 0 \\ x_1 = -3 - 4x_2 - 7x_3 = -3 - 0 + 7 = 4 \end{cases} \tag{2.103}$$

Jokainen Gaussin algoritmin vaihe voidaan tulkita matriisilla kertomisena. Seuraavat esimerkit selventävät asiaa

"kerro rivi 2 viidell"a:"

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\10&20&30\\100&200&300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\50&100&150\\100&200&300\end{pmatrix} \tag{2.104}$$

"lisää rivi 1 riviin 2:"

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\10&20&30\\100&200&300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\11&22&33\\100&200&300\end{pmatrix} \tag{2.105}$$

"vaihda rivit 1 ja 2:"

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\10&20&30\\100&200&300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&20&30\\1&2&3\\100&200&300\end{pmatrix} \tag{2.106}$$

Kirjoittamalla rivioperaatiot matriisikertolsakuina saadaan

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\-2&-5&-8\\3&6&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\0&3&6\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{2.107}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}}_{=\mathbf{L}^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&4&7\\-2&-5&-8\\3&6&10\end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&4&7\\0&3&6\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\mathbf{U}} \tag{2.108}$$

Kertomalla vasemmalta ensimmäisen matriisin käänteismatriisilla saadaan

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&4&7\\-2&-5&-8\\3&6&10\end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}}_{=\mathbf{L}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&4&7\\0&3&6\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\mathbf{U}} \tag{2.109}$$

Jos Gaussin algoritmin kuluessa (2.100–2.102) joudutaan vaihtamaan rivejä, ei $\mathbf{L}$ tule alakolmiomatriisiksi. Toisaalta yhtälöryhmän yhtälöt voidaan aina järjestää niin, ettei Gaussin algoritmissa tarvitse vaihtaa rivejä.

Huomaa, että alakolmiomatriisin $\mathbf{L}$ diagonaalin alapuoliset alkiot ovat Gaussin algoritmin (2.100–2.102 kuluessa käytettyjen kertoimien vastalukuja. Yläkolmiomatriisi $\mathbf{U}$ on kaavion (2.102) vasen osa. LU-hajoitelma

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}, \tag{2.110}$$

jossa $\mathbf{L}$ on alakolmiomatriisi (diagonaalilla ykkösiä) ja $\mathbf{U}$ on yläkolmiomatriisi, saadaan siis suoraan Gaussin algoritmin aikana.

Jos nyt joudumme ratkaisemaan uuden yhtälöryhmän, jossa kerroinmatriisi on sama kuin edellisessä yhtälöryhmässä, mutta RHS on muuttunut, niin voimme

hyödyntää LU-hajoitelmaa ja ratkaista ryhmä kaksivaiheisesti

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.111}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{L}\underbrace{\mathbf{Ux}}_{=\mathbf{y}} = \mathbf{b} \tag{2.112}$$

$$\mathbf{b} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Ly}=\mathbf{b}} \longrightarrow \mathbf{y} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Ux}=\mathbf{y}} \longrightarrow \mathbf{x}$$

Esimerkki 2.7.1 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\-2&-5&-8\\3&6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\9\end{pmatrix} \tag{2.113}$$

käyttäen hyväksi tietoa

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4&7\\-2&-5&-8\\3&6&10\end{pmatrix}=\mathbf{LU}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\0&3&6\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{2.114}$$

$$\mathbf{Ly}=\mathbf{b} \;\rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\-2&1&0&-5\\3&-2&1&9\end{array}\right) \tag{2.115}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 &=& 1\\ y_2 &=& -5+2\cdot 1=-3\\ y_3 &=& 9-3\cdot 1+2(-3)=0\end{cases}$$

$$\mathbf{Ux}=\mathbf{y} \;\rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&1\\0&3&6&-3\\0&0&1&0\end{array}\right) \tag{2.116}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_3 &=& 0\\ x_2 &=& (-3-6\cdot 0)/3=-1\\ x_1 &=& 1-4(-1)-7\cdot 0=5\end{cases}$$

2.8 Matriisin QR-hajoitelma

Lause 2.8.1 Jos $\mathbf{A}$ on $(m \times n)$-matriisi, jonka sarakkeet muodostavat lineaarisesti riippumattoman vektorijoukon, niin $\mathbf{A}$ voidaan hajoittaa tuloksi

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

missä $\mathbf{Q}$ on matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeiden virittämän aliavaruuden ortonormitettu kanta ($\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) ja $\mathbf{R}$ on yläkolmiomuodossa oleva säännöllinen $(n \times n)$-matriisi ja sen diagonaalialkiot ovat positiiviset.

Perustelu. Emme todista lausetta, mutta kerromme karkean perustelun. Ortonormitettu kanta voidaan muodostaa Gram-Schmidt -prosessilla. Nämä kantavektorit asetetaan $\mathbf{Q}$:n sarakkeiksi. Prosessin tarkka tutkiminen osoittaa, että $\mathbf{A}$:n k:s sarake voidaan lausua k:n ensimmäisen $\mathbf{Q}$:n sarakkeen lineaarikombinaationa. Matriisi $\mathbf{R}$ saadaan keräämällä edellämainitut lineaarikombinaatioiden kertoimet $\mathbf{R}$:n sarakkeiksi. Vielä pitäisi osoittaa, että $\mathbf{R}$ on säännöllinen, mutta sivuutamme tämän nyt. □

Joka tapauksessa $\mathbf{Q}$ saadaan Gram-Schmidt -prosessilla ja $\mathbf{R}$ saadaan sen jälkeen lausekkeesta

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{QR} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \tag{2.117}$$

Lauseen ehto, että matriisin $\mathbf{A}$ sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, merkitsee että $m \geq n$. Jos $m > n$, niin matriisi $\mathbf{A}$ ei ole neliömatriisi, eikä sillä siis voi olla käänteismatriisia. Kuitenkin $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ on symmetrinen $(n \times n)$-matriisi ja

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = (\mathbf{QR})^{\mathrm{T}}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} \tag{2.118}$$

Koska $\mathbf{R}$ on säännöllinen, on myös $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ säännöllinen. Siis myös $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ on säännöllinen. Voimme siis määritellä matriisin

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \tag{2.119}$$

Jos $\mathbf{A}$ on $n \times n$-matriisi, niin voimme päätellä

$$\begin{aligned} &\text{Jos} \quad \mathbf{A} \text{ on säännöllinen (full rank)}, \\ &\text{niin} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.120}$$

Vastaavasti jos $\mathbf{A}$ on $m \times n$-matriisi ja $m > n$, niin käänteismatriisia ei ole olemassa. Silti voimme päätellä seuraavasti

$$\begin{aligned} &\text{Jos} \quad \mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = n \text{ (full rank), ja } \mathbf{b} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A}), \\ &\text{niin} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.121}$$

Perustelu kaavalle (2.121):

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{+}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{AA}^{+}\mathbf{b} = \mathbf{QRR}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{b} \tag{2.123}$$

□

Esimerkki 2.8.1 Jos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.124}$$

niin

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.125}$$

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.127}$$

Siis voimme ratkaista yhälön

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{2.128}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

///

Jos QR-hajoitelma on tiedossa, niin helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ on toimia seuraavasti

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{QRx} = \mathbf{b} \tag{2.130}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \tag{2.131}$$

Yhtälöryhmän kerroinmatriisi on nyt yläkolmiomuodossa, joten ryhmä ratkeaa helposti kuten LU-hajoitelman yhteydessä.

Jos $\mathbf{b} \notin \text{Col}(\mathbf{A})$, niin vektori $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ voidaan laskea, mutta se ei voi olla yhtälön $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ratkaisu. Tietyssä mielessä se on kuitenkin "paras likiarvo". Palaamme tähän uudelleen pienimmän neliösumman yhteydessä optimointiosassa.

2.9 Matriisin singulaariarvohajoitelma

Kun halutaan saada saada mielikuva lineaarikuvauksesta

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}, \tag{2.132}$$

niin eräs hyvä tapa on laskea kuvavektorin pituus, kun $\|\mathbf{x}\| = 1$. Jos λ on matriisin ominaisarvo ja $\mathbf{x}$ on sitä vastaava normeerattu ominaisvektori, niin

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \tag{2.133}$$

Jos ominaisvektorit virittävät $\mathbb{R}^n$:n, niin saamme varsin hyvän käsityksen kuvauksesta. Valitettavasti kaikkien matriisien ominaisvektorit eivät ole reaalisia. Onneksi tähän löytyy seuraava ratkaisu.

Olkoon $\mathbf{A}$ *mikä tahansa (!)* $(m \times n)$-matriisi. Tutkitaan kuvavektorin normin sijasta normin neliötä

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{Ax})^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} \tag{2.134}$$

Matriisi $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ on symmetrinen, sen ominaisarvot ovat reaaliset. Jos λ_j on matriisin $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ ominaisarvo ja $\mathbf{v}_j$ on sitä vastaava normeerattu ominaisvektori, niin

$$\|\mathbf{Av}_j\|^2 = \mathbf{v}_j{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Av}_j = \mathbf{v}_j{}^{\mathrm{T}}\lambda_j\mathbf{v} = \lambda_j \tag{2.135}$$

Matriisin $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ ominaisarvot ovat siis ei-negatiiviset ja ne yleensä järjestetään suuruusjärjestykseen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n \geq 0$. Voimme määritellä

Määritelmä 2.9.1 $(m \times n)$-matriisin $\mathbf{A}$ *singulaariarvot* (singular values) ovat

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}, j = 1, \ldots, n$$

missä $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ovat matriisin $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ ominaisarvot.

Siis $\|\mathbf{Av}_j\| = \sigma_j$.

Lause 2.9.1 Jos $(m \times n)$-matriisin $\mathbf{A}$ säännöllisyysaste on $\text{Rank}(\mathbf{A}) = r$, niin on olemassa hajoitelma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}},$$

missä $\mathbf{U}$ on ortogonaalinen $(m \times m)$-matriisi ja $\mathbf{V}$ on ortogonaalinen $(n \times n)$-matriisi ja

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$$

2.10 Matriisin definiittisyys

Seuraavassa määriteltävä neliömuoto ei ole lineaarikuvaus, vaikka sen ominaisuuksia tutkitaan matriisien avulla. Tässä kurssissa käsiteltävät sovellukset liittyvät optimointiin.

Määritelmä 2.10.1 (Epälineaarinen) kuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Q(\mathbf{x}) = \sum q_{ij}x_ix_j$$

on $\mathbb{R}^n$:n *neliömuoto*.

Neliömuoto voidaan aina esittää symmetrisen matriisin avulla.

Esimerkki 2.10.1

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 && (2.136) \\ = \; & x_1x_1 + x_2x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - x_2x_3 - x_3x_2 \\ = \; & x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(x_2 + 2x_1 - x_3) - x_3(x_2) \\ = \; & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ = \; & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} && (2.137) \end{aligned}$$

///

Voimme siis aina olettaa, että neliömuoto voidaan esittää symmetrisen matriisin $\mathbf{A}$ avulla

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} \tag{2.138}$$

Määritelmä 2.10.2 Symmetrinen $(n \times n)$-neliömatriisi $\mathbf{A}$ on *positiivisesti definiitti*, jos

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

negatiivisesti definiitti, jos

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

positiivisesti semidefiniitti, jos

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

negatiivisesti semidefiniitti, jos

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0, \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

indefiniitti, jos se ei ole mitään edeltävistä.

Lause 2.10.1 Olkoon $\mathbf{A}$ symmetrinen $(n \times n)$-neliömatriisi, jonka reaaliset ominaisarvot ovat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(1) Jos kaikki ominaisarvot ovat positiivisia ($\lambda_j > 0$), niin $\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti.

(2) Jos kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia ($\lambda_j < 0$), niin $\mathbf{A}$ on negatiivisesti definiitti.

(3) Jos kaikki ominaisarvot ovat ei-negatiivisia ($\lambda_j \geq 0$), niin $\mathbf{A}$ on positiivisesti semidefiniitti.

(4) Jos kaikki ominaisarvot ovat ei-positiivisia ($\lambda_j \leq 0$), niin $\mathbf{A}$ on negatiivisesti semidefiniitti.

(5) Jos on olemassa sekä positiivinen ominaisarvo, että negatiivinen ominaisarvo, niin $\mathbf{A}$ on indefiniitti.

Esimerkki 2.10.2 Tutkitaan definiittisyys matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.139}$$

Lasketaan ensin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{2.140}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 && (2.141)\\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda) - 1] - 2 \cdot 2 \cdot (-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + 4\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda+1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow -(\lambda+1)(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Ominaisarvot ovat siis

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618 \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382 \quad \lambda_3 = -1$$

Siis matriisi on indefiniitti.

Pienten yksinkertaisten matriisien tapauksessa on usein helpompaa soveltaa seuraavaa lausetta

Lause 2.10.2 Olkoon $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ neliömuoto. Lasketaan apudeterminantit (vasemmasta ylänurkasta) $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_n|$ asettamalla

$$|D_1| = a_{11} \quad \text{ja} \quad |D_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Jos kaikki apudeterminantit ovat positiivisia, $|D_k| > 0$, niin matriisi on positiivisesti definiitti.
Jos parittomat apudeterminantit ovat negatiivisia, $|D_k| < 0$, kun $k = 1, 3, \ldots$, ja parilliset ovat positiivisia, $|D_k| > 0$, kun $k = 2, 4, \ldots$, niin matriisi on negatiivisesti definiitti.

Todistus. Siuvuutetaan. □

Esimerkki 2.10.3 Tutkitaan vielä kerran definiittisyys matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.142}$$

Apudeterminantit ovat

$$|D_1| \quad = \quad 1 > 0 \tag{2.143}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad (2.144)$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad (2.145)$$

Siis matriisi on indefiniitti.

3. Ääriarvotehtäviä

Lineaarista optimointia on sivuttu peruskurssilla ja sitä käsitellään paljon *operaatioanalyysin* kurssilla. Epälineaarista optimointia tullaan käsittelemään tarkemmin *optimoinnin jatkokurssilla*, mutta nyt käydään läpi perusteet. Rajoitumme tässä johdannossa jatkuvien ja sileiden funktioiden optimointiin. Toisin sanoen funktiota voidaan derivoida niin monta kertaa kuin on tarvetta.

Koska emme voi kerrata kaikkea, on tärkeätä, että opiskelija tarvittaessa kertaa sen, mitä on aiemmin oppinut derivoinnista ja osittaisderivaatoista.

3.1 Yhden muuttujan tapaus, kertaus

3.1.1 Ääriarvon tyyppi

Aloitamme tutusta asiasta eli suljetulla välillä määritellystä yhden muuttujan funktiosta. Kuvassa 3.3 on funktion

$$f(x) = \frac{25}{5x-4} + 3(x-3)^3 - 3x + 5 \quad (3.1)$$

kuvaaja välillä $[1, 4]$. Kuvasta näkee, että funktiolla on kaksi lokaalia minimiä ja kolme lokaalia maksimia. Välin päätepisteissä on tällä kertaa lokaalit maksimit. Globaalit ääriarvokohdat ovat maksimikohta $x_1 = 1.000$ ja minimikohta $x_2 = 1.252$. Vastaavat globaalit ääriarvot ovat maksimiarvo $f(x_1) = 3.000$ ja minimiarvo $f(x_2) = -3,717$.

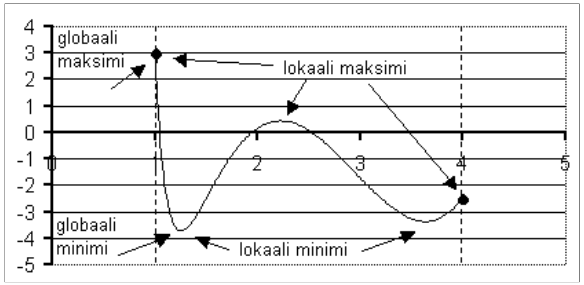


Figure 3.3: Funktion ääriarvot.

Määritelmä 3.1.1 (A) Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $[a,b] = I$ määritelty funktio. Määrittelyvälin piste $x^\star \in I$ on *globaali maksimi(minimi)-kohta*, jos f saa suurimman(pienimmän) arvonsa välillä I kohdassa $x^\star$.

(A') Globaali maksimi(minimi) -kohta on siis optimointitehtävän

$$\begin{cases} \max(\min) & z = f(x) \\ \text{ehdolla} & x \geq a \\ & x \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max(\min) & z = f(x) \\ \text{ehdolla} & x \in I \end{cases}$$

optimipiste.

(B) Avoin väli $J = (\alpha, \beta)$ on x:n *avoin ympäristö*, jos $\alpha < x < \beta$.

(C) Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $I = [a,b]$ määritelty funktio. Määrittelyvälin piste $x^\star \in I$ on *lokaali maksimi(minimi)-kohta*, jos on olemassa $x^\star$:n avoin ymäristö J niin, että f saa suurimman(pienimmän) arvonsa joukossa $J \cap I$ kohdassa $x^\star$.

(C') Voimme yhtäpitävästi määritellä, että $x^\star \in I$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa $x^\star$:n avoin ympäristö J siten, että $x^\star$ on optimointitehtävän

$$\begin{cases} \max(\min) & z = f(x) \\ \text{ehdolla} & x \in I \\ & x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max(\min) & z = f(x) \\ \text{ehdolla} & x \geq a \\ & x \leq b \\ & x > \alpha \\ & x < \beta \end{cases}$$

optimipiste.

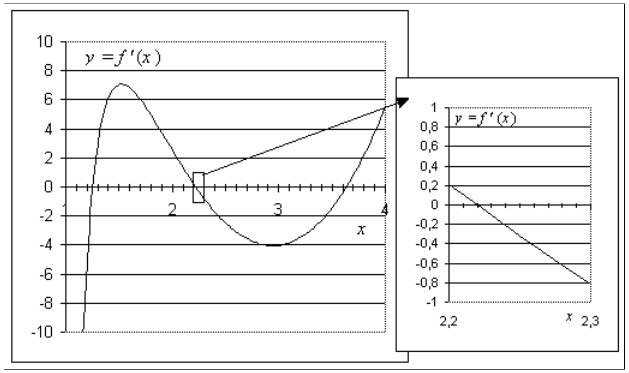


Figure 3.4: $y = f'(x)$.

(C") Vielä voimme yhtäpitävästi määritellä, että $x^\star \in [a,b]$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa $x^\star$:n avoin ympäristö J siten, että kaikille $x \in J \cap I$ on voimassa

$$x \neq x^\star \Rightarrow f(x) \leq (\geq) f(x^\star) \tag{3.2}$$

(D) Jos epäyhtälössä (3.2) erisuuruus on aito kaikilla $x \in (J \cap I) \setminus \{x^\star\}$ (eli $x^\star$ on ainoa optimikohta $J \cap I$:ssä) niin sanomme, että ääriarvo on *vahva ääriarvo*. Jos ääriarvo ei ole vahva, niin se on *heikko*.

Esimerkki 3.1.1 Kuvasta 3.3 näkee helposti funktion (3.1) ääriarvojen tyypit, mutta ääriarvokohtia on usein vaikea nähdä tarkasti. Lukiossa ongelma ratkaistiin etsimällä derivaattafunktion nollakohdat, $f'(x) = 0$. Nyt ratkaistavaksi tuleva yhtälö on neljättä astetta, joten emme osaa ratkaista sitä tarkasti. Hieman paremmin ääriarvokohta näkyy derivaattafunktion kuvaajasta, jonka voi piirtää vaikkapa Excelillä. Lokaalissa maksimikohdassa derivaatan merkkikaaviossa on "$+|-$" ja minimikohdassa on derivaatan merkkikaaviossa "$-|+$". Kuvassa 3.4 on derivaattafunktion kuvaaja. Kuvasta näemme, että funktiolla on lokaali maksimikohta kohdassa $x \approx 2.22$. Jos haluamme tietää ääriarvokohdan tarkemmin, tulee kuvaajan tutkiminen työlääksi. Jatkamme esimerkin käsittelyä numeerisesti luvussa 5.4. ///

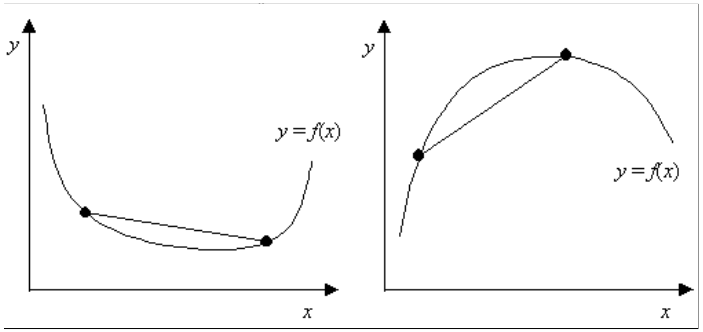


Figure 3.5: (a) Konveksi funktio (b) konkaavi funktio.

3.1.2 Konveksisuus ja konkaavisuus

Yhden muuttujan funktio $f(x)$ on *Konveksi* (*konkaavi*), jos mitä tahansa kahta funktion kuvaajan pistettä yhdistävä jana ei missään ole kuvaajan alapuolella (yläpuolella). Täsmällisempi määritelmä on seuraavassa:

Määritelmä 3.1.2 (A) Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, jos kaikilla $x, y \in [a,b]$ ja $t \in [0,1]$ on voimassa

$$f(tx + (1-t)y) \leq t(f(x) + (1-t)f(y)$$

(B) Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on *konkaavi*, jos kaikilla $x, y \in [a,b]$ ja $t \in [0,1]$ on voimassa

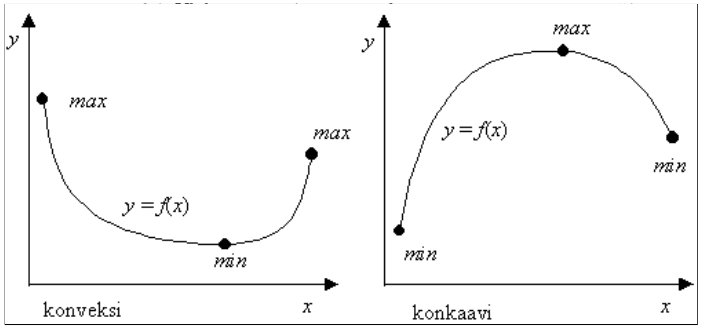
$$f(tx + (1-t)y) \geq t(f(x) + (1-t)f(y)$$

(C) Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *lineaarinen*, jos kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

///

Huomautus: Lineaarinen funktio on sekä konveksi, että konkaavi. Käänteinen tulos ei kuitenkaan pidä paikkaansa, sillä funktio on yhtaikaa konveksi ja konkaavi jos sen kuvaaja on suora, mutta lineaarisuus edellyttää lisäksi, että $f(0) = 0$.



Lause 3.1.1 (A) Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on konveksi funktio ja $x^\star$ on sen lokaali minimikohta välillä $[a,b]$, niin $x^\star$ on f:n globaali minimikohta välillä $[a,b]$.

(B) Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on konkaavi funktio ja $x^\star$ on sen lokaali maksimikohta välillä $[a,b]$, niin $x^\star$ on f:n globaali maksimikohta välillä $[a,b]$.

Todistus. (A) Koska $x^\star$ on lokaali minimikohta on olemassa väli $(\alpha, \beta) \ni x^\star$ siten, että

$$f(x) \geq f(x^\star), \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Jos $y > \beta$, niin on olemassa $t \in [0,1]$ siten, että $\beta = tx^\star + (1-t)y$. Konveksisuudesta seuraa nyt, että

$$\begin{aligned} f(x^\star) &\leq f(\beta) = f(tx^\star + (1-t)y) \leq tf(x^\star) + (1-t)f(y) \\ \Rightarrow f(x^\star) &\leq f(y) \end{aligned}$$

Jos $y < \alpha$ nähdään vastaavalla tavalla, että $f(x^\star) \leq f(y)$.
(B) Mutatis mutandis. □

Lause 3.1.2 (A) Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on konveksi funktio ja $x^\star$ on sen vahva lokaali maksimikohta välillä $[a,b]$, niin $x^\star = a$ tai $x^\star = b$.

(B) Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on konkaavi funktio ja $x^\star$ on sen vahva lokaali minimikohta välillä $[a,b]$, niin $x^\star = a$ tai $x^\star = b$.

Todistus. HT. □

Konveksi (konkaavi) funktio on jatkuva, mutta sen ei tarvitse olla derivoituva. Jos kuitenkin funktio on jatkuvasti derivoituva, niin voimme antaa uuden tavan tutkia funktion konveksisuutta.

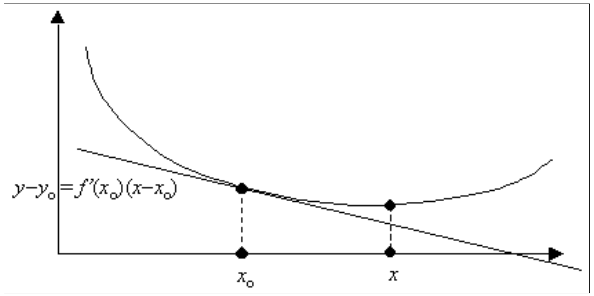


Figure 3.6: Sileän funktion konveksisuus

Idea perustuu siihen, että alkuperäinen konveksisuuden määritelmä on yhtäpitävä sen ominaisuuden kanssa, että funktion kuvaaja ei missään jää minkään tangenttinsa alapuolelle.

Lause 3.1.3 Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funktio.
(A) Jos f ja f' ovat jatkuvia, niin f on konveksi, jos ja vain jos

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x_0, x \in [a, b]$$

(B) Jos f'' on jatkuva, niin f on konveksi, joss

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

(C) Jos f ja f' ovat jatkuvia, niin f on konkaavi, joss

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x_0, x \in [a, b]$$

(D) Jos f'' on jatkuva, niin f on konkaavi, joss

$$f''(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$$

Todistus. HT. □

Esimerkki 3.1.2 Määritetään funktion

$$f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \sin x$$

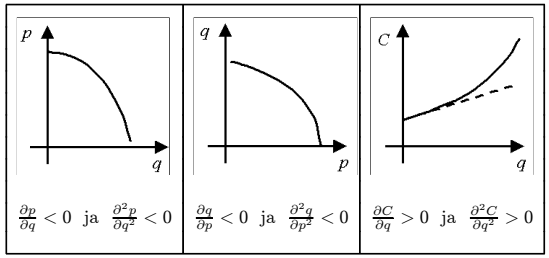
suurin arvo. Eräs tapa lähestyä asiaa on tehdä derivaatan merkkikaavio, mutta nyt

tarkistamme ensin konveksisuuden. Koska

$$f'(x) = 2x - \cos x \Rightarrow f''(x) = 2 + \sin x > 0, \ \forall x$$

Siis f on konveksi ja se saa maksimiarvonsa määrittelyvälin päätepisteessä. $f(0) = 0$ ja $f(\pi/2) = \pi^2/4 - 1$, joten kysytty maksimi on $\pi^2/4 - 1$. ///

Esimerkki 3.1.3 Tutkitaan yritystä, jonka kysyntää ja kustannuksia arvioidaan kuvaavan alla olevat kuvat. Kuvista ei saada kovin yksityiskohtaista tietoa, mutta ensimmäisten ja toisten derivaattojen merkit nähdään kuvista.



Merkitään $p = f(q)$ ja $C = C(q)$ jolloin tiedämme kuvien perusteella funktioiden f ja C ensimmäisten ja toisten derivaattojen merkit

$$f'(q) = \frac{\partial p}{\partial q} < 0, \ f''(q) = \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} < 0, \ C'(q) > 0, \text{ ja } C''(q) > 0 \tag{3.3}$$

Voittofunktio on

$$P(q) = R(q) - C(q) = q \cdot f(q) - C(q) \tag{3.4}$$

ja sen derivaatat ovat

$$P'(q) = MR(q) - MC(q) = f(q) + q \cdot f'(q) - C'(q) \tag{3.5}$$

$$P''(q) = \underbrace{f'(q) + f'(q)}_{<0} + \underbrace{q \cdot f''(q)}_{<0} - \underbrace{C''(q)}_{>0} < 0 \tag{3.6}$$

Siis voittofunktio on konkaavi, joten voitto maksimoituu täsmälleen yhdellä tuotannon määrällä. Optimia kuvaa yhtälöt

$$0 = MR - MC = f(q) + q \cdot f'(q) - MC \tag{3.7}$$

$$= p(1 + f'(q) \cdot \frac{q}{p}) - MC$$

$$\Leftrightarrow 0 = p(1 + \frac{1}{\eta}) - MC \tag{3.8}$$

Yhtälö (3.8) kuvaa onnistuneesti opitimaalista toimintaa. Funktiot f ja C eivät suoraan esiinny yhtälössä, mutta niistä riippuvat 'kysynnän hintajousto' η ja rajakustannus MC ovat kohtuullisen hyvin arvioitavissa, joten ehdon (3.8) voimassaolo voidaan ajoittain tarkistaa. Jos ehto ei ole voimassa, tulee harkita tuotantomäärän muuttamista. ///

3.2 Kahden muuttujan tapaus ilman rajoitteita

Seuraavaksi tarkastelemme optimointitehtävää, jossa päätösmuuttujia on kaksi kappaletta, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$. Olkoon epälineaarinen tavoitefunktio $z = f(\mathbf{x})$ hyvin määritelty $\mathbb{R}^2$:ssa. Voimme kirjoittaa optimointitehtävän muotoon

$$\begin{array}{ll} \max & z = f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Kahden ratkaisuvektorin välinen etäisyys on tavallinen euklidinen

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star\| = \sqrt{(x_1 - x_1^\star)^2 + (x_2 - x_2^\star)^2}$$

Ratkaisuvektorin $\mathbf{x}^\star$ r-säteinen avoin palloympäristö $B_r(\mathbf{x}^\star)$ muodostuu niistä ratkaisuvektoreista, jotka ovat lähempänä kuin r:n etäisyydellä $\mathbf{x}^\star$:stä

$$B_r(\mathbf{x}^\star) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star\| < r\|\}$$

Joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ on *avoin*, jos sen jokaisella pisteellä $w \in U$ on U:hun sisältyvä palloympäristö, $B_r(w) \subset U$. (Toisin sanoen: mikään U:n piste ei ole U:n reunapiste.) Jos $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja $x \in U$, niin sanomme että U on x:n avoin ympäristö.

Määrittelemme seuraavaksi ääriarvon tyypit monen muuttujan funktion tapauksessa. (Huomaa, että määritelmät ovat lähes sanasta sanaan samat kuin edellä.)

Määritelmä 3.2.1 (A) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Piste $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^2$ on *globaali maksimi(minimi)-kohta*, jos f saa suurimman(pienimmän) arvonsa $\mathbb{R}^2$:ssa kohdassa $\mathbf{x}^\star$.

(A') Globaali maksimi(minimi) -kohta on siis optimointitehtävän

$$\begin{cases} \max(\min) & z = f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdolla} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

optimipiste.

Määritelmä 3.2.2 (B) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Piste $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^2$ on *lokaali maksimi(minimi)-kohta*, jos on olemassa $\mathbf{x}^\star$:n avoin ymäristö U niin, että f saa suurimman(pienimmän) arvonsa joukossa U kohdassa $\mathbf{x}^\star$.

(B') Voimme yhtäpitävästi määritellä, että $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^2$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa $\mathbf{x}^\star$:n avoin ympäristö U siten, että $\mathbf{x}^\star$ on optimointitehtävän

$$\begin{cases} \max(\min) & z = f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdolla} & \mathbf{x} \in U \end{cases}$$

optimipiste.

Määritelmä 3.2.3 (B") Vielä voimme yhtäpitävästi määritellä, että $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^2$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa $\mathbf{x}^\star$:n avoin ympäristö U siten, että kaikille $\mathbf{x} \in U$ on voimassa

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^\star \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq (\geq) f(\mathbf{x}^\star) \tag{3.9}$$

(C) Jos epäyhtälössä (3.9) erisuuruus on aito kaikilla $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$ (eli $\mathbf{x}^\star$ on ainoa optimikohta U:ssa) niin sanomme, että ääriarvo on *vahva ääriarvo*. Jos ääriarvo ei ole vahva, niin se on *heikko*.

Esimerkki 3.2.1 Kahden muuttujan funktiota voi olla vaikea hahmottaa. Kuvissa 3.7 (a) ja (b) on piirretty funktion

$$f(x_1, x_2) = 30e^{-(x_1^2+x_2^2)} + x_1^2 - 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 8 \tag{3.10}$$

kuvaaja, kun $-1 \leq x_1 \leq 3$ ja $-1 \leq x_2 \leq 2$. Kuvassa (a, "Plot3D") on piirretty funktion määräämä pinta. Pinta on joskus vaikea hahmottaa ja siksi on kuvan (a) avuksi piirretty kuva (b, "ContourPlot"), jossa on funktion tasa-arvokäyrät. Kuvat yhdessä tekevät selväksi, että funktiolla on lokaali maksimi lähellä pistettä $(-0.1; -0.2)^{\mathrm{T}}$ ja lokaali minimi lähellä kohtaa $(3.2; 1)^{\mathrm{T}}$. Kuvasta saatavat arviot eivät ole kovin tarkkoja, mutta kuvan tarkoitus onkin vain selvittää pinnan muoto katsojalle. Tarkat ääriarvojen paikat saadaan numeerisilla menetelmillä, joita sivutaan myöhemmin ja käsitellää tarkemmin numeerisen matematiikan kurssilla. ///

Eräs tehokas ja monesti helppo tapa hahmottaa funktiota on piirtää *funktion arvot viivalla*. Kiinnitetään $\mathbb{R}^2$:n piste $\mathbf{x}_0$ ja suuntavektori $\mathbf{u}$. (Suuntavektoria ei tarvitse normittaa, mutta joskus normittaminen helpottaa kuvien tulkintaa.) Silloin piste

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \tag{3.11}$$

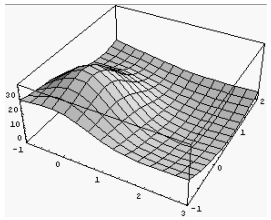
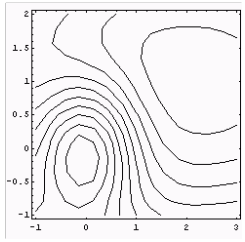
(a)  (b) 

Figure 3.7: (a) Funktion $f(x_1,x_2) = 30e^{-(x_1^2+x_2^2)} + x_1^2 - 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 8$ kuvaaja ja (b)funktion tasa-arvokäyrät. Käytetyt Mathematica-komennot:

```
f[x1_,x2_]:=30 Exp[-x1^ 2-x2^ 2] + x1^ 2-4 x1+4 x2^ 2-8x2+8
Plot3D[f[x1,x2], {x1,-1,3}, {x2,-1,2}]
ContourPlot[f[x1,x2], {x1,-1,3},{x2,-1,2},{ContourShading->False}]
```

on suoralla (viivalla), joka kulkee piteen $\mathbf{x}_0$ kautta ja on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen. Nyt funktion

$$f_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{x}_t) \tag{3.12}$$

kuvaaja kertoo, mitä arvoja funktio saa vastaavalla viivalla.

Esimerkki 3.2.2 Tutkitaan edellisen esimerkin funktion arvoja viivalla, joka kulkee pisteen $\mathbf{x}_0 = (0;0)^{\mathrm{T}}$ kautta ja on vektorin $\mathbf{u} = (1;2)^{\mathrm{T}}$ suuntainen. Kuvassa (a) on piirretty tämä viiva tasa-arvokäyrien päälle. Nyt

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}}(t) &= f(\mathbf{x}_t) = f\begin{pmatrix} 0+t\cdot 1 \\ 0+t\cdot 2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} && (3.13)\\ &= 30e^{-(t^2+(2t)^2)} + t^2 - 4t + 4(2t)^2 - 8(2t) + 8 && (3.14)\\ &= 30e^{-5t^2} + 17t^2 - 20t + 8 && (3.15) \end{aligned}$$

Kuva 3.8 (eli lausekkeen (3.15) kuvaaja) ei ole enää hankala piirtää. Piirtäminen onnistuu graafisella laskimella tai vaikkapa excelillä. Kuvasta nähdään, ettei $(0;0)^{\mathrm{T}}$ ole ääriarvokohta, sillä viivalta löytyy parempikin piste. ///

Tarkastelemme ongelmaa yleisemmin. Olkoon $f(x_1,x_2)$ funktio ja haluamme tutkia mahdollisuutta, että sen eräs ääriarvokohta olisi piste $\mathbf{p} = (p_1;p_2)$. Tätä varten tutkimme funktion arvoja viivalla, joka kulkee pisteen $\mathbf{p}$ kautta ja on vektorin $\mathbf{u} = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$) suuntainen. Silloin viivafunktiolle pätee

$$f_{\mathbf{p},\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{x}_t) = f(\overbrace{p_1^\star + u_1 t}^{x_1}, \overbrace{p_2^\star + u_2 t}^{x_2}) \tag{3.16}$$

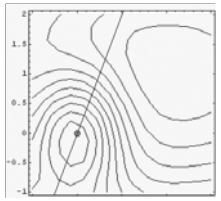
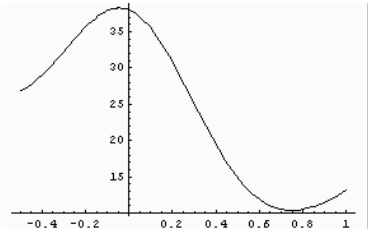
(a)  (b) 

Figure 3.8: (a) Funktion $f(x_1,x_2) = 30e^{-(x_1^2+x_2^2)} + x_1^2 - 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 8$ tasa-arvokäyrät ja viiva pisteen $(0;0)^{\mathrm{T}}$ kautta vektorin $(1;2)^{\mathrm{T}}$ suuntaan. (b) Funktion arvot viivalla.

$$\Rightarrow f'_{\mathbf{p},\mathbf{u}}(t) = u_1 f_{x_1}(\mathbf{x}_t) + u_2 f_{x_2}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \nabla f(\mathbf{x}_t) \tag{3.17}$$

missä esiintyvää f:n gradienttivektoria

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

tutkimme tarkemmin seuraavassa kappaleessa.

Vastaavasti saamme viivafunktion toisen derivaatan

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{p},\mathbf{u}}(t) &= u_1 f_{x_1}(\overbrace{p_1^\star + u_1 t}^{x_1}, \overbrace{p_2^\star + u_2 t}^{x_2}) && (3.18)\\ &\quad + u_2 f_{x_2}(\overbrace{p_1^\star + u_1 t}^{x_1}, \overbrace{p_2^\star + u_2 t}^{x_2})\\ \Rightarrow f''_{\mathbf{p},\mathbf{u}}(t) &= u_1 f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_t)u_1 + u_1 f_{x_1x_2}(\mathbf{x}_t)u_2 && (3.19)\\ &\quad + u_2 f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_t)u_1 + u_2 f_{x_2x_2}(\mathbf{x}_t)u_2 && (3.20)\\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{u} && (3.21) \end{aligned}$$

missä esiintyvää matriisi $\mathbf{H}$ on f:n Hessin matriisi (Hessian). Myös tätä matriisia käsittelemme seuraavissa kappaleissa.

3.2.1 Gradientti ja välttämätön ehto

Edellä esiintynyt gradientti on erittäin usein käyttöön tuleva olio. Optimoinnin yhteydessä se helpottaa asioiden esittämistä. Määrittelemme sen nyt ja toteamme sen yhteyden tasa-arvokäyrästöihin (ContourPlot).

Määritelmä 3.2.4 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sileä funktio. Funktion f gradientti pisteessä $\mathbf{x}$ on

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial f(\mathbf{x})/\partial x_1 \\ \partial f(\mathbf{x})/\partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix}.$$

(Lukuohje ∇f = *"funktion f gradientti"* tai *"nabla f"*.)

Esimerkki 3.2.3

$$\text{Jos} \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1 + x_1x_2 + x_2^2 \tag{3.22}$$

$$\text{niin} \qquad \nabla f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Gradientti on vektori ja lauseke (3.23) kertoo miten tämän vektorin koordinaatit lasketaan eri pisteissä. Esimerkiksi

$$\nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 2 + 1 \\ 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

$$\nabla f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 2 + 2 \\ 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

///

Peruskurssilla jo käsiteltiin kahden muuttujan funktioita. Funktion $f(x, y)$ arvon muutos, kun x:n ja y:n arvot muuttuvat, saatiin kokonaisdifferentiaalina

$$df \approx \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.26}$$

Jos $\|\mathbf{u}\|$ on pieni, niin sama asia voidaan ilmaista nyt käsillä olevin merkinnöin seuraavasti

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \approx f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\nabla f(\mathbf{x}) \tag{3.27}$$

Esimerkki 3.2.4 Olkoon $f(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = x_1^2 + 2x_1 + x_1x_2 + x_2^2$ ja $\mathbf{x} = (1; 1)^{\mathrm{T}}$ ja $\mathbf{u} = (0.01; 0.02)^{\mathrm{T}}$. Silloin

$$f\begin{pmatrix} 1.01 \\ 1.02 \end{pmatrix} = f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \approx f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\nabla f(\mathbf{x}) \tag{3.28}$$

$$= f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$= 5 + (1.01;\ 1.02)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

$$= 5.11 \tag{3.31}$$

///

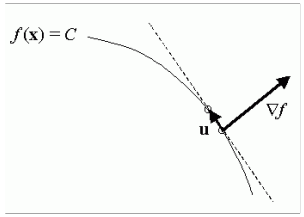


Figure 3.9: Gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan.

Toinen yhtä tärkeä gradientin ominaisuus nähdään, kun valitaan kaksi pistettä $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}$ ja $\mathbf{p}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ siten, että pisteet ovat lähellä toisiaan ja *samalla tasa-arvokäyrällä*. Silloin

$$0 = df = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\nabla f = \langle \mathbf{u} \mid \nabla f \rangle \qquad \Rightarrow \mathbf{u} \perp \nabla f \tag{3.32}$$

Muistisääntö:

Gradienttivektori on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan.

∇f osoittaa ylämäen.

Lause 3.2.1 Jos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on sileä funktio ja $\mathbf{x}^\star$ on sen lokaali ääriarvokohta, niin on välttämättä

$$\begin{cases} f_{x_1}(\mathbf{x}^\star) = 0 \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^\star) = 0 \end{cases} \qquad \text{eli} \quad \nabla f(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$$

Todistus. Jos $f_{x_1}(\mathbf{x}^\star) \neq 0$, niin valitaa $\mathbf{u} = \varepsilon(1; 0)^{\mathrm{T}}$. Silloin

$$df = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\nabla f(\mathbf{x}^\star) = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix} = \varepsilon f_{x_1} \neq 0 \tag{3.33}$$

Siirtymällä nyt vaakasuoraa viivaa pitkin oikealle tai vasemmalle löytyy parempi piste, joten $\mathbf{x}^\star$ ei ole optimikohta.
Tapaus $f_{x_2}(\mathbf{x}^\star) \neq 0$: Mutatis mutandis.

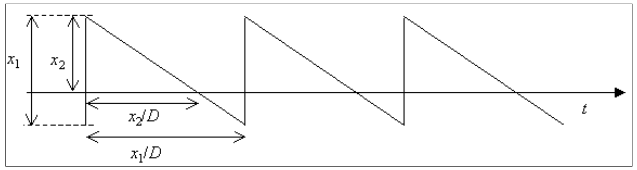
Tiivistämme lauseen mahdollisimman tiiviiksi muistisäännöksi.

Välttämätön ehto:

Jos $\mathbf{x}^\star$ on lokaali maksimi- tai minimikohta, **niin** $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$

Vain välttämättömän ehdon toteuttava piste voi olla ääriarvokohta. Jos välttämättömän ehdon toteuttavia pisteita on vain muutama, niin niistä voidaan suoralla f:n arvon laskulla valita paras.

Esimerkki 3.2.5 Tarkastellaan varastomallia, jossa varaston kautta toimitetaan tuotteita asiakkaille. Asiakkaiden kysyntä on D tuotetta vuodessa. Tuotteet tuodaan varastoon x_1 tuotteen erissä. Jos asiakas ei saa haluamaansa tuotetta, niin asiakas jää odottamaan. Kun seuraava täydennyserä saapuu, toimitetaan ensin odottavien asiakkaiden tarve ja loput sijoitetaan varastoon. Tilaukset ajoitetaan siten, että varaston maksimikoko on x_2. Jos kysyntä on tasaista, niin varaston koko ajan funktiona on seuraavan kuvan mukainen.



Keskimääräinen varaston koko on $x_2^2/(2x_1)$. Keskimääräinen puutteen määrä on $(x_1 - x_2)^2/(2x_1)$. Ja tilauksia tehtdään D/x_1 (per vuosi). Kustannukset ovat:

- varaston ylläpitokustannus h (/tuote/vuosi),
- puutekustannus s (/tuote/vuosi),
- tilauskustannus K (/tilaus)

Vuotuinen kokonaiskustannus on nyt

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_2^2 h}{2x_1} + \frac{(x_1 - x_2)^2 s}{2x_1} + \frac{KD}{x_1} \tag{3.34}$$

$$\Rightarrow \nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} s/2 + (s+h)x_2^2/(2x_1^2) - KD/x_1^2 \\ (s+h)x_2/x_1 - s \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Haluamme nyt määrittää päätösmuuttujien x_1 ja x_2 optimiarvot, joilla f saa minimiarvonsa. Välttämätön ehto on

$$\nabla\mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} s/2 - (s+h)x_2^2/(2x_1^2) - KD/x_1^2 = 0 \\ (s+h)x_2/x_1 - s = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^\star = \sqrt{2KD(s+h)/(sh)} \\ x_2^\star = \sqrt{2KDs/((s+h)h)} \end{cases} \tag{3.37}$$

Löytyi siis yksi piste, joka toteuttaa välttämättömän ehdon. ///

3.2.2 Hessin matriisi, riittävä ehto

Määritelmä 3.2.5 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sileä funktio. Funktion f *Hessin matriisi* (Hessian) pisteessä $\mathbf{p}$ on

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \left(\begin{matrix} \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2^2} \end{matrix} \right)\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} = \left(\begin{matrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{matrix} \right)\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}}$$

Esimerkki 3.2.6 Jos $f(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = x_1^3 + 2x_1^2 - 3x_1x_2^2$, niin

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 4x_1 - 3x_2^2 \\ -6x_1x_2 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

$$f_{x_1x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1^2 + 4x_1 - 3x_2^2) = 6x_1 + 4 \tag{3.39}$$

$$f_{x_1x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1^2 + 4x_1 - 3x_2^2) = -6x_2 \tag{3.40}$$

$$f_{x_2x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(-6x_1x_2) = -6x_2 \tag{3.41}$$

$$f_{x_2x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(-6x_1x_2) = -6x_1 \tag{3.42}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Jos nyt halutaan tietää gradienttivektori ja Hessin matriisi tietyssä pisteessä $\mathbf{p}$, niin sijoitetaan $\mathbf{p}$:n koordinaatit $\mathbf{x}$:n koordinaattien paikalle kaavoihin (3.38) ja (3.43). Esimerkiksi

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 \\ -6 \cdot 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 4 & -6 \cdot 2 \\ -6 \cdot 2 & -6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

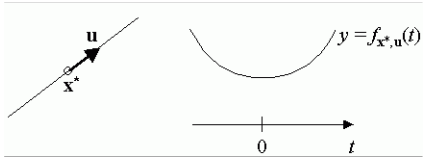
///

Lause 3.2.2 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sileä funktio ja $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^2$.

(1) Jos $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$ ja Hessin matriisi pisteessä $\mathbf{x}^\star$ on positiivisesti definiitti, niin $\mathbf{x}^\star$ on lokaali minimikohta.

(2) Jos $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$ ja Hessin matriisi pisteessä $\mathbf{x}^\star$ on negatiivisesti definiitti, niin $\mathbf{x}^\star$ on lokaali maksimikohta.

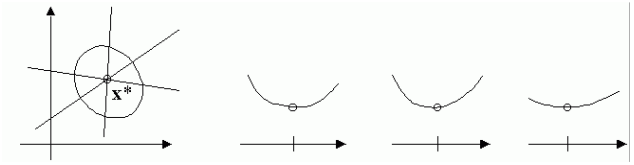
Todistus. (1) Olkoon $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ mikä tahansa suuntavektori. Tarkastellaan funktiota viivalla, joka kulkee pisteen $\mathbf{x}^\star$ kautta ja on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen. Tutkitaan funktion arvoja tällä viivalla.



Funktiolle $g(t)$, joka antaa funktion arvot viivalla, pätee

$$g'(0) = f'_{\mathbf{x}^\star,\mathbf{u}}(t) \overset{(3.17)}{=} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\nabla f = 0 \tag{3.46}$$

$$g''(0) = f''_{\mathbf{x}^\star,\mathbf{u}}(t) \overset{(3.21)}{=} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{u} > 0 \tag{3.47}$$



Koska (3.46) ja (3.47) ovat voimassa kaikilla $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, on $\mathbf{x}^\star$ lokaali minimikohta.

(2) Mutatis mutandis.
Tiivistetään tämäkin lause mahdollisimman tiiviiksi muistisännöksi. □

Riittävä ehto minimille:

Jos $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$ ja $\mathbf{H}(\mathbf{x}^\star)$ on positiivisesti definiitti, **niin** $\mathbf{x}^\star$ on lokaali minimikohta.

Esimerkki 3.2.7 Tarkastellaan uudelleen esimerkin 3.2.5 varastomallia, jossa varaston kautta toimitetaan tuotteita asiakkaille. Vuotuinen kokonaiskustannus on nyt

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_2^2 h}{2x_1} + \frac{(x_1 - x_2)^2 s}{2x_1} + \frac{KD}{x_1} \tag{3.48}$$

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = s/2 + (s+h)x_2^2/(2x_1^2) - KD/x_1^2 \tag{3.49}$$

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = (s+h)x_2/x_1 - s \tag{3.50}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \begin{pmatrix} ((s+h)x_2^2 + 2KD)/x_1^3 & -(s+h)x_2/x_1^2 \\ -(s+h)x_2/x_1^2 & (s+h)/x_1 \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Esimerkissä 3.2.5 löydettiin yksi piste $\mathbf{x}^\star$, joka toteutti välttämättömän ehdon. Koska päätösmuuttujat x_1 ja x_2 sekä parametrit K, D, h, s kaikki saavat positiiviset arvot, voimme päätellä

$$h_{11} = ((s+h)x_2^2 + 2KD)/x_1^3 > 0 \text{ ja} \tag{3.52}$$

$$|H_2| = |H| = 2(s+h)KD/x_1^4 > 0 \tag{3.53}$$

joten $\mathbf{H}$ on positiivisesti definiitti ja piste $\mathbf{x}^\star$ toteuttaa riittävän ehdon minimille. ///

3.2.3 Optimin etsiminen numeerisesti

Välttämätön ehto johtaa epälineaariseen yhtälöryhmään, jonka ratkaiseminen on usein liian työlästä. Silloin voidaan menetellä seuraavasti. (Taas käymme läpi perustelut kahden muuttujan tapauksessa, mutta johtopäätökset on helppo yleistää.)

Olkoon päätösmuuttujien alkuarvovektori $\xi_0 = (x_0, y_0)^{\mathrm{T}}$. Jos seuraava likiarvo on $\xi_1 = (x_1, y_1)^{\mathrm{T}}$ ja merkitsemme

$$\mathbf{u}_1 = \xi_1 - \xi_0 = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

niin kokonaisdifferentiaalin mukaan vastaavien funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ arvojen erotus on

$$f(\xi_1) - f(\xi_0) = f_x(\xi_0)dx + f_y(\xi_0)dy + f_z(\xi_0)dz = \mathbf{u}_1^{\mathrm{T}}\nabla f$$

Olkoon $h > 0$. Jos nyt valitsemme $\mathbf{u}_1 = h\nabla f$, niin

$$f(\xi_1) - f(\xi_0) = h(\nabla f)^\top \nabla f \geq 0$$

Jos vastaavasti valitsemme $\mathbf{u}_1 = -h\nabla f$, niin

$$f(\xi_1) - f(\xi_0) = -h(\nabla f)^{\mathrm{T}}\nabla f \leq 0$$

Siis:

Etsittäessä maksimia otetaan askelia gradientin suuntaan.

Etsittäessä minimiä otetaan askelia gradientin vastavektorin suuntaan.

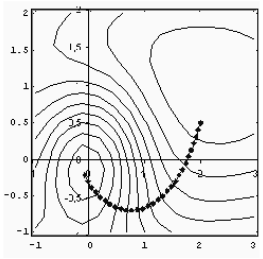


Figure 3.10: Esimerkin 3.2.8 numeerinen ääriarvon määritys. Alkuarvot $x_0 = 2$ ja $y_0 = 0.5$.

Karkea algoritmi maksimin etsimiseksi on seuraava:

- Valitse alkuarvo ξ_0 ja parametrit $h > 0$, $\varepsilon > 0$.
- Toista kunnes $\|\xi_{k+1} - \xi_k\| < \varepsilon$

  $\xi_{k+1} = \xi_k + h\nabla f(\xi_k)$

Ongelmaksi muodostuu joskus se, että epälineaarisen funktion osittaisderivaatat saattavat saada itseisarvoltaan melko suuria arvoja, jolloin gradienttivektori on pitkä. Edellä kuvattu rekursio "karkaa helposti käsistä." Eräs mahdollisuus on korjata algoritmi muotoon

- Valitse alkuarvo ξ_0 ja parametrit $h > 0$, $\varepsilon > 0$.
- Toista kunnes $\|\nabla f(\xi_{k+1})\| < \varepsilon$

$$\xi_{k+1} = \xi_k + h\nabla f^0(\xi_k) = \xi_k + h\frac{\nabla f(\xi_k)}{\|\nabla f(\xi_k)\|}$$

Kolmas versio samasta naivista ideasta on

- Valitse alkuarvo ξ_0 ja parametrit $h > 0$, $\varepsilon > 0$.
- Toista kunnes $h < \varepsilon$

  $\mathbf{u}_{k+1} = \nabla f(\xi_k)$
  $\xi_{k+1} = \xi_k + h\mathbf{u}^0_{k+1}$
  jos $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}_{k+1}\mathbf{u}_k < 0$, niin pienennä h:ta

Kun numeerinen optimin etsintä tehdään oikeaoppisesti, suoritetaan niin sanottu "viivahaku". Tämä menettely käsitellään optimoinnin jatkokurssilla. Edellä esitellyt algoritmit ovat hyödyllisiä siksi, että ne on helppo toteuttaa vaikkapa excelillä.

Esimerkki 3.2.8 Tarkastellaan uudelleen esimerkin 3.2.1 funktiota $f(x, y) = 30e^{-(x^2+y^2)} + x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 8$. Määritämme funktion lokaalin maksimikohdan. Valitaan

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad h = 0.1$$

Rekursio yhtälö on

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -60x_k e^{-(x_k^2+y_k^2)} + 2x_k - 4 \\ -60y_k e^{-(x_k^2+y_k^2)} + 8y_k - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_k e^{-(x_k^2+y_k^2)} + 1.2x_k - 0.4 \\ -6y_k e^{-(x_k^2+y_k^2)} + 1.8y_k - 0.8 \end{pmatrix}$$

ja excelin antama likiarvopisteiden jono tasossa lähestyy pienellä h:n arvolla pistettä

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.07117 \\ -0.15936 \end{pmatrix}$$

///

3.2.4 Esimerkkejä

Esimerkki 3.2.9 Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B. Valmistusmäärät ovat x_1 ja x_2. Kysyntä- ja kustannus-funktiot ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 12 - 0.02x_1 - 0.01x_2 && (3.54)\\ p_2 &= 50 - 0.1x_2 && (3.55)\\ C &= 5x_1 + 7x_2 + 0.01x_1^2 + 0.02x_2^2 + 0.005x_1x_2 && (3.56) \end{aligned}$$

Voittofunktio on silloin

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (p_1x_1) + (p_2x_2) - C && (3.57)\\ &= (12x_1 - 0.02x_1^2 - 0.01x_1x_2) + (50x_2 - 0.1x_2^2) && (3.58)\\ &\quad - (5x_1 + 7x_2 + 0.01x_1^2 + 0.02x_2^2 + 0.005x_1x_2)\\ &= 7x_1 + 43x_2 - 0.03x_1^2 - 0.015x_1x_2 - 0.12x_2^2 && (3.59) \end{aligned}$$

Voittofuktion lauseke on nyt jaettavissa lineaariseen osaan ja neliömuotoon. Voiton maksimointi tarkoittaa nyt globaalin maksimin löytämistä P:lle. Nyt välttämätön ehto on

$$\begin{cases} P_{x_1} = 0 \\ P_{x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 0.06x_1 - 0.015x_2 = 0 \\ 43 - 0.015x_1 - 0.24x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 73.0 \\ x_2 \approx 174.6 \end{cases} \qquad (3.60)$$

Tutkimme vielä Hessin matriisin definiittisyyden

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} P_{x_1x_1} & P_{x_1x_2} \\ P_{x_2x_1} & P_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.06 & -0.015 \\ -0.015 & -0.24 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

$$|D_1| = h_{11} = -0.06 < 0 \tag{3.62}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -0.06 & -0.015 \\ -0.015 & -0.24 \end{vmatrix} = 0.0142 > 0 \tag{3.63}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{H}$ on negatiivisesti definiitti

$\Rightarrow$ löydetty piste on maksimikohta.

///

3.3 Monen muuttujan tapaus ilman rajoitteita

Edellisissä kappaleissa johdetut tulokset ovat sellaisinaan yleistettävissä useamman muuttujan tapauksiin. Teemme yhteenvedon

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sileä funktio. Sen gradientti on

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

Hessin matriisi on

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

Ääriarvokohtien määritelmät ja välttämätön sekä riittävä ehto ääriarvolle saavat nyt täsmälleen samat muodot, kuin kahden muuttujan tapauksessa.

Välttämätön ehto:

Jos $\mathbf{x}^\star$ on lokaali maksimi- tai minimikohta, **niin** $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$

Riittävä ehto minimille:

Jos $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$ ja $\mathbf{H}(\mathbf{x}^\star)$ on positiivisesti definiitti, **niin** $\mathbf{x}^\star$ on lokaali minimikohta.

Riittävä ehto maksimille:

Jos $\nabla f(\mathbf{x}^\star) = 0$ ja $\mathbf{H}(\mathbf{x}^\star)$ on negatiivisesti definiitti, **niin** $\mathbf{x}^\star$ on lokaali maksimikohta.

Esimerkki 3.3.1 Hintadifferointi. Yritys valmistaa tuotetta ja myy sitä kolmella eri markkinoilla (Eurooppa, Aasia, Afrikka). Eri markkinoilla on eri kysyntäfunktiot, joten hinnat eroavat markkinoiden välillä. Yritys myy tuotteita vuosittain Eurooppaan x_1 kpl, Aasiaan x_2 kpl ja Afrikkaan x_3 kpl. Vastaavat kysyntäfunktiot ovat

$$p_1 = a_1 - b_1x_1, \tag{3.66}$$

$$p_2 = a_2 - b_2x_2, \tag{3.67}$$

$$p_3 = a_3 - b_3x_3. \tag{3.68}$$

Kustannusfunktio on "normaali"

$$C(x) = C(x_1 + x_2 + x_3), \;\; C' > 0, \;\; C'' > 0. \tag{3.69}$$

Voittofunktio on

$$\begin{aligned} & P(x_1, x_2, x_3) \\ = \;& p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 - C(x_1 + x_2 + x_3) \\ = \;& a_1x_1 - b_1x_1^2 + a_2x_2 - b_2x_2^2 + a_3x_3 - b_3x_3^2 - C(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned} \tag{3.70}$$

Gradientti ja Hessin matriisi ovat

$$\nabla P = \begin{pmatrix} a_1 - 2b_1x_1 - C'(x_1 + x_2 + x_3) \\ a_2 - 2b_2x_2 - C'(x_1 + x_2 + x_3) \\ a_3 - 2b_3x_3 - C'(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2b_1 - C'' & -C'' & -C'' \\ -C'' & -2b_2 - C'' & -C'' \\ -C'' & -C'' & -2b_3 - C'' \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Välttämätön ehto $\nabla P = \mathbf{0}$ voidaan nyt tulkita siten, että jokaisella markkina-alueella ($i = 1, 2, 3$) tulee alueen rajatuoton $MR_i = d(p_ix_i)/dx_i$ olla yhtä suuri kuin tuotantolaitoksen rajakustannus $MC = dC(x)/dx$, missä $x = x_1 + x_2 + x_3$.

Tarkistamme vielä Hessin matriisin definiittisyyden.

$$|D_1| = h_{11} = -2b_1 - C'' < 0 \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} |D_2| &= \begin{vmatrix} -2b_1 - C'' & -C'' \\ -C'' & -2b_2 - C'' \end{vmatrix} \\ &= 4b_1b_2 + 2(b_1 + b_2)C'' > 0 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} |D_3| &= \begin{vmatrix} -2b_1 - C'' & -C'' & -C'' \\ -C'' & -2b_2 - C'' & -C'' \\ -C'' & -C'' & -2b_3 - C'' \end{vmatrix} \\ &= -8b_1b_2b_3 - 4C''(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) < 0 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Hessin matriisi on negatiivisesti definiitti, joten välttämättömän ehdon toteuttava ratkaisu maksimoi voittofunktion. ///

3.4 Rajoitteellinen optimointi, yhtälörajoite

Tässä luvussa rajoitumme tutkimaan optimointiongelmia, jotka ovat muotoa

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdoin} & h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Oletamme siis, että

1. ongelma on minimointiongelma,
2. lisäksi oletamme, että kaikki funktiot (f, h_j) voidaan derivoida jatkuvasti niin monta kertaa kuin kulloinkin haluamme.

Oletus 1 saadaan aina järjestettyä, mutta sileysvaatimus 2 ei ole aina järjestettävissä. Sivuutamme nyt tämän ongelman. Rajoittuminen minimointiongelmaan saattaa tuntua oudolta, mutta valitsemamme kaavamaisuus helpottaa asioiden esittämistä ja myös asioiden omaksumista. Jos sovellustehtävässä kohtaamme maksimointitehtävän, voimme aina muuntaa sen laskuja varten seuraavasti

ALKUPERÄINEN MUUNNETTU

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdoin} & h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \min & -f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdoin} & h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, m \end{array} \right.$$

3.4.1 Sijoituskeino

Jos optimointitehtävässä on yhtälörajoite, ja jokin muuttuja voidaan ratkaista rajoiteyhtälöstä, niin sijoitetaan saatu lauseke muuttujan paikalle funktioon ja muihin rajoitteisiin.

Esimerkki 3.4.1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. \tag{3.76}$$

Rajoitteesta voimme ratkaista

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 \tag{3.77}$$

jolloin optimointitehtävä menee muotoon

$$\text{Min } \tilde{f}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2 + 1 \tag{3.78}$$

Välttämätön ehto optimille antaa

$$\nabla \tilde{f} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

Tällä yhtälöllä ei selvästi ole ratkaisua, joten alkuperäisellä ongelmalla ei ole ääriarvokohtaa. ///

Esimerkki 3.4.2

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = -x_1x_2 \\ \text{ehdolla} & 2x_1 + 5x_2 = 10 \end{array} \tag{3.80}$$

Rajoitteesta saamme ratkaistua toisen muuttujan ensimmäisen avulla, $x_2 = 2 - 0.4x_1$. Silloin optimointitehtävä menee muotoon

$$\min \quad \tilde{f}(x_1) = -2x_1 + 0.4x_1^2 \tag{3.81}$$

Derivaatan nollakohdasta ja rajoitteesta saamme optimiarvot

$$\tilde{f}'(x_1) = -2 + 0.8x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1^\star = 2.5 \tag{3.82}$$

$$\tilde{f}''(x_1) = 0.8 > 0 \quad \Rightarrow x_1^\star \text{ on minimikohta} \tag{3.83}$$

$$x_2^\star = 2 - 0.4x_1^\star = 1.0 \tag{3.84}$$

Siis optimointitehtävän ratkaisu on

$$\mathbf{x}^\star = \begin{pmatrix} x_1^\star \\ x_2^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} \text{ ja } f^\star = -2.5 \cdot 1.0 = -2.5 \tag{3.85}$$

///

Esimerkki 3.4.3 Väärä ratkaisuyritys. Sijoituskeino ei aina ole helppo ratkaisu. Esimerkiksi ongelma

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & 2x_1+x_2+x_3^2\\ \text{st} & x_1^2+x_2^2+x_3\le 10\\ & x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{array}\right. \tag{3.86}$$

on hankala. Yhtälörajoitteen käsittely vaatii huolellisuutta. Tarjolla oleva "helpon tuntuinen" temppu

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & 2x_1+x_2+x_3^2\\ \text{st} & x_1^2+x_2^2+x_3\le 10\\ & x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{array}\right. \stackrel{x_1^2+x_2^2=1-x_3^2}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & 2x_1+x_2+x_3^2\\ \text{st} & -x_3^2+x_3\le 9\end{array}\right. \tag{3.87}$$

on virheellinen. "Yksinkertaistetussa" optimointitehtävässä ei muuttujien x_1 ja x_2 arvoja enää rajoiteta millää ehdolla, vaikka alkuperäisessä tehtävässä $x_1^2+x_2^2\le 1$. Yksinkertaistetun optimointitehtävän tavoitefunktion arvo saadaan siis miten pieneksi tai miten suureksi tahansa, koska x_1:lle ja x_2:lle voidaan antaa mitä tahansa arvoja! ///

Esimerkki 3.4.4 Oikea ratkaisu. Ratkaistaan edellinen ongelma oikein.

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & 2x_1+x_2+x_3^2\\ \text{st} & x_1^2+x_2^2+x_3\le 10\\ & x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & 2x_1+x_2+x_3^2\\ \text{st} & x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{array}\right. \tag{3.88}$$

sillä ensimmäinen rajoite on voimassa aina kun toinen on voimassa. Voimme nyt ratkaista rajoitteesta x_3^2:n ja sijoittaa sen malliin

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & f(x_1,x_2)=2x_1+x_2+1-x_1^2-x_2^2\\ \text{st} & x_1^2+x_2^2\le 1\end{array}\right. \tag{3.89}$$

Välttämättömän ehdon toteuttava piste

$$\nabla f=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix} \tag{3.90}$$

ei toteuta (3.89):n ehtoa! Optimipisteen on siis oltava käyvän alueen reunapiste, jossa $x_1^2+x_2^2=1$ eli $x_2=\pm\sqrt{1-x_1^2}$. Lopulta saamme x_1:n optimiarvon määräämiseksi tehtävän

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & \tilde f(x_1)=2x_1-\sqrt{1-x_1^2}\\ \text{st} & -1\le x_1\le 1\end{array}\right. \tag{3.91}$$

Tämä on "lukio-tason" ongelma, jolle

$$\tilde f'(x_1) = 2+\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}=0 \quad\Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{3.92}$$

$$\tilde f(-1) = -2 \tag{3.93}$$

$$\tilde f(-2/\sqrt{5}) = -\sqrt{5} \quad\leftarrow \text{ pienin} \tag{3.94}$$

$$\tilde f(+1) = +2 \tag{3.95}$$

Purkamalla tehdyt sijoitukset saamme

$$x_1^\star = -\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{3.96}$$

$$x_2^\star = -\sqrt{1-x_1^{\star 2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{3.97}$$

$$x_3^\star = \pm\sqrt{1-x_1{}^{\star 2}-x_2{}^{\star 2}}=0 \tag{3.98}$$

///

Saatujen ratkaisujen mielekkyys kannattaa aina tarkistaa alkuperäisten rajoitteiden avulla. Sijoituskeinoa parempi menetelmä on Lagrangen kertojat, jotka esitellään seuraavassa.

3.4.2 Lagrangen kertojat, yhtälörajoite

Lähestymme päätulosta useassa vaiheessa ja aloitamme melko yksinkertaisesta ongelmasta.

Tapaus: yksi yhtälörajoite

Tarkastellaan ensin perusongelmaa, jossa on yksi yhtälörajoite

$$\begin{array}{ll}\min & f(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top\\ \text{st} & h(\mathbf{x})=0\end{array}$$

(Huomaa: Vaikka yhtälörajoite tasossa merkitsee sitä, että käypä alue rajoittuu jonkin käyrän pisteiksi, niin useamman päätösmuuttujan tilanteessa ($n\ge 3$) käypä alue ei ole käyrän osa vaan sillä on vapausasteita enemmän kuin yksi.)

Olkoon $\mathbf{x}^\star=(x_1^\star,x_2^\star,\ldots,x_n^\star)^\top$ optimipiste ja olkoon differentiaali $d\mathbf{x}=(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n)^\top$ sellainen, että

$$\mathbf{x}^\star+d\mathbf{x}\in K\Leftrightarrow h(\mathbf{x}^\star+d\mathbf{x})=0$$

Silloin koska $\mathbf{x}^\star$ on optimipiste, niin

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=0 \tag{3.99}$$

ja koska $\mathbf{x}^\star+d\mathbf{x}\in K$, niin

$$dh=\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial h}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial h}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{3.100}$$

Toisin sanoen

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}^\star)^\top d\mathbf{x} = 0 \text{ ja } \nabla h(\mathbf{x}^\star)^\top d\mathbf{x} = 0}$$

Yhtälön (3.100) takia differentiaalia $d\mathbf{x}$ ei voi valita miten tahansa. Oletamme, nyt että optimipisteessä

$$\frac{\partial h}{\partial x_n} \neq 0 \tag{3.101}$$

(Tarvittaessa vaihdetaan muuttujien järjestystä.)
Differentiaalin $d\mathbf{x}$ komponentit $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$ voidaan nyt valita vapaasti.

$$\left.\begin{array}{l} h\text{:n sileys} \\ \text{ehto (3.101)} \end{array}\right\} \Rightarrow dx_n \text{ voidaan ratkaista ehdosta (3.100)}$$

Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Ehdoista (3.99) ja (3.100) seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \tag{3.102}$$

Valitaan λ siten, että

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_n} = 0 \tag{3.103}$$

Siis yhtälö (3.102) voidaan kirjoittaa

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \tag{3.104}$$

Koska $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ voidaan valita vapaasti, voi yhtälö (3.104) olla tosi vain ehdolla

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.105}$$

Saadut $n+1$ yhtälöä ($h(\mathbf{x}) = 0$, (3.103),(3.105)) muodostavat ryhmän, josta ratkaistaan $n+1$ tuntematonta

$$x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_n^\star, \lambda^\star$$

Määritelmä 3.4.1 On tapana määritellä *Lagrangen funktio* (engl. Lagrangian)

$$L = f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$$

Lause 3.4.1 Jos optimointitehtävällä

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & h(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right.$$

on minimipiste $\mathbf{x}^\star$, niin on olemassa $\lambda^\star \in \mathbb{R}$ siten, että pisteessä $(\mathbf{x}^\star, \lambda^\star)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \dfrac{\partial h}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = & h(\mathbf{x}^\star) = 0 \end{array}$$

(eli $\nabla L = \mathbf{0}$)

Huomaa, että tämä on välttämätön mutta ei riittävä ehto. Yleensä saadaan monta ehdokasta, joista yksi on optimi.

Esimerkki 3.4.5

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st.} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Lagrangen funktio on

$$L = 2x_1 + x_2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Välttämätön ehto optimille on

$$\nabla L = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 + 2\lambda x_1 & = & 0 \\ 1 + 2\lambda x_2 & = & 0 \\ 2x_3 + 2\lambda x_3 & = & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Kolmannen yhtälön perusteella joko $x_3 = 0$ tai $\lambda = -1$.

Tapaus $x_3 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 2 + 2\lambda x_1 & = & 0 & (1) \\ 1 + 2\lambda x_2 & = & 0 & (2) \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 & = & 0 & (3) \end{array} \right. \quad (1)\&(2) \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -\lambda^{-1} = 2x_2 \ (4) \\ (3)\&(4) \Rightarrow x_2 = \pm 1/\sqrt{5} \end{array}$$

Saamme kaksi välttämättömät ehdot toteuttavaa pistettä
ehdokas #1:

$$\mathbf{x}_{\#1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{\#1} = -\sqrt{5}/2, \quad f(\mathbf{x}_{\#1}) = 5/\sqrt{5}$$

ehdokas #2:

$$\mathbf{x}_{\#2} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{\#2} = \sqrt{5}/2, \;\; f(\mathbf{x}_{\#2}) = -5/\sqrt{(5)}$$

Tapaus $\lambda = -1$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 2 - 2x_1 & = & 0 & \rightarrow x_1 = 1 \\ 1 - 2x_2 & = & 0 & \rightarrow x_2 = 1/2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 & = & 0 & \rightarrow x_3^2 = -1/2 \text{ (mahdotonta!)} \end{array} \right.$$

Paras ehdokas on #2 eli

$$\mathbf{x}^\star = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda^\star = \sqrt{5}/2, f(\mathbf{x}^\star) = -\sqrt{5} \qquad (3.106)$$

Tapaus: monta yhtälörajoitetta

Vastaavalla tavalla kuin edellä voidaan perustella seuraava lause

Lause 3.4.2 Jos optimointitehtävällä

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & h_j(\mathbf{x}) = 0, \;\; j = 1, \ldots, m \end{array} \right.$$

on minimipiste $\mathbf{x}^\star$, niin on olemassa reaaliluvut $\lambda_j^\star, j = 1, \ldots, m$ siten, että pisteessä $(\mathbf{x}^\star, \lambda^\star)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= h_j(\mathbf{x}^\star) = 0, \;\; j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

(eli $\nabla L = \mathbf{0}$)

Huomaa, että tämä on välttämätön mutta ei riittävä ehto. Yleensä saadaan monta ehdokasta, joista yksi on optimi.

Esimerkki 3.4.6

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st.} & x_1^2 + x_3^2 - 10 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Lagrangen funktio on

$$L = 2x_1 + x_2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_3^2 - 10) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Välttämätön ehto optimille on

$$\nabla L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 2x_3 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 & = & 0 \\ x_1^2 + x_3^2 - 10 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Toinen yhtälö $\rightarrow \lambda_2 = -1 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 x_1 & = & -1 & \rightarrow x_1 = -1/(2\lambda_1) \\ (1 + \lambda_1)x_3 & = & 1/2 & \rightarrow x_3 = 1/(2 + 2\lambda_1) \\ x_1^2 + x_3^2 & = & 10 & \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 & \end{array} \right.$$

Kun sijoitetaan x_1 ja x_3 kolmanteen yhtälöön ja tehdään muuttujan vaihto $\lambda_1 = u - 1/2$, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{4(1+\lambda_1)^2} &= 10 \\ \Leftrightarrow (1+\lambda_1)^2 + \lambda_1^2 &= 40\lambda_1^2(1+\lambda_1)^2 \\ \Leftrightarrow (u+1/2)^2 + (u-1/2)^2 &= 40(u-1/2)^2(u+1/2)^2 \\ \Leftrightarrow 2u^2 + 1/2 &= 40(u^2 - 1/4)^2 \\ \Leftrightarrow 40u^4 - 22u^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{11 \pm \sqrt{41}}{40}} \end{aligned}$$

Saamme neljä ehdokasta minimipisteeksi

λ_1	x_1	x_3	x_2	$f(\mathbf{x})$
0.1596	-3.1327	0.4312	3.7016	-2.3780
-0.1610	3.1056	0.5959	-2.7016	3.8648
-1.1596	0.4312	-3.1327	3.7016	14.3780
-0.8390	0.5959	3.1056	-2.7016	8.1352

Paras ehdokas on ensimmäinen, joten minimi on

$$\mathbf{x}^\star = \begin{pmatrix} -3.1327 \\ 3.7016 \\ 0.4312 \end{pmatrix}, \;\; \lambda^\star = \begin{pmatrix} 0.1596 \\ -1.0000 \end{pmatrix}, \;\; f(\mathbf{x}^\star) = -2.3780$$

3.4.3 Resurssirajoite, resurssin varjohinta

ma3d3.tex

Tutkitaan aluksi yleistä ongelmaa

$$\begin{cases} \min & z = f(\mathbf{x}, p) \\ \text{st.} & h_j(\mathbf{x}, p) = 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

missä $p \in \mathbb{R}$ on mallin reaaliarvoinen parametri.

Kun parametrin arvo muuttuu hieman, muuttuu myös optimikohta ja tavoitefunktion optimiarvo.

$$p \to p + \Delta p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}^\star \to \mathbf{x}^\star + \Delta \mathbf{x}^\star \\ z^\star \to z^\star + \Delta z^\star \end{cases}$$

Raja-arvo

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta \mathbf{z}^\star}{\Delta p} = \frac{dz^\star}{dp} \in \mathbb{R}$$

on reaaliluku ja raja-arvo

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}^\star}{\Delta p} = \frac{d\mathbf{x}^\star}{dp} = \begin{pmatrix} dx_1^\star/dp \\ \vdots \\ dx_n^\star/dp \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

on vektori.

Kokonaisdifferentiaalin mukaan optimipisteessä

$$\begin{aligned} \frac{dz^\star}{dp} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1^\star}{dp} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2^\star}{dp} + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n^\star}{dp} + \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \nabla \mathbf{f}^\top \frac{d\mathbf{x}^\star}{dp} + \frac{\partial f}{\partial p} \end{aligned} \tag{3.107}$$

Vastaavasti

$$\lambda_j \frac{dh_j}{dp} = \lambda_j \nabla \mathbf{h}_j^\top \frac{d\mathbf{x}^\star}{dp} + \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial p} = 0, \quad j = 1, \ldots m \tag{3.108}$$

Optimipisteessä pätee edellisen kappaleen mukaan

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{x}} \left(f + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j \right) &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \nabla \mathbf{f} = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla \mathbf{h}_j & \end{aligned} \tag{3.109}$$

Yhdistämällä kaavat (3.107), (3.109) ja (3.108) saadaan tavoitefunktion optimiarvon muutosherkkyys

$$\frac{df(\mathbf{x}^\star, p)}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial p} \tag{3.110}$$

3.4.4 Resurssin varjohinta

Tarkastellaan erityisesti resurssia parametrina.

$$\begin{cases} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st.} & \tilde{h}_j(\mathbf{x}) = \beta_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st.} & h_j(\mathbf{x}) = \tilde{h}_j(\mathbf{x}) - \beta_j = 0 \end{cases}$$

Kaavan (3.110) avulla saamme resurssin β_k varjohinnan.

$$\frac{dz^\star}{d\beta_k} = \frac{\partial f}{\partial \beta_k} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial \beta_k} = -\lambda_k$$

Siis

λ_j on resurssin j varjohinta

Esimerkki 3.4.7 Tarkastellaan uudelleen esimerkin 3.4.7 ongelmaa.

$$\begin{array}{ll} \min & z = f(x_1, x_2) = -x_1 x_2 \\ \text{ehdolla} & 2x_1 + 5x_2 = 10 = \beta \end{array} \tag{3.111}$$

Rajoite on tyypillinen resurssikulutukseen liittyvä ehto. Jos niukkaa resurssia on olemassa 10 yksikköä, niin yrittäjää usein kiinnostaa tietää miten paljon tavoitefunktion arvo paranee, jos niukkaa resurssia saadaan $d\beta$:n verran lisää. Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L = -x_1 x_2 + \lambda(2x_1 + 5x_2 - 10) \tag{3.112}$$

Välttämätön ehto optimille on

$$\nabla L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + 2\lambda = 0 \\ -x_1 + 5\lambda = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 10 = 0 \end{cases}, \tag{3.113}$$

josta ratkaistu optimi on $x_1^\star = 2.5$, $x_2^\star = 1.0$ ja $\lambda^\star = 0.5$, joten

$$\frac{dz^\star}{d\beta} = -0.5 \tag{3.114}$$

///

Esimerkki 3.4.8 Tarkastellaan uudelleen esimerkin yritystä. Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B. Viikottaiset valmistusmäärät ovat x_1 ja x_2. Kysyntä- ja kustannusfunktiot ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 12 - 0.02x_1 - 0.01x_2 && (3.115)\\ p_2 &= 50 - 0.1x_2 && (3.116)\\ C &= 5x_1 + 7x_2 + 0.01x_1^2 + 0.02x_2^2 + 0.005x_1x_2 && (3.117) \end{aligned}$$

Voittofunktio on silloin

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 7x_1 + 43x_2 - 0.03x_1^2 - 0.015x_1x_2 - 0.12x_2^2 \qquad (3.118)$$

Yhden A-tuotteen valmistaminen vaatii 1.5 tuntia työtä ja yhden B-tuotteen valmistaminen vaatii 0.75 tuntia työtä ja viikossa on työresurssia käytettävissä 160 tuntia. Yritys päättää toimia täydellä kapasiteetilla, jolloin

$$1.5x_1 + 0.75x_2 = 160 \qquad (3.119)$$

Voiton maksimointi johtaa nyt rajoitteelliseen optimointitehtävään

$$\begin{cases} \text{Max} & P = 7x_1 + 43x_2 - 0.03x_1^2 - 0.015x_1x_2 - 0.12x_2^2 \\ \text{st.} & 1.5x_1 + 0.75x_2 = 160 \end{cases} \qquad (3.120)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Min} & z = -P = -7x_1 - 43x_2 + 0.03x_1^2 + 0.015x_1x_2 + 0.12x_2^2 \\ \text{st.} & 1.5x_1 + 0.75x_2 = 160 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad L = -P + \lambda(1.5x_1 + 0.75x_2 - 160)$$

Välttämätön ehto saa muodon

$$\nabla L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -7 + 0.06x_1 + 0.015x_2 + 1.50\lambda &=& 0 \\ -43 + 0.015x_1 + 0.24x_2 + 0.75\lambda &=& 0 \\ 1.5x_1 + 0.75x_2 - 160 &=& 0 \end{cases} \qquad (3.121)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1^\star &\approx& 21 \\ x_2^\star &\approx& 171 \\ \lambda^\star &\approx& 2.11 \\ P^\star &\approx& 3900 \end{cases} \qquad (3.122)$$

Varjohinta $\lambda^\star = 2.11$ kertoo miten paljon yhdestä lisätyöresurssista (työtunti) enintään kannattaa maksaa yli normaalin taksan. Kaksi $€$ /tunti on melko pieni varjohinta, joten ainakaan ylityötä tuskin kannattaa teettää. ///

3.5 Rajoitteellinen optimointi, epäyhtälörajoite

Tässä luvussa rajoitumme tutkimaan optimointiongelmia, jotka ovat muotoa

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, n \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Oletamme siis, että

1. ongelma on minimointiongelma,
2. epäyhtälörajoitteet ovat tyyppiä "$\le$" ja
3. lisäksi oletamme, että kaikki funktiot (f, g_i, h_j) voidaan derivoida jatkuvasti niin monta kertaa kuin kulloinkin haluamme.

Oletukset 1 ja 2 saadaan aina järjestettyä, mutta sileysvaatimus 3 ei ole aina järjestettävissä. Sivuutamme nyt tämän ongelman.

3.5.1 Graafinen ratkaisu

Kun $\mathbf{x} = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ voidaan ongelmaa tutkia graafisesti (x, y)-tasossa. Ongelman

$$\begin{cases} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \le 0 \\ & (h_j(\mathbf{x}) = 0) \end{cases}$$

graafisen ratkaisemisen vaiheet voidaan kuvata karkeasti seuraavasti.

(1) Piirrä käypä alue K
(1.1) Kaikilla i: Piirrä käyrä $g_i(x, y) = 0$ ja piirrä käyrän pisteeseen $\mathbf{x}$ pieni nuoli suuntaan $-\nabla g_i$. (*Nuoli osoittaa käyvän puolen.*) (1.3) Piirrä käyrä $h(x, y) = 0$. (1.4) Merkitse kuvaan K

(2) Piirrä kuvaan tasa-arvokäyriä
Muutamalla z:n arvolla: Piirrä käyrä $f(x, y) = z$ ja piirrä käyrälle $-\nabla f$

(3) Tee johtopäätös

Esimerkki 3.5.1 Tutkitaan ongelmaa

$$\begin{cases} \min & 2x + y \\ \text{st} & x^2 - y - 3 \le 0 \\ & -x^2 + y - 3 \le 0 \end{cases}$$

$$g_1(x, y) = x^2 - y - 3 \ \Rightarrow\ -\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ -\nabla g_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

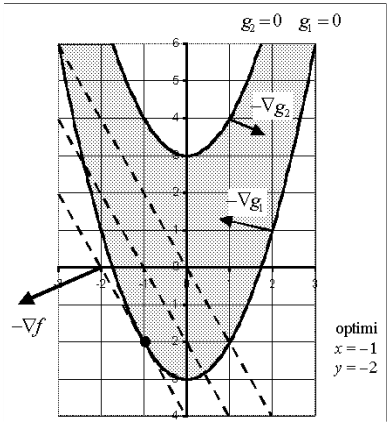


Figure 3.11: Esimerkin 3.5.1 graafinen ratkaisu.

$$g_2(x,y) = -x^2 + y - 3 \;\Rightarrow\; -\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -\nabla g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = 2x + y \;\Rightarrow\; -\nabla f = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kuvasta 3.11 näemme, että optimipiste on paikassa, jossa tavoitesuora sivuaa käyrää $g_1(x,y) = 0$. Siis

$$\begin{array}{rcl} \nabla f & = & -\nabla g_1 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}$$

Esimerkki 3.5.2 Tarkastellaan yritystä, joka toimittaa varastonsa kautta tuotteita asiakkaille. Vuotuinen kysyntä on $D = 1000$ (tuotetta/vuosi), varaston yksikköylläpitokustannus on $h = 9$ (/tuote/vuosi), puutekustannus on $s = 16$ (/tuote/vuosi) ja tilauskustannus on $K = 5$ (/tilaus). Yritys määrittää tilauserän koon x_1 ja maksimivaraston koon x_2 puutteen sallivan varastomallin mukaisesti. Päätösmuuttujien optimiarvoiksi saadaan

$$\begin{array}{rcl} x_1^\star & = & \sqrt{2KD(s+h)/(sh)} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot (16+9)/(16 \cdot 9)} = 500/12 \approx 42 \\ x_2^\star & = & \sqrt{2KDs/((s+h)h)} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot 16/((16+9) \cdot 9)} = 400/15 \approx 27 \end{array}$$

Yrityksen käytettävissä olevaan varastoon mahtuu vain 20 tuotetta. Alkuperäisen optimointimallin

$$\min \qquad f(x_1,x_2) = \frac{x_2^2 h}{2x_1} + \frac{(x_1-x_2)^2 s}{2x_1} + \frac{KD}{x_1}$$

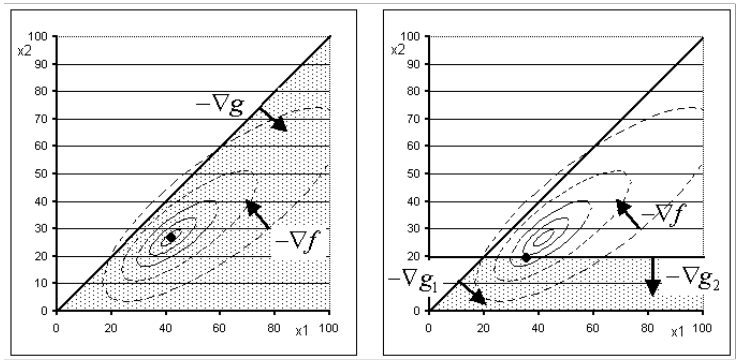


Figure 3.12: Esimerkin 3.5.2 graafinen ratkaisu a) alkuperäinen ja b) lisäehdolla $x_2 \leq 20$.

$$\begin{array}{ll} \text{ehdolla} & x_2 - x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

sijasta on siis ratkaistava rajoitettu versio

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1,x_2) = \dfrac{x_2^2 h}{2x_1} + \dfrac{(x_1-x_2)^2 s}{2x_1} + \dfrac{KD}{x_1} \\ \text{ehdolla} & x_2 - x_1 \leq 0 \\ & x_2 - 20 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Kummankin mallin graafinen tarkastelu on kuvassa (3.12). Kuvasta nähdään, että ratkaisu on $x_2 = 20$ (tasan) ja $x_1 \approx 35$. Asia varmistuu kokeilemalla

$$\begin{array}{rcl} f(34;20) & = & \dfrac{400 \cdot 9}{68} + \dfrac{14^2 \cdot 16}{68} + \dfrac{5000}{34} \approx 246.12 \\ f(35;20) & = & \dfrac{400 \cdot 9}{70} + \dfrac{15^2 \cdot 16}{70} + \dfrac{5000}{35} \approx 245.71 \\ f(36;20) & = & \dfrac{400 \cdot 9}{72} + \dfrac{16^2 \cdot 16}{72} + \dfrac{5000}{36} \approx 245,78 \end{array}$$

3.5.2 Laskeva ja käypä suunta

Kun ratkaistaan numeerisesti optimointitehtävää

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, n \end{array}$$

lähdetään liikkeelle alkuratkaisusta $\mathbf{x}_0$. Parannetaan ratkaisua siirtymällä askelen $\mathbf{d}$ verran uuteen ratkaisuun

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$$

Oletamme nyt, että askel $\mathbf{d}$ on nyt niin lyhyt, että voimme arvioida funktioiden arvojen muutoksia kokonaisdifferentiaalin avulla

$$df = f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} d_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d_n = \nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{d}$$

ja

$$dg_i = g_i(\mathbf{x}_1) - g_i(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} d_1 + \ldots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n} d_n = \nabla \mathbf{g}_i^\top \mathbf{d}$$

Mahdollinen askelvektori $\mathbf{d}$ on *laskeva suunta*, jos

$$\nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{d} < 0$$

ja aktiivisen rajoitteen g_i kannalta *käypä suunta*, jos

$$\nabla \mathbf{g}_i{}^\top \mathbf{d} \le 0.$$

Jos $\mathbf{x}_0$ on käyvän alueen sisäpiste (ei aktiivisia rajoitteita), niin kannattaa valita

$$\mathbf{d} = -\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Jos f:n gradientti pisteessä $\mathbf{x}_0$ ei ole nolla, niin uusi ratkaisu $\mathbf{x}_1$ on edellistä parempi. Jos f:n gradientti pisteessä $\mathbf{x}_0$ on nolla, niin prosessi pysähtyy välttämättömän ehdon ($\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$) toteuttavaan pisteeseen. (Huom: Tämä ei todista, että $\mathbf{x}_0$ olisi optimiratkaisu!).

Jos $\mathbf{x}_0$ on käyvän alueen reunapiste (aktiiviset rajoitteet $g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, p$), niin edellä tehty askelvalinta ei välttämättä ole käypä. Nyt on valittava mahdollisimman hyvä käypä suunta. Ratkaistaan siis tehtävä

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & z = \nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{d} \\ \text{st.} & \nabla \mathbf{g}_i^\top \mathbf{d} \le 0,\ \ i = 1, \ldots, p \\ & |d_k| \le h,\ \ k = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

missä $h > 0$ on valittu askelpituus. Jos LP-mallin tavoitefunktion optimiarvo $z^\star < 0$, niin $\mathbf{d}^\star$ on laskeva käypä askelsuunta ja asetamme $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}^\star$. Jos $z^\star \ge 0$, niin emme löydä laskevaa käypää askelsuuntaa, ja $\mathbf{x}_0$ on lokaali minimikohta.

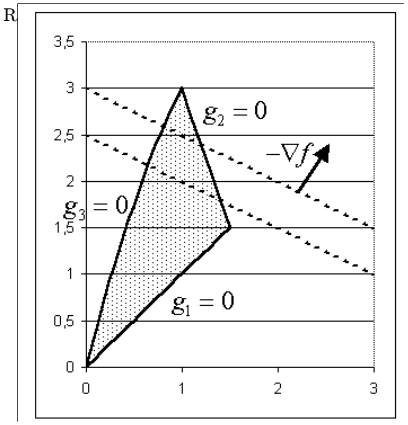


Figure 3.13: Esimerkin 3.5.3 käypä alue.

Esimerkki 3.5.3

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} \text{Min} & f(x_1,x_2) & = & -x_1 & - & 2x_2 & & & \\ \text{st.} & g_1(x_1,x_2) & = & x_1 & - & x_2 & & \le & 0 \\ & g_2(x_1,x_2) & = & 3x_1 & + & x_2 & - \quad 6 & \le & 0 \\ & g_3(x_1,x_2) & = & -4x_1 & + & x_2 & + \ x_1^2 & \le & 0 \end{array} \right.$$

Tutkimme nyt käyvän alueen nurkkapisteet (ks. kuva (3.13))

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{x}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pisteessä A:

$$-\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \ -\nabla \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ -\nabla \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 4 + 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paras käypä laskeva askelsuunta löytyy mallilla

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = -d_1 - 2d_2 & & \\ \text{st.} & d_1 - d_2 & \le & 0 \\ & -4d_1 + d_2 & \le & 0 \\ & |d_1| & \le & 1 \\ & |d_2| & \le & 1 \end{array} \right. \quad \overrightarrow{LINDO} \quad z^\star = -3, \mathbf{d}^\star = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siis A ei ole minimipiste.

Pisteessä B:

$$-\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ -\nabla \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ -\nabla \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Paras käypä laskeva askelsuunta löytyy mallilla

$$\begin{cases} \text{Min} & z = -d_1 - 2d_2 & & \\ \text{st.} & d_1 - d_2 & \leq & 0 \\ & 3d_1 + d_2 & \leq & 0 \\ & |d_1| & \leq & 1 \\ & |d_2| & \leq & 1 \end{cases} \quad \overset{LINDO}{\longrightarrow} \quad z^\star = -1.67, \mathbf{d}^\star = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siis B ei ole minimipiste.

Pisteessä C:

$$-\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ -\nabla \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ -\nabla \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 4 + 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paras käypä laskeva askelsuunta löytyy mallilla

$$\begin{cases} \text{Min} & z = -d_1 - 2d_2 & & \\ \text{st.} & 3d_1 + d_2 & \leq & 0 \\ & -6d_1 + d_2 & \leq & 0 \\ & |d_1| & \leq & 1 \\ & |d_2| & \leq & 1 \end{cases} \quad \overset{LINDO}{\longrightarrow} \quad z^\star = 0, \mathbf{d}^\star = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siis C on lokaali minimipiste.

3.5.3 Lagrangen kertojat, epäyhtälörajoite

Seuraavaksi tutkimme yleistä ongelmaa. Muotoilemme ensin lauseen ja annamme esimerkin. Todistus jätetään jatkokurssille.

Lause 3.5.1 Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ \ i = 1, \ldots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \ \ j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

on minimipiste $\mathbf{x}^\star$, niin on olemassa reaaliluvut $\mu_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, p$ ja $\lambda_j^\star, j = 1, \ldots, m$ siten, että optimipisteessä $(\mathbf{x}^\star, \mu^\star, \lambda^\star)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_k} = 0, \ \ k = 1, \ldots, n \\ \mu_i &\geq 0, \ \ i = 1, \ldots, p \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}^\star) &= 0, \ \ i = 1, \ldots, p \\ g_i(\mathbf{x}^\star) &\leq 0, \ \ i = 1, \ldots, p \\ h_j(\mathbf{x}^\star) &= 0, \ \ j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Käytämme ehdoille nimityksiä

$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{L} = \mathbf{0}$	optimaalisuus (optimality)
$\mu \geq \mathbf{0}$	ei-negatiivisuus (non-negativity)
$\mu^\top \mathbf{g} = 0$	komplementtaarisuus (complementarity)
$\mathbf{g} \leq \mathbf{0}, \ \ \mathbf{h} = \mathbf{0}$	käypyys (feasibility)

Komplementaarieuusehto sanoo, että jos rajoite $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ei ole aktiivinen optimissa, niin $\mu_i = 0$. Vastaavasti, jos optimissa $\mu_i > 0$, niin $g_i(\mathbf{x}^\star) = 0$ eli ollaan sillä käyän alueen reunan osalla, jossa $g_i(\mathbf{x}) = 0$.

Esimerkki 3.5.4

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x, y) = 2x + y \\ \text{st.} & g_1(x, y) = x^2 - y - 4 \leq 0 \\ & g_2(x, y) = x^2 + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$L = 2x + y + \mu_1(x^2 - y - 4) + \mu_2(x^2 + y - 4)$$

Välttämätön ehto minimille saa muodon

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2+2\mu_1 x+2\mu_2 x &=& 0 & (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{L}=\mathbf{0}) \\ 1-\mu_1+\mu_2 &=& 0 & \\ \mu_1(x^2-y-4) &=& 0 & (\mu_i g_i=0) \\ \mu_2(x^2+y-4) &=& 0 & \\ \hline \mu_1 &\geq& 0 & (\mu_i\geq 0) \\ \mu_2 &\geq& 0 & \\ x^2-y-4 &\leq& 0 & (g_i\leq 0) \\ x^2+y-4 &\leq& 0 & \end{array}\right.$$

Tapaus $\mu_1=\mu_2=0$ eli käyvän alueen sisäpisteet.
Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2 &=& 0 & rr \\ \vdots & & & \end{array}\right.$$

Tapaus $\mu_1=0, \mu_2>0$ (g_2 on aktiivinen).
Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2+2\mu_2 x &=& 0 & \\ 1+\mu_2 &=& 0 & \to \mu_2=-1 \\ x^2+y-4 &=& 0 & \\ \hline \mu_2 &>& 0 & rr \\ x^2-y-4 &\leq& 0 & \end{array}\right.$$

Ei siis ehdokaspisteitä tässä reunan osassa.

Tapaus $\mu_1>0, \mu_2=0$ (g_1 on aktiivinen).
Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2+2\mu_1 x &=& 0 & \to x=-1 \\ 1-\mu_1 &=& 0 & \to \mu_1=1 \\ x^2-y-4 &=& 0 & \to y=-3 \\ \hline \mu_1 &>& 0 & ok \\ x^2+y-4 &\leq& 0 & ok \end{array}\right.$$

Saadaan ehdokaspiste $x=-1$, $y=-3$, $f(-1,-3)=2\cdot(-1)+(-3)=-5$.

Tapaus $\mu_1>0, \mu_2>0$ (g_1 ja g_2 aktiivisia).
Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2+2\mu_1 x+2\mu_2 x &=& 0 & \to \mu_1=3/2 \\ 1-\mu_1+\mu_2 &=& 0 & \to \mu_2=1/2 \\ x^2-y-4 &=& 0 & \to y=0 \\ x^2+y-4 &=& 0 & \to x=-2 \\ \hline \mu_1 &>& 0 & ok \\ \mu_2 &>& 0 & ok \end{array}\right.$$

Saadaan ehdokaspiste $x=-2$, $y=0$, $f(-2,0)=2\cdot(-2)+(0)=-4$.

Valitsemalla ehdokkaista paras, saamme

$$\begin{pmatrix} x^\star \\ y^\star \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \ \mu^\star=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ f(\mathbf{x}^\star)=-5$$

Esimerkki 3.5.5 Seuraavaa esimerkkiä emme ratkaise loppuun saakka, vaan kirjoitamme vain välttämättömät ehdot minimille.

Tarkastellaan tuotevalintaongelmaa, kun yhden tuotteen kysyntä riippuu voimakkaasti myyntihinnasta (eli tuotteesta saatava kate riippuu valmistusmäärästä).

Yritys valmistaa kolmea tuotetta seuraavalla tavalla

	tuote 1	tuote 2	tuote 3	resurssi
valmistusmäärät	$x_1=25$	$x_2=20$	$x_3=70$	
kate / tuote	4	5	3	
valmistusaika / tuote	2	4	1	200
raaka-aine1 / tuote	10	6	12	1210
raaka-aine2 / tuote	20	15	10	1500

tuotteen 1 myyntihinta on nyt 20 ja valmistuskustannus 16, joista erotuksena saadaan kate 4. Kysynnän hintajousto on markkinointiosaston arvion mukaan -0.2, joten voimme arvioida hinnan muutosta, jos tuotannon määrää muutetaan

$$-0.2=\frac{p}{x_1}\cdot\frac{dx_1}{dp}=\frac{20}{25}\cdot\frac{dx_1}{dp}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{dp}{dx_1}=-0.25$$

Jos mallinnamme kysynnän lineaarisella kysyntäfunktiolla, niin

$$\begin{array}{rcl} p &=& 20-0.25(x_1-25)=26.25-0.25x_1 \\ \Rightarrow\ \text{kokonaiskate} &=& (p-16)x_1=10.25x_1-0.25x_1^2 \end{array}$$

Kun otamme huomioon tuotteen 1 hintajouston, saamme optimoitavaksi tuotevalintaongelman

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcl} \max & 10.25x_1-0.25x_1^2 &+& 5x_2 &+& 3x_3 & & \\ \text{st.} & 2x_1 &+& 4x_2 &+& x_3 &\leq& 200 \\ & 10x_1 &+& 6x_2 &+& 12x_3 &\leq& 1210 \\ & 20x_1 &+& 15x_2 &+& 10x_3 &\leq& 1500 \\ & & & & & x_1 &\geq& 0 \\ & & & & & x_2 &\geq& 0 \\ & & & & & x_3 &\geq& 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{lrcrcrcl} \min & z=-10.25x_1+0.25x_1^2-5x_2-3x_3 & & & & & & \\ \text{st.} & 2x_1+4x_2+x_3-200 &\leq& 0 & & & & \\ & 10x_1+6x_2+12x_3-1210 &\leq& 0 & & & & \\ & 20x_1+15x_2+10x_3-1500 &\leq& 0 & & & & \\ & -x_1 &\leq& 0 & & & & \\ & -x_2 &\leq& 0 & & & & \\ & -x_3 &\leq& 0 & & & & \end{array}\right.$$

Lagrangen funktio on

$$\begin{aligned} L &= -10.25x_1 + 0.25x_1^2 - 5x_2 - 3x_3 + \mu_1(2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200) \\ &\quad +\mu_2(10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210) + \mu_3(20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500) - \mu_4 x_1 - \mu_5 x_2 - \mu_6 x_3 \end{aligned}$$

ja minimin välttämättömät ehdot saavat muodon

$$\left\{\begin{array}{rcl} -10.25 + 0.5x_1 + 2\mu_1 + 10\mu_2 + 20\mu_3 - \mu_4 &=& 0 \\ -5 + 4\mu_1 + 6\mu_2 + 15\mu_3 - \mu_5 &=& 0 \\ -3 + \mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 - \mu_6 &=& 0 \\ \mu_1(2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200) &=& 0 \\ \mu_2(10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210) &=& 0 \\ \mu_3(20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500) &=& 0 \\ \mu_4 x_1 &=& 0 \\ \mu_5 x_2 &=& 0 \\ \mu_6 x_3 &=& 0 \\ \hline \mu_1 &\geq& 0 \\ \mu_2 &\geq& 0 \\ \mu_3 &\geq& 0 \\ \mu_4 &\geq& 0 \\ \mu_5 &\geq& 0 \\ \mu_6 &\geq& 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200 &\leq& 0 \\ 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210 &\leq& 0 \\ 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500 &\leq& 0 \\ -x_1 &\leq& 0 \\ -x_2 &\leq& 0 \\ -x_3 &\leq& 0 \end{array}\right.$$

Vaihtoehtoisia tapauksia ($\mu_i = 0 \;\; / \;\; \mu_i > 0$) on $2^6 = 64$ tapausta, joista eräät näkee helposti mahdottomiksi. Jos esimerkiksi $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, niin toinen ja kolmas ehto ovat epätosia (tämä poistaa listalta 8 tapausta.) Tapausten läpikäynti on suoraviivainen, mutta työläs tehtävä, jonka nyt jätämme kesken.

Tutkitaan kuitenkin yrityksen nykyinen toimintapiste, jossa kaikki resurssirajoitteet ovat aktiivisia ($\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$) ja kaikki merkkirajoitteet ovat epäaktiivisia ($\mu_4 = \mu_5 = \mu 6 = 0$). Minimin välttämttömät ehdot menevät silloin

muotoon

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0.5x_1 + 2\mu_1 + 10\mu_2 + 20\mu_3 &=& 10.25 \\ 4\mu_1 + 6\mu_2 + 15\mu_3 &=& 5 \\ \mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 &=& 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 200 \\ 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 &=& 1210 \\ 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 &=& 1500 \\ \hline \mu_1 &>& 0 \\ \mu_2 &>& 0 \\ \mu_3 &>& 0 \\ x_1 &>& 0 \\ x_2 &>& 0 \\ x_3 &>& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 25 \\ x_2 &=& 20 \\ x_3 &=& 70 \\ \mu_1 &=& 3.03 \\ \mu_2 &=& 0.59 \\ \mu_3 &=& -0.71 \rightarrow \textbf{EI OPTIMI} \end{array}\right.$$

Siis toteamme, että yrityksen nykyinen toimintatapa, joka on lineaarisen mallin mukainen optimiratkaisu, ei ole epälineaarisen mallin optimiratkaisu.

3.5.4 Optimointitehtävän relaksaatio

Jos rajoitteita on monta, on ongelman täydellinen tutkiminen usein työläs tehtävä. Seuraavassa esitettävä keino auttaa säästämään vaivoja.

Ryhdymme vertaamaan kahta optimointitehtävää

$$\mathcal{O}_1 : \left\{\begin{array}{ll} \text{Min} & z = f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & \mathbf{x} \in K_1 \end{array}\right. \quad \text{ja} \quad \mathcal{O}_2 : \left\{\begin{array}{ll} \text{Min} & z = f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & \mathbf{x} \in K_2 \end{array}\right.$$

Tavoitefunktiot ovat siis samat, mutta käyvät alueet eroavat toisistaan. Sanomme, että ongelma $\mathcal{O}_1$ on perusongelman $\mathcal{O}_2$ *relaksaatio*, jos $K_2 \subset K_1$. Tavallisin tapa muodostaa relaksaatio, on jättää yksi tai useampi perusongelman rajoite pois, jolloin käypä alue laajenee.

Lause 3.5.2 Olkoon $\mathbf{x}^\star$ relaksaation globaali ääriarvokohta. Jos $\mathbf{x}^\star$ toteuttaa kaikki perusongelman rajoitteet, niin $\mathbf{x}^\star$ on perusongelman globaali ääriarvokohta.

Todistus. Jos $\mathbf{x}^\star$ on paras joukon K_1 pisteistä ja $\mathbf{x}^\star \in K_2 \subset K_1$, niin se on myös paras (pienemmän) joukon K_2 pisteistä. □

Esimerkki 3.5.6 Tarkastellaan vielä kerran yritystä, joka valmistaa tuotteita A ja B (Ks. esimerkit 3.4.8 ja 3.4.8). Kysyntä reagoi joustavasti ja työresurssi on rajoitettu. Nyt kuitenkin työresurssia on 200 tuntia, eli enemmän kuin esimerkissä 3.4.8. Kaikkea työresurssia ei tarvitse käyttää tuotteiden A ja B tekemiseen, vaan

resurssia voidaan ohjata muualle. Optimointitehtävä on siis seuraava.

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z=-P=-7x_1-43x_2+0.03x_1^2+0.015x_1x_2+0.12x_2^2 & & \\ \text{st.} & 1.5x_1+0.75x_2 & \leq & 200 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{3.123}$$

Muodostetaan perusongelmasta (3.123) relaksaatio jättämällä merkkirajoitteet pois.

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z=-P=-7x_1-43x_2+0.03x_1^2+0.015x_1x_2+0.12x_2^2 & & \\ \text{st.} & 1.5x_1+0.75x_2 & \leq & 200 \end{array}\right. \tag{3.124}$$

Lagrangen funktio on

$$L=-P+\mu(1.5x_1+0.75x_2-200) \tag{3.125}$$

ja välttämätön ehto optimille on

$$\left\{\begin{array}{rcll} -7+0.06x_1+0.015x_2+1.5\mu & = & 0 & (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{L}=\mathbf{0}) \\ -43+0.015x_1+0.24x_2+0.75\mu & = & 0 & \\ \hline \mu(1.5x_1+0.75x_2-200) & = & 0 & (\mu g=0) \\ \hline \mu & \geq & 0 & (\mu\geq 0) \\ 1.5x_1+0.75x_2-200 & \leq & 0 & (g\leq 0) \end{array}\right. \tag{3.126}$$

Jos $\mu=0$, niin

$$\left\{\begin{array}{rcl} -7+0.06x_1+0.015x_2 & = & 0 \\ -43+0.015x_1+0.24x_2 & = & 0 \\ \hline 1.5x_1+0.75x_2-200 & \leq & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=73.0 \\ x_2=174.6 \\ \hline rr \end{array}\right. \tag{3.127}$$

Jos $\mu>0$, niin

$$\left\{\begin{array}{rcl} -7+0.06x_1+0.015x_2+1.5\mu & = & 0 \\ -43+0.015x_1+0.24x_2+0.75\mu & = & 0 \\ 1.5x_1+0.75x_2-200 & = & 0 \\ \hline \mu & \geq & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=46.9 \\ x_2=172.9 \\ \mu=1.06 \\ \hline ok \end{array}\right. \tag{3.128}$$

Koska $\lim_{x_1\to-\infty} z=+\infty$ ja $\lim_{x_2\to-\infty} z=+\infty$, on (3.128) relaksaation optimiratkaisu. Koska se toteuttaa myös perusongelman merkkirajoitteet, se on alkuperäisen ongelman optimiratkaisu. ///

Esimerkki 3.5.7 Esimerkissä 3.5.5 jäi todellinen optimi ratkaisematta. Yrityksen johtaja arvelee laajan kokemuksensa perusteella, että optimissa kolmatta resurssia jää käyttämättä ja kaikkia tuotteita valmistetaan. Siksi teemme perusongelmasta (3.129) relaksaation jättämällä merkkirajoitteet ja kolmas resurssirajoite pois.

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{min} & z=-10.25x_1+0.25x_1^2-5x_2-3x_3 & & \\ \text{st.} & 2x_1+4x_2+x_3-200 & \leq & 0 \\ & 10x_1+6x_2+12x_3-1210 & \leq & 0 \end{array}\right. \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned} L &= -10.25x_1+0.25x_1^2-5x_2-3x_3 \\ &\quad +\mu_1(2x_1+4x_2+x_3-200)+\mu_2(10x_1+6x_2+12x_3-1210) \end{aligned} \tag{3.130}$$

ja minimin välttämättömät ehdot saavat muodon

$$\left\{\begin{array}{rcll} -10.25+0.5x_1+2\mu_1+10\mu_2 & = & 0 & \rightarrow x_1=13.17 \\ -5+4\mu_1+6\mu_2 & = & 0 & \left\{\begin{array}{l}\mu_1=1\\ \mu_2=1/6\end{array}\right. \\ -3+\mu_1+12\mu_2 & = & 0 & \\ \mu_1(2x_1+4x_2+x_3-200) & = & 0 & \rightarrow x_2=23.94 \\ \mu_2(10x_1+6x_2+12x_3-1210) & = & 0 & \rightarrow x_3=77.90 \\ \hline \mu_1 & \geq & 0 & ok \\ \mu_2 & \geq & 0 & ok \\ 2x_1+4x_2+x_3-200 & \leq & 0 & ok \\ 10x_1+6x_2+12x_3-1210 & \leq & 0 & ok \end{array}\right.$$

Saimme siis relaksaation optimiratkaisun. Tämä ratkaisu toteuttaa kaikki relaksaatiosta pois jätetyt perusongelman rajoitteet,

$$20x_1+15x_2+10x_3 \leq 1500 \tag{3.131}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{3.132}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{3.133}$$
$$x_3 \geq 0 \tag{3.134}$$

joten se on perusongelman optimiratkaisu. Johtaja oli siis oikeassa ja hänen arvionsa on nyt osoitettu laskien oikeaksi. ///

3.6 Pienimmän neliösumman menetelmä

3.6.1 Approksimointi polynomilla

Olkoon lähtökohtana joukko havaintoja $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)\}$. Muodostetaan polynomifunktio $P(x)$ siten, että mahdollisimman tarkasti olisi voimassa

$$y_k \approx P(x_k).$$

Olkoon polynomi $P(x)$ astetta n, eli

$$P(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n \tag{3.135}$$

Määritetään kertoimet b_i siten, että neliösumma

$$f(\mathbf{b})=\sum_{k=1}^{N}(P(x_k)-y_k)^2=\sum_{k=1}^{N}(b_0+b_1x_k+\ldots+b_nx_k^n-y_k)^2 \tag{3.136}$$

saa pienimmän mahdollisen arvon. Minimin välttämätön ehto on nyt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial b_j} &= 2\sum_{k=1}^{N}(b_0 + b_1x_k + \ldots + b_nx_k^n - y_k)x_k^j \quad (3.137)\\ &= 2\left(b_0\sum x_k^j + b_1\sum x_k^{j+1} + \ldots + b_n\sum x_k^{j+n} - \sum y_k x_k^j\right) \quad (3.138)\\ &= 0, \quad \text{kaikilla } j = 0, \ldots, n\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} N & \sum x_k & \ldots & \sum x_k^n \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \ldots & \sum x_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_k^n & \sum x_k^{n+1} & \ldots & \sum x_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_k \\ \sum y_k x_k \\ \vdots \\ \sum y_k x_k^n \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

Jos asetamme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \ldots & x_N^n \end{pmatrix} \quad (3.140)$$

ja $\text{Rank}(\mathbf{A}) = n$, niin yhtälöryhmä (3.139) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}(3.139) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \quad (3.141)\\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y} \quad (3.142)\end{aligned}$$

Seuraavaksi pohdimme riittävän ehdon toteutumista edellä käsitellylle minimointitehtävälle. Hessin matriisi saadaan osittaisderivoimalla vielä kerran (3.138). Osoittautuu, että Hessin matriisi on sama kuin yhtälöryhmän (3.139) kerroinmatriisi

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \quad (3.143)$$

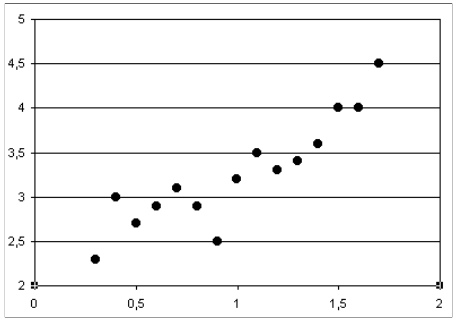
Mutta jos $\text{Rank}(\mathbf{A}) = n$, niin $\mathbf{A}$:n ydin on triviaali ja

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (3.144)$$

joten Hessin matriisi on positiivisesti definiitti, ja välttämättömän ehdon toteuttava piste on minimointitehtävän globaali optimikohta. Parhaan approksimoivan polynomin kertoimet saadaan siis kaavasta (3.142).

Esimerkki 3.6.1 Olemme tehneet havainnot

x_k	y_k
0.3	2.3
0.4	3.0
0.5	2.7
0.6	2.9
0.7	3.1
0.8	2.9
0.9	2.5
1.0	3.2
1.1	3.5
1.2	3.3
1.3	3.4
1.4	3.6
1.5	4.0
1.6	4.0
1.7	4.5



Jos haluamme sovittaa pienimmän neliösumman menetelmällä toisen asteen polynomifunktion pisteisiin, niin matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ovat

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.09 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.6 & 0.36 \\ 1 & 0.7 & 0.49 \\ 1 & 0.8 & 0.64 \\ 1 & 0.9 & 0.81 \\ 1 & 1.0 & 1.00 \\ 1 & 1.1 & 1.21 \\ 1 & 1.2 & 1.44 \\ 1 & 1.3 & 1.69 \\ 1 & 1.4 & 1.96 \\ 1 & 1.5 & 2.25 \\ 1 & 1.6 & 2.56 \\ 1 & 1.7 & 2.89 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} 0,915 & -1,721 & 0,735 \\ 0,623 & -1,055 & 0,420 \\ 0,370 & -0,486 & 0,154 \\ 0,157 & -0,014 & -0,065 \\ -0,017 & 0,362 & -0,234 \\ -0,151 & 0,640 & -0,356 \\ -0,246 & 0,821 & -0,428 \\ -0,301 & 0,905 & -0,452 \\ -0,317 & 0,892 & -0,428 \\ -0,294 & 0,782 & -0,356 \\ -0,231 & 0,576 & -0,234 \\ -0,129 & 0,272 & -0,065 \\ 0,013 & -0,128 & 0,154 \\ 0,194 & -0,626 & 0,420 \\ 0,415 & -1,221 & 0,735 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (3.145)$$

Havaintopisteisiin sovitetun polynomifunktion kerroinvektoriksi saadaan

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2,7217 \\ -0,4167 \\ 0,8048 \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

Kuvaan 3.14 on piirretty havaintopisteet ja polynomin $P(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$ kuvaaja.

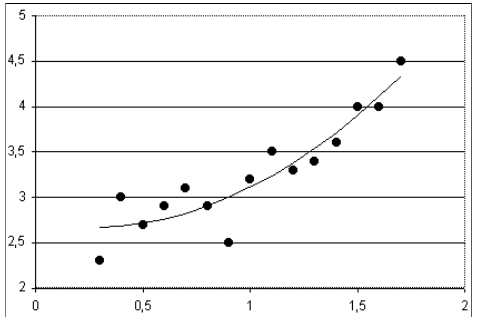


Figure 3.14: Esimerkin 3.6.1 havaintopisteet ja niihin PNS-menetelmällä sovitetun polynomifunktion kuvaaja.

3.6.2 Lineaarisen mallin sovitus

Yritys tuottaa eläinten rehua ja sen suurimmat asiakkaat ovat turkistarhoja ja suurkanaloita. Tulevaa neljännevuotta suunniteltaessa on käytettävissä koko turkistarhaalan liikevaihto neljännesvuosittain $(u_k, k = 1, \ldots, 8)$ kahden viime vuoden ajalta sekä tulevan neljännesvuoden ennuste $\tilde{u}_9$. Vastaavasti on käytettävissä siipikarjan kasvattajien yhteenlaskettu liikevaihto neljännesvuosittain $(w_k, k = 1, \ldots, 8)$ kahden viime vuoden ajalta sekä tulevan neljännesvuoden ennuste $\tilde{w}_9$. Rehun myynti $(y_k, k = 1, \ldots, 8)$ on myös tiedossa neljännesvuosittain kahden viime vuoden ajalta. Yritys haluaa laskea mahdollisimman hyvän ennusteen tulevan neljännesvuoden myynnille $\hat{y}_9$.

Tietty osuus kaikista turkistarhoista on yrityksemme asiakkaita ja vastaavasti tietty osa kaikista suurkanaloista on yrityksemme asiakkaita. Siksi on luonnollista olettaa, että sopivasti valituilla kertoimilla x_1, x_2, x_3, pätee

$$x_1 + x_2 u_k + x_3 w_k = \hat{y}_k \approx y_k \tag{3.147}$$

Kaava (3.147) on lineaarinen selitysmalli, jossa myynti y_k on selitettävä muuttuja ja asiakastoimialojen liikevaihdot u_k ja w_k ovat selittäviä muuttujia. Jos kertoimet x_1, x_2, x_3 saadaan valittua siten, että

$$\hat{y}_k \approx y_k, \forall k \tag{3.148}$$

$$\text{eli} \qquad \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\| \text{ on pieni} \tag{3.149}$$

niin saamme hyvän ennusteen tulevan neljännesvuoden myynnille asettamalla

$$\hat{y}_9 = x_1 + x_2 \tilde{u}_9 + x_3 \tilde{w}_9. \tag{3.150}$$

Yhtälö (3.149) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \text{ on pieni,} \tag{3.151}$$

missä

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & w_1 \\ 1 & u_2 & w_2 \\ 1 & u_3 & w_3 \\ 1 & u_4 & w_4 \\ 1 & u_5 & w_5 \\ 1 & u_6 & w_6 \\ 1 & u_7 & w_7 \\ 1 & u_8 & w_8 \end{pmatrix} \tag{3.152}$$

Ratkaisemme siis minimointitehtävän

$$\min f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \|\mathbf{y}\|^2 \tag{3.153}$$

Ennen kuin laskemme tavoitefunktion gradientin, toteamme kaksi kaavaa tätä laskua varten. Olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ja olkoon $\mathbf{B}$ symmetrinen (3×3)-matriisi. Silloin

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) = b_k \tag{3.154}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(x_1 b_{11} x_1 + x_1 b_{12} x_2 + x_1 b_{13} x_3 + \ldots \\ &\qquad \ldots + x_2 b_{21} x_1 + x_2 b_{22} x_2 + x_2 b_{23} x_3 + \ldots \\ &\qquad \ldots + x_3 b_{31} x_1 + x_3 b_{32} x_2 + x_3 b_{33} x_3) \\ &= 2b_{k1}x_1 + 2b_{k2}x_2 + 2b_{k3}x_3 \end{aligned} \tag{3.155}$$

Siis

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{k1}x_1 + 2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{k2}x_2 + 2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{k3}x_3 - 2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y})_k \tag{3.156}$$

Minimin välttämätön ehto saa siis nyt muodon

$$\nabla f = 0 \tag{3.157}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{11}x_1 + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{12}x_2 + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{13}x_3 = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y})_1 \\ (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{21}x_1 + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{22}x_2 + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{23}x_3 = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y})_2 \\ (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{31}x_1 + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{32}x_2 + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_{33}x_3 = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y})_3 \end{cases} \tag{3.158}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \tag{3.159}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y} \tag{3.160}$$

Vastaavasti kuin edellisessä kappaleessa näemme, että minimointitehtävän Hessin matriisi $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti, jos $\mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = n$.

Jos siis $\mathbf{A}$ on "full rank", niin (3.160) antaa parhaan lineaarisen selitysmallin kertoimet.

Esimerkki 3.6.2 Olkoon alussa mainitun eläinrehua valmistavan yrityksen tilannetta kuvaavat aikasarjat (u_k), (w_k) ja (y_k) seuraavan taulukon mukaiset

k	u_k	w_k	y_k
1	535,53	96,37	143,62
2	404,93	118,33	110,84
3	329,68	132,77	115,94
4	180,52	212,48	94,34
5	224,70	237,99	111,78
6	250,57	236,18	113,44
7	254,89	284,45	141,12
8	393,06	349,95	170,14
9	551,26	321,69	

Kaavasta (3.160) saamme kertoimet optimaaliselle mallille

$$\hat{y}_k = 10,5336 + 0,1986u_k + 0,2432w_k \tag{3.161}$$

Mallin hyvyyttä voimme nyt tutkia piirtämällä toteutuneet ja mallin ennustama myynti samaan kuvaan (ks kuva 3.15). Malli ei välttämättä aina onnistu ennustamisessa täsmällisesti, mutta silti se antaa melko luotettavan pohjan tulevan kauden suunnittelulle. ///

3.7 Tuotantofunktio, resurssien jakaminen

Usein yrityksen tuotantotoiminta voidaan nähdä toimintana, jossa tuotetta valmistettaessa tarvitaan kahta tai useampaa resurssia. Resurssit voivat olla työ ja pääoma, oma valmistus ja alihankinta.

Eräs ajankohtainen sovellus on valmistus, jossa tuote voidaan tehdä nopeasti suurella energian kulutuksella (raaka voima), tai tuote voidaan valmistaa energiaa säästäen, kun käytetään monimutkaisempia prosesseja (enemmän koneita ja enemmän työtä).

Seuraavassa käytämme klassista jakoa kahteen tuotannontekijään: työ L ja pääoma K. Yrityksen kokonaistuotanto z riippuu käytetyistä tuotannontekijöistä tavalla jonka ilmaisee *tuotantofunktio*

$$z = f(L, K) \tag{3.162}$$

Normaalisti, kun yritys toimii normaalilla tavalla, sen rajatuottavuudet ovat positiivisia

$$MP_L = \frac{\partial z}{\partial L} > 0 \quad \text{ja} \quad MP_K = \frac{\partial z}{\partial K} > 0 \tag{3.163}$$

mutta väheneviä

$$\frac{\partial^2 z}{\partial L^2} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial K^2} < 0 \tag{3.164}$$

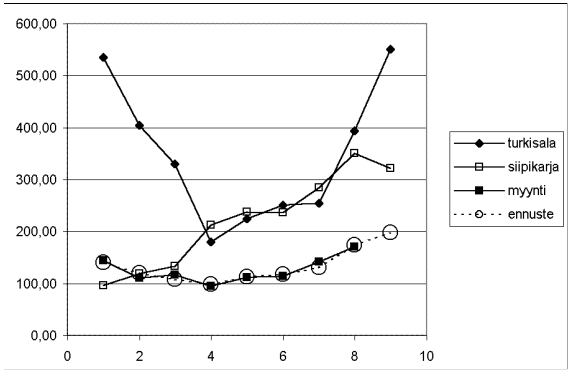


Figure 3.15: Esimerkin 3.6.2 asiakastoimialojen liikevaihdot sekä yrityksen toteutunut myynti ja selitysmallin ennustama myynti.

Optimointitehtävän kannalta saman asian saa esitettyä parhaiten piirtämällä LK-tasoon tuotantofunktion tasa-arvokäyriä (ks. kuva 3.17). Piirretään samaan kuvaan vielä *budjettisuora*

$$wL + rK = B \tag{3.165}$$

missä w on työn yksikköhinta, r on pääoman yksikköhinta ja B on suunnittelujaksolle budjetoitu resurssi. Jos yritys haluaa saada budjetoidulla resurssilla mahdollisimman suuren tuotoksen, niin tehtävänä on siis löytää budjettisuoralta mahdollisimman hyvä piste.

Optimipisteessä $(L^\star, K^\star)$ rajoitesuora sivuaa tasa-arvokäyrää. Rajoitesuoran kulmakerroin $-w/r$ on siis optimissa yhtäsuuri kuin rajakorvaavuusaste dK/dL optimikohdassa, (marginal rate of substitution). Koska budjettisuora sivuaa tasa-arvokäyrää, ei pieni siirros (dL, dK) budjettisuoraa pitkin muuta tuotantofunktion arvoa

$$dz = \frac{\partial z}{\partial L}dL + \frac{\partial z}{\partial K}dK = 0 \tag{3.166}$$

$$\Rightarrow \frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{dK}{dL} = \frac{w}{r} \tag{3.167}$$

Siis rajakorvaavuusaste on

$$MRS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \tag{3.168}$$

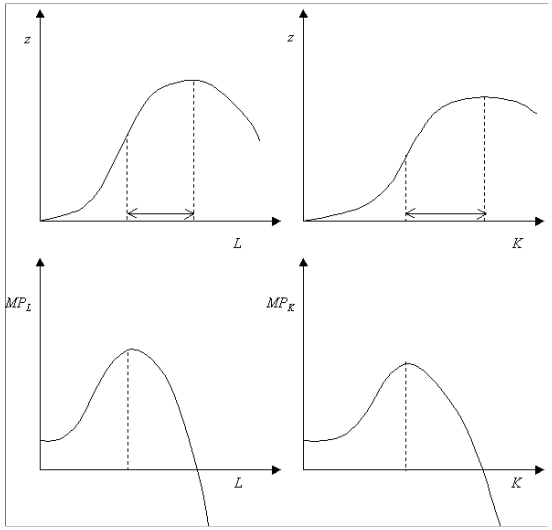


Figure 3.16: a) Tuotanto työn funktiona, kun pääoma on kiinnitetty ja b) tuotanto pääoman funktiona, kun työn määrä on kiinnitetty.

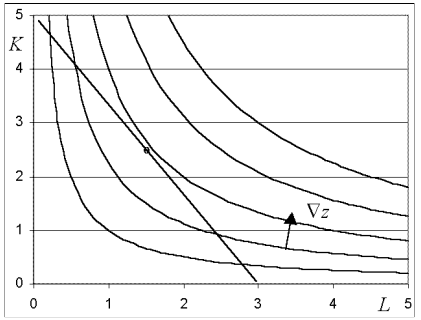


Figure 3.17: Budjettisuora $wL + rK = B$ sekä tuotantofunktion $z = f(L, K)$ tasa-arvokäyriä.

Yhtälössä (3.168) esiintyviä työn ja pääoman rajatuottavuuksia voidaan arvioida nykyisessä toimintatilanteessa, vaikka tuotantofunktion tarkka muoto jäisikin selvittämättä. Jos arvion mukaan

$$\frac{MP_L^{nyt}}{MP_K^{nyt}} > \frac{w}{r} \tag{3.169}$$

niin päättelemme seuraavasti. Jos siirrämme toimintapistettä hieman budjettisuoraa pitkin oikealle, niin L kasvaa hieman ($dL > 0$) ja K pienenee hieman ($dK < 0$). Koska rajatuottavuudet ovat väheneviä, niin silloin MP_L pienenee hieman ja MP_K kasvaa hieman. Nämä muutokset korjaavat epäyhtälöä (3.169) oikeaan suuntaan. Siis nykyistä toimintatapaa tulee muuttaa vähemmän pääomaa ja enemmän työvoimaa käyttävään suuntaan.

3.7.1 Homogeeninen tuotantofunktio

Tuotantofunktion muotoa ei kannata määrittää liian pikkutarkalla tavalla. Pääasia on, että tuotantofunktio toimii hyvin nykyisen toimintapisteen ja optimipisteen ympäristössä. (Nokiaa ei kiinosta tuotantofunktion $z = f(L, K)$ muoto, kun L on pieni ja K on pieni!)

Tuotantofunktion tapauksessa usein lähtökohtana on ajatus lineaarisesta prosessista

Lineaariselle prosessille on voimassa

Jos $f(L,K)=z$, niin $f(\alpha L,\alpha K)=\alpha z$

Käytännössä lineaarisuus tarkoittaa sitä, että kun kumpaakin tuotannontekijää hankitaan 10% lisää, niin tuotantokin kasvaa 10%:lla. Toisaalta massatuotantoa ei aina kuvaa lineaarisuus, vaan 10%:n lisäys tuotannontekijöissä voi synnyttää enemmän kuin 10%:n kasvun tuotannossa.

Määritelmä 3.7.1 Sanomme, että tuotantofunktio $f(L,K)$ on *astetta s oleva homogeeninen funktio*, jos

$$f(\alpha L,\alpha K)=\alpha^s f(L,K)$$

Astetta s olevalla homogeenisella tuotantofunktiolla voidaan mallintaa kasvavia skaalatuottoja ($s>1$, increasing returns to scale) tai laskevia skaalatuottoja ($0<s<1$, decreasing returns to scale). Kasvavat skaalatuotot ovat tyypillisiä kasvavalle uudelle yritykselle, joka kaikin tavoin pyrkii hyödyntämään massatuotannon etuja. Myöhemmin kasvun jatkuessa skaalatuotot muuttuvat laskeviksi. Tähän oppikirjat mainitsevat mahdollisiksi syiksi esimerkiksi hitaasti uusiutuvien resurssien rajallisuuden sekä kasvun yhteydessä helposti tapahtuvan "mopon karkaaminen" johdolta.

Esimerkki 3.7.1 Funktio $f(x,y)=2x^3+5x^2y+2y^3$ on astetta 3 oleva homogeeninen funktio sillä

$$f(\alpha x,\alpha y)=2\alpha^3x^3+5\alpha^2x^2\alpha y+2\alpha^3y^3=\alpha^3(2x^3+5x^2y+2y^3) \tag{3.170}$$

Huomaa, että "jokainen termi on astetta 3". ///

Lause 3.7.1 Jos

$$f(x,y)=\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$$

missä $g(x,y)$ on astetta s oleva homogeeninen funktio ja $h(x,y)$ on astetta p oleva homogeeninen funktio, niin $f(x,y)$ on astetta $s-p$ oleva homogeeninen funktio.

Todistus. HT □

Lause 3.7.2 (**Euler**) Jos $z=f(x,y)$ on astetta s oleva homogeeninen funktio, niin

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=s\,f(x,y)$$

Todistus. HT □

Käytännössä usein käytetty tuotantofunktio on seuraava Coubb–Douglas -tuotantofunktio.

Määritelmä 3.7.2 *Coubb–Douglas -tuotantofunktio* on

$$z=aL^{b_1}K^{b_2}. \tag{3.171}$$

Funktio on astetta $s=b_1+b_2$ oleva homogeeninen funktio.
Lineaarinen Coubb–Douglas -tuotantofunktio on

$$z=aL^bK^{1-b}. \tag{3.172}$$

Coubb–Douglas -tuotantofunktiolle

$$MP_L = \frac{\partial}{\partial L}(aL^{b_1}K^{b_2})=b_1aL^{b_1-1}K^{b_2}=b_1\frac{z}{L} \tag{3.173}$$

$$MP_K = \frac{\partial}{\partial K}(aL^{b_1}K^{b_2})=b_2aL^{b_1}K^{b_2-1}=b_2\frac{z}{K} \tag{3.174}$$

$$\Rightarrow MRS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K}=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{K}{L} \tag{3.175}$$

Esimerkki 3.7.2 Yritys tuottaa yhtä tuotetta ja sen tuotantofunktio on

$$z=100L^{1/2}K^{1/2}, \tag{3.176}$$

kysyntäfunktio on

$$p=20-0.001z, \tag{3.177}$$

budjettirajoite on

$$10L+15K=2000 \tag{3.178}$$

ja voittofunktio on

$$P=pz-2000=2000L^{1/2}K^{1/2}-10LK-2000 \tag{3.179}$$

Tällä hetkellä yrityksen tuotannontekijöiden määrät ovat $L=100$ ja $K=166.7$. Tarkistetaan ensin onko $MRS_{L,K}=w/r$ (ehto (3.168)).

$$MRS_{L,K} = \frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{K}{L}=1.667 \tag{3.180}$$

$$w/r = 10/15=0.667 \tag{3.181}$$

Näyttää siis siltä, että yrityksen pitäisi käyttää enemmän työvoimaa ja vähemmän pääomaa. Ehto (3.168) ei nyt kuitenkaan huomioi kysyntäfunktion vaikutusta.

Haluamme maksimoida voiton, joten ratkaisemme optimointitehtävän

$$\begin{cases} \min & -P = -2000L^{1/2}K^{1/2} + 10LK + 2000 \\ \text{ehdolla} & 10L + 15K - 2000 = 0 \end{cases} \tag{3.182}$$

Lagrangen funktio on

$$\text{Lagr}(L,K) = -2000L^{1/2}K^{1/2} + 10LK + 2000 + \lambda(10L + 15K - 2000). \tag{3.183}$$

Välttämätön ehto minimille on

$$\begin{cases} -1000L^{-1/2}K^{1/2} + 10K + 10\lambda &=& 0 \\ -1000L^{1/2}K^{-1/2} + 10L + 15\lambda &=& 0 \\ 10L + 15K - 2000 &=& 0 \end{cases} \tag{3.184}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda &=& -K + 100L^{-1/2}K^{1/2} \\ -1000L^{1/2}K^{-1/2} + 10L - 15K + 1500L^{-1/2}K^{1/2} &=& 0 \\ 10L + 15K - 2000 &=& 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10L^{1/2}K^{-1/2} + 15L^{-1/2}K^{1/2} &=& 20 - 0.2L \\ 10L + 15K - 2000 &=& 0 \end{cases} \tag{3.185}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100L/K - 300 + 225K/L &=& 400 - 8L + 0.04L^2 \\ 10L + 15K - 2000 &=& 0 \end{cases} \tag{3.186}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100L^2 + 225K^2 &=& 700LK - 8L^2K + 0.04L^3K \\ L &=& 200 - 1.5K \end{cases} \tag{3.187}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & 100(200 - 1.5K)^2 + 225K^2 - 700(200 - 1.5K)K \\ & + 8(200 - 1.5K)^2K - 0.04(200 - 1.5K)^3K = 0 \end{aligned} \tag{3.188}$$

Viimeisen yhtälön ratkaisu löytyy piirtämällä EXCELillä vasemman puolen lausekkeen kuvaaja. Kuvaajasta nähdään, että $K^\star = 66.7$. Siis

$$K^\star = 66.7 \tag{3.189}$$
$$L^\star = 200 - 1.5 \cdot 66.7 = 100.0 \tag{3.190}$$
$$\lambda^\star = -66.7 + 100\sqrt{100/66.7} = 55.7 \tag{3.191}$$
$$z^\star = 100\sqrt{66.7 \cdot 100.0} = 8167 \tag{3.192}$$
$$p^\star = 20 - 0.001 \cdot 8167 = 11.833 \tag{3.193}$$
$$P^\star = p^\star z^\star - 2000 = 11.833 \cdot 8167 - 2000 = 94640 \tag{3.194}$$

4. Jonot ja sarjat

Aluksi määrittelemme supremumin ja infimumin käsitteet. Käsitteet eivät ole välttämättömiä potenssisarjojen ymmärtämiseksi. Alan kirjallisuudessa ja tutkimusjulkaisuissa käsitteitä käytetään eikä niitä enää selitetä, vaan lukijan oletetaan tuntevan ne. Kyse on lähinnä merkintätavasta, joka on hyvä tuntea.

4.1 Supremum ja infimum

Toistuvasti syntyy tilanteita, joissa viitataan reaalilukujoukon suurimpaan lukuun eli maksimiin. Tällainen puhetapa aiheuttaa joskus ongelmia, sillä kaikilla reaalilukujoukoilla ei ole maksimia. Esimerkiksi joukoilla

$$A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\} \text{ ja } B = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \tag{4.1}$$

ei ole maksimia. Ongelma kierretään seuraavan määritelmän ja aksiooman avulla.

Määritelmä 4.1.1 Olkoon A joukko reaalilukuja. Reaaliluku M on joukon A *yläraja* (upper bound), jos $x \leq M, \forall x \in A$. Joukko on *ylhäältä rajoitettu*, jos sillä on yläraja. Reaaliluku S on joukon A *supremum*, jos se on joukon A pienin yläraja (least upper bound) eli jokaiselle A:n ylärajalle M on voimassa $S \leq M$. Supremumille käytetään merkintää

$$\sup A$$

Vastaavasti määritellään *alaraja*, *alhaalta rajoitettu* ja *suurin alaraja* eli *infimum*, jota merkitsemme

$$\inf A$$

Jos joukolla A ei ole yhtään ylärajaa, merkitsemme $\sup A = \infty$ ja jos joukolla ei ole yhtään alarajaa, merkitsemme $\inf A = -\infty$.

Funktion f joukossa D saamien arvojen supremumille ja infimumille käytämme merkintöjä

$$\begin{aligned} \sup_D f &= \sup\{f(x) \mid x \in D\} \\ \inf_D f &= \inf\{f(x) \mid x \in D\} \end{aligned}$$

Aksiooma (reaalilukujoukon täydellisyysaksiooma): Ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on aina supremum. (Vastaavasti alhaalta rajoitetulla reaalilukujoukolla on aina infimum.)

Aksiooma ilmaisee reaalilukujoukon ominaisuuden, joka on niin ilmeinen, ettei sitä todisteta vaan asia otetaan aksioomana, josta edelleen voidaan johtaa uusia ominaisuuksia. Rationaalilukujen joukossa ei aksiooma ole voimassa.

Esimerkki 4.1.1 Joukossa

$$A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\} \tag{4.2}$$

ei ole suurinta lukua, mutta 1 on sen yläraja. Jos $M < 1$, niin jokin joukon A luvuista on suurempi kuin M. Siis 1 on joukon A pienin yläraja, eli $\sup A = 1$. ///

4.2 Jonon suppeneminen

Määritelmä 4.2.1 Reaalilukujono (a_n) suppenee kohden lukua a, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|a_n - a| \leq \varepsilon$, kun $n \geq n_\varepsilon$. Merkitsemme tällöin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Sanomme, että jono (a_n) on *nouseva*, jos $a_{n+1} \geq a_n, \forall n$ ja *laskeva*, jos $a_{n+1} \leq a_n, \forall n$. Jono (a_n) on *ylhäältä rajoitettu*, jos vastaava pistejoukko $\{a_n\}$ on ylhäältä rajoitettu, eli on olemassa reaaliluku M siten, että $a_n \leq M, \forall n$. Vastaavasti määritellään käsite *alhaalta rajoitettu jono*.

Lause 4.2.1 Jos reaalilukujono (a_n) on nouseva ja ylhäältä rajoitettu, niin se suppenee ja $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. Jos reaalilukujono (b_n) on laskeva ja alhaalta rajoitettu, niin se suppenee ja $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$.

Todistus. (Todistusta ei kysytä tentissä.)
Täydellisyysaksiooman mukaan luku $s = \sup\{a_n\}$ on olemassa. Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $a_{n_\varepsilon} > s - \varepsilon$. Jos edellinen ei pitäisi paikkansa, olisi luku $s - \varepsilon/2$ joukon $\{a_n\}$ yläraja, mikä on mahdotonta koska s on supremum eli pienin ylärajoista. Koska jono on nouseva ja s sen yläraja, on siis $s \geq a_n \geq s - \varepsilon$ kaikille $n > n_\varepsilon$. Mutta tämä merkitsee sitä, että lauseen väite on tosi. Jono $\{b_n\}$ vastaavasti. □

Lause 4.2.2 (**Cauchy'n yleinen suppenemiskriteeri jonoille**): Reaalilukujono (a_n) suppenee, jos ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että pätee ehto

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Todistus. (Todistusta ei kysytä tentissä.)
(*ehdon välttämättömyys*) Oletamme, että (a_n) suppenee ja sen raja-arvo on a. Silloin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|a_n - a| < \varepsilon/2$, kun $n > n_\varepsilon$. Jos nyt $n > n_\varepsilon$, niin

$$|a_n - a_{n+p}| = |(a_n - a) - (a - a_{n+p})| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+p}| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \tag{4.4}$$

(*ehdon riittävyys*) Oletamme, että ehto (4.3) on voimassa. Valitsemalla $\varepsilon = 1$, ehdosta seuraa luvun $m \in \mathbb{N}$ olemassaolo siten, että $|a_m - a_{m+p}| < 1, \forall p \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa, että joukko $\{a_n\}$ on rajoitettu (sekä ylhäältä, että alhaalta). Voimme siis muodostaa uudet jonot

$$\begin{aligned} \beta_n &= \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \text{ loppujonon suppremum}, & (4.5) \\ \gamma_n &= \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \text{ loppujonon infimum}. & (4.6) \end{aligned}$$

Jono (β_n) on laskeva ja rajoitettu, joten se suppenee. Vastaavasti jono (γ_n) on nouseva ja rajoitettu, joten sekin suppenee. Olkoon $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta$ ja $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma$. Toteamme seuraavaksi, että $\beta = \gamma$. Jos olisi $\beta - \gamma = 3\varepsilon > 0$, niin jokaista n_ε kohti löytyisi $n > n_\varepsilon$ ja $m > n_\varepsilon$ siten, että $a_n > \beta - \varepsilon$ ja $a_m < \gamma + \varepsilon$, eli $a_n - a_m > (\beta - \varepsilon) - (\gamma + \varepsilon) > \varepsilon$. Tämä on mahdotonta, koska oletamme Cauchy'n suppenemisehdon (4.3) olevan voimassa. Siis $\beta = \gamma$. Koska $\beta_n \geq a_n \geq \gamma_n$ ja $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\gamma_n$, suppenee myös jono (a_n). □

4.3 Sarjan suppeneminen

Siirrymme nyt sarjoihin. Tarkastellaan reaalilukujonoa (a_n). Muodostetaan uusi jono (s_n) asettamalla

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

Määritelmä 4.3.1 Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

suppenee ja *sarjan summa* on s, jos osasummien jono $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)$ suppenee ja sen raja-arvo on s. Siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s$$

Jos sarja ei suppene, niin sanomme että se *hajaantuu*.

Esimerkki 4.3.1 Tarkastellaan geometrista sarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$. Silloin

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}. \tag{4.7}$$

Osasummien lausekkeesta näemme, että geometrinen sarja hajaantuu, kun $|q| \geq 1$ ja suppenee, kun $|q| < 1$. Suppenevan sarjan summa on

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a}{1-q} \tag{4.8}$$

///

Lause 4.3.1 (**Cauchy'n yleinen suppenemiskriteeri sarjoille**): Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, jos ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että pätee ehto

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

Todistus. Seuraa jonoja koskevasta Cauchy'n suppenemiskriteeristä. □

4.4 Majoranttiperiaate, suppenemistestejä

Lause 4.4.1 (**Majorantti- eli vertailuperiaate**). Olkoon $\sum u_k$ positiiviterminen sarja.

(a) Jos $u_k \leq a_k$ jostakin k:n arvosta alkaen ja sarja $\sum a_k$ suppenee, niin myös $\sum u_k$ suppenee.

(a') Jos $u_k \leq a_k, \forall k$, niin $\sum u_k \leq \sum a_k$. (Sanomme, että sarja $\sum a_k$ on *suppeneva majorantti*.)

(b) Jos $0 \leq b_k \leq u_k$ jostakin k:n arvosta alkaen ja sarja $\sum b_k$ hajaantuu, niin myös $\sum u_k$ hajaantuu. (Sanomme, että $\sum b_k$ on termistä k alkaen *hajaantuva minorantti*.)

Todistus. (a) Koska $\sum a_k$ suppenee, se toteuttaa Cauchy'n suppenemisehdon. Koska toisaalta eräästä k:n arvosta alkaen pätee

$$\begin{aligned} |u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| &= u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} \\ &\leq a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \\ &= |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \end{aligned} \tag{4.10}$$

myös $\sum u_k$ toteuttaa Cauchy'n suppenemisehdon ja siis suppenee. (b) vastaavasti. (a') triviaali. □

Lause 4.4.2 Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

suppenee, kun $p > 1$ ja hajaantuu, kun $p \leq 1$.

Todistus. Tapaus $p > 1$. Olkoon $u_k = 1/k^p$ ja

$$a_k = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} dx \tag{4.11}$$

Silloin $0 < u_k < a_k$ termistä $k = 2$ alkaen ja

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \tag{4.12}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{1}{p-1} \tag{4.13}$$

Siis sarja $\sum a_k$ on sarjan $\sum u_k$ suppeneva majorantti ja edellisen lauseen nojalla sarja $\sum u_k$ suppenee.

Tapaus $p \leq 1$. Olkoon

$$b_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p} dx \tag{4.14}$$

Silloin $0 < b_k < u_k$ termistä $k = 1$ alkaen ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \tag{4.15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \infty \tag{4.16}$$

Siis sarja $\sum b_k$ on sarjan $\sum u_k$ hajaantuva minorantti ja edellisen lauseen nojalla sarja $\sum u_k$ hajaantuu. □

Lause 4.4.3 (**Juuritesti**) Olkoon $\sum a_k$ positiiviterminen sarja.

(a) Jos $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ jostakin n:n arvosta alkaen, niin $\sum a_k$ suppenee.

(b) Jos $\sqrt[n]{a_n} > 1$ jostakin n:n arvosta alkaen, niin $\sum a_k$ hajaantuu.

Todistus. (a) Koska $a_n \leq r^n$ jostakin n:n arvosta alkaen ja $\sum r^k$ suppenee geometrisena sarjana, on sarjalla suppeneva majorantti. Vertailuperiaatteen nojalla sarja $\sum a_k$ suppenee. (b) Koska $a_n \geq 1$, on selvää, että sarja $\sum a_k$ hajaantuu. □

Lause 4.4.4 (**Suhdetesti**) Olkoon $\sum a_k$ positiiviterminen sarja.

(a) Jos $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, niin $\sum a_k$ suppenee.

(b) Jos $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, niin $\sum a_k$ hajaantuu.

Todistus. (a) Olkoon $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$. On olemassa $r < 1$ ja n_0 siten, että $a_{n+1} < a_n r$ kun $n > n_0$. Siis sarjalla on termistä n_0 alkaen geometrinen majorantti. (b) Vastaavasti. □

Esimerkki 4.4.1 Olkoon $a_n = n/2^n$. Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \tag{4.17}$$

joten edellisen kriteerin perusteella sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \text{ suppenee.} \tag{4.18}$$

Lause 4.4.5 (**alternoiva sarja, Leibniz**). Tarkastellaan *vuorottelevaa* (*alternoivaa*) sarjaa $\sum(-1)^{n+1}a_n$ missä $a_n \geq 0, \forall n$. Jos lukujono (a_n) on jostakin n:n arvosta alkaen aidosti vähenevä ($a_{n+1} < a_n$) ja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

suppenee.

Todistus. HT □

Esimerkki 4.4.2 Harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{4.19}$$

hajaantuu, mutta vastaava vuorotteleva sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{4.20}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots \tag{4.21}$$

suppenee.

Määritelmä 4.4.1 Sanomme, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee.

Lause 4.4.6 Itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Todistus. HT □

4.5 Transientin kassavirran nykyarvo

Seuraavassa mietimme vähittäiskaupan yritystä jonka asiakkaat (perheet) voidaan jakaa neljään ryhmään **(A) Aina** meillä asioivat, **(U) Usein** meillä asioivat, **(J) Joskus** meillä asioivat ja **(E) Ei koskaan** meillä asioivat. Kaikkiaan vaikutusalueella asuu 1000 mahdollista asiakasperhettä. Kauppias suunnitelee tulevaa toimintaa ja

tätä varten hän selvittää asiakaskunnan jakauman. Tuloksena on jakaumavektori

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_a \\ n_u \\ n_j \\ n_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Eri ryhmiin kuuluvien asiakkaiden *keskimääräinen* kuukausittainen myynti/asiakas on

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_a \\ y_u \\ y_j \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Kokonaismyynti kuukaudessa on siis

$$\begin{aligned} y_{tot} &= 400 \cdot 500 + 200 \cdot 200 + 200 \cdot 50 \\ &= n_a y_a + n_u y_u + n_j y_j \\ &= \mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{n} = 250\,000 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Myynnistä saatava kate on $k \cdot 100\% = 20\%$ eli

$$R = k\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{n} = 50\,000 \tag{4.25}$$

Palkkamenot kuukaudessa ovat

$$C = wL = 1500 \cdot 15 = 22\,500 \tag{4.26}$$

missä L on siis myyjien lukumäärä ja w on yhden myyjän keskimääräinen kuukausipalkka sivukuluineen. Kiinteät kustannukset kuukaudessa ovat $F = 10\,000$, joten voitto kuukaudessa on

$$P = R - C - F = k\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{n} - wL - F = 50\,000 - 22\,500 - 10\,000 = 17\,500 \tag{4.27}$$

Laskentakorolla $i = 0.1$ (korkointensiteetti $\rho = \ln(1+i) = 0.0953$) nettokassavirran nykyarvo on

$$NPV = \frac{P}{\rho/12} = \frac{12 \cdot 17\,500}{0.0953} \approx 2\,203\,600 \tag{4.28}$$

Seuraavaksi kauppias ottaa yhteyttä mainostoimistoon ja vertailee erilaisia markkinointikeinoja. Jos kauppias aloittaa lehtimainonnan paikallislehtien kautta, arvioidaan eri asiakasryhmissä tapahtuvan kuukauden aikana siirtymiä kuvassa 4.18 esitetyin todennäköisyyksin.

Jos alkuhetken jakauma on

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} n_{a0} \\ n_{u0} \\ n_{j0} \\ n_{e0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

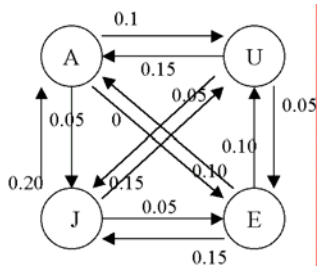


Figure 4.18: Tilojen väliset siirtymätodennäköisyydet.

niin seuraavan kuukauden jakauman odotusarvo on

$$\begin{cases} n_{a1} = 0.85n_{a0} + 0.15n_{u0} + 0.20n_{j0} + 0.10n_{e0} \\ n_{u1} = 0.10n_{a0} + 0.75n_{u0} + 0.15n_{j0} + 0.10n_{e0} \\ n_{j1} = 0.05n_{a0} + 0.05n_{u0} + 0.60n_{j0} + 0.15n_{e0} \\ n_{e1} = 0.00n_{a0} + 0.05n_{u0} + 0.05n_{j0} + 0.65n_{e0} \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_{a1} \\ n_{u1} \\ n_{j1} \\ n_{e1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 & 0.20 & 0.10 \\ 0.10 & 0.75 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.05 & 0.60 & 0.15 \\ 0.00 & 0.05 & 0.05 & 0.65 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{S}} \begin{pmatrix} n_{a0} \\ n_{u0} \\ n_{j0} \\ n_{e0} \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{S}\mathbf{n}_0 \tag{4.32}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{S}\mathbf{n}_1 \tag{4.33}$$

$$\Rightarrow \quad \vdots$$

Kuukausi kuukaudelta jakaumat muuttuvat ja lopulta päädytään tasapainoon $\mathbf{n}_T$, jossa

$$\begin{cases} \mathbf{n}_T = \mathbf{S}\mathbf{n}_T \\ n_{aT} + n_{uT} + n_{jT} + n_{eT} = N \end{cases} \tag{4.34}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0.85n_{aT} + 0.15n_{uT} + 0.20n_{jT} + 0.10n_{eT} = n_{aT} \\ 0.10n_{aT} + 0.75n_{uT} + 0.15n_{jT} + 0.10n_{eT} = n_{uT} \\ 0.05n_{aT} + 0.05n_{uT} + 0.60n_{jT} + 0.15n_{eT} = n_{jT} \\ 0.00n_{aT} + 0.05n_{uT} + 0.05n_{jT} + 0.65n_{eT} = n_{eT} \\ n_{aT} + n_{uT} + n_{jT} + n_{eT} = 1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_{aT} &= 510 \\ n_{uT} &= 304 \\ n_{jT} &= 125 \\ n_{eT} &= 61 \end{cases} \tag{4.35}$$

Jos lehtimainokset maksavat 4 000/kk, niin tasapainossa voitto kuukaudessa on

$$P = R_T - C - F - 4000 = k\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{n}_T - wL - F - 4\,000 \tag{4.36}$$

$$= 0.2\,(\,500 \quad 200 \quad 50 \quad 0\,)\begin{pmatrix} 510 \\ 304 \\ 125 \\ 61 \end{pmatrix} - 1500 \cdot 15 - 10\,000 - 4\,000 \tag{4.37}$$

$$= 64\,410 - 22\,500 - 10\,000 - 4\,000 = 27\,910 \tag{4.38}$$

Myynnin kasvu on niin merkittävä, että tulee myös varautua siihen, että työvoimaa tarvitaan suhteessa myyntiin. Siis $L = \alpha \mathbf{y}^T\mathbf{n}$. Alkutilanteesta voimme arvioida $\alpha = 15/250\,000 = 6/100000$. Korjattu voittolaskelma on

$$P = R_T - C - F - 4000 = (k - w\alpha)\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{n}_T - F - 4\,000 \tag{4.39}$$

$$= (0.2 - 0.09)\,(\,500 \quad 200 \quad 50 \quad 0\,)\begin{pmatrix} 510 \\ 304 \\ 125 \\ 61 \end{pmatrix} - 10\,000 - 4\,000 \tag{4.40}$$

$$= 35\,426 - 10\,000 - 4\,000 = 21\,426 \tag{4.41}$$

Jos uusi tasapaino saavutettaisiin heti, niin kaupan nettokassavirran nykyarvo olisi

$$NPV = \frac{P}{\rho/12} = \frac{12 \cdot 21\,426}{0.0953} \approx 2\,697\,900 \tag{4.42}$$

Kuvassa 4.19 on Excelillä simuloituna nettokassavirran kehitys alkuarvosta 17 500/kk loppuarvoon 21 400/kk. Tasapaino saavutetaan noin vuodessa. Ensimmäiset 12 kuukautta mainoskakampanjan alusta muodostavat *transientin* vaiheen, jossa markkinatilanne siirtyy aikaisemmasta tasapainosta uuteen tasapainoon.

Seuraavaksi haluamme laskea nettokassavirran nykyarvon ottaen huomioon, ettei tasapainoon päästä heti, vaan transientin vaiheen kautta. Lasku on periaatteessa selvä. Otamme summaan mukaan N kuukautta (N iso).

$$NPV_N = -4\,000 + \sum_{j=1}^{N} \frac{P_j}{(1+i)^j} \tag{4.43}$$

$$= -4\,000 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{(k - w\alpha)\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^j\mathbf{x}_0 - F - 4\,000}{(1+i)^j} \right) \tag{4.44}$$

$$= -4\,000 + (k - w\alpha)\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} (1+i)^{-j}\mathbf{S}^j \right)}_{=\mathbf{B}_N} \mathbf{x}_0 - \frac{F + 4\,000}{\rho/12} \tag{4.45}$$

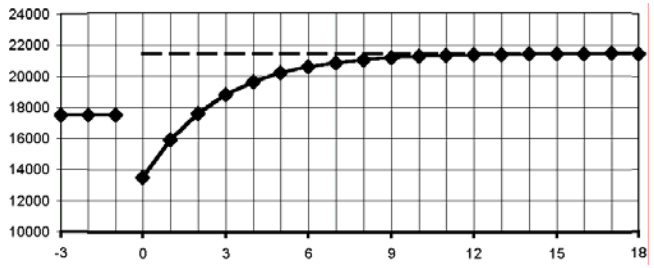


Figure 4.19: Nettokassavirta kuukausittain. Tasapaino saavutetaan noin vuoden kestävä *transientin* vaiheen jälkeen.

Matriisisumma $\mathbf{B}_N$ muistuttaa geometrista sarjaa. Voimme arvioida sen summa samoin kuin koulussa arvioitiin geometrisen sarjan summaa. Merkitään $(1+i) = r$, jolloin

$$\begin{array}{rcccccccccc} r\mathbf{B}_N &=& \mathbf{S} &+& r^{-1}\mathbf{S}^2 &+& \ldots &+& r^{-N+1}\mathbf{S}^N & & \\ -\mathbf{S}\mathbf{B}_N &=& &-& r^{-1}\mathbf{S}^2 &-& \ldots &-& r^{-N+1}\mathbf{S}^N &-& r^{-N}\mathbf{S}^{N+1} \\ \hline (r\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{B}_N &=& \mathbf{S} & & & & & & & - & r^{-N}\mathbf{S}^{N+1} \end{array}$$

Siis

$$\mathbf{B}_N = (r\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{S} - r^{-N}\mathbf{S}^{N+1}) \tag{4.46}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_N\mathbf{x}_0 = (r\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{x}_1 - r^{-N}\mathbf{x}_{N+1})$$

$$\rightarrow (r\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{x}_1, \quad N \rightarrow \infty \tag{4.47}$$

ja

$$NPV = -4\,000 + (k - w\alpha)\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}}(r\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{x}_1 - \frac{(F + 4\,000)}{\rho/12} \tag{4.48}$$

$$= 2\,678\,400 \tag{4.49}$$

Mainonnasta saatu hyöty olisi $2\,697\,900 - 2\,203\,600 = 494\,300$, jos tasapaino saavutettaisiin heti ja transientti vaihe huomioiden saatu hyöty on $2\,678\,400 - 2\,203\,600 = 474\,800$. Transientin vaikutus on siis 19 500 eli 4% kampanjan antamasta hyödystä.

Kampanjan alussa nettokassakertymässä tapahtuu notkahdus, joka on nimellisillä arvoilla laskien jakson t lopussa

$$\mathrm{ero}(t) = -4\,000 + \sum_{j=1}^{t} P_j - t \cdot 17\,500 \tag{4.50}$$

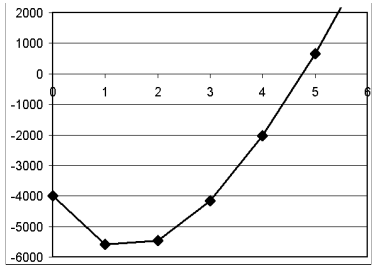


Figure 4.20: Nettokassakertymän muutos. Notkahdus on enimmillään 5600.

$$= \quad -4\,000 + 0,11 \cdot \left(\sum_{j=1}^{t} \mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j \right) - t \cdot (31\,500) \tag{4.51}$$

Sama Excel-taulu, jolla laskimme jakaumien odotusarvot, antaa nyt pohjan kassakertymän maksiminotkahduksen esittämiselle graafisesti (kuva 4.20). Ennen markkinointikampanjan aloittamista pitää siis varmistaa 5600 € rahoitus kattamaan kassakertymän notkahdus. Rahoituksen saaminen ei pitäisi olla vaikeata, sillä kokonaisuutena hanke on selvästi erittäin kannattava.

4.6 Potenssisarja, suppenemisväli

Ennen varsinaiseen aiheeseen siirtymistä kertaamme tutun asian, jka on saattanut unohtua.

Määritelmä 4.6.1 Jos k on positiivinen kokonaisluku, niin sanomme että k:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun tulo on *k-kertoma*, jota merkitsemme

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$$

Laajennamme vielä määritelmää sopimalla, että

$$0! = 1 \qquad \text{ja} \qquad 1! = 1$$

Kertomien arvot kasvavat melko nopeasti. Suoraan määritelmästä saa arvot: $2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5\,040,\ 8! = 40\,320,\ 9! = 362\,880,$

$10! = 3\,628\,800.$

Seuraavaksi tarkastelemme erityistä sarjaa, jossa termi on muotoa

$$a_k = c_k(x-a)^k. \tag{4.52}$$

Sarja ei yleensä suppene kaikilla x:n arvoilla. Niillä x:n arvoilla, joilla sarja suppenee, se määrittelee x:n funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{4.53}$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots \tag{4.54}$$

Emme nyt yritä ratkaista potenssisarjan suppenemiskysymystä täydellisesti. Seuraavat säännöt riittävät käytännössä ongelmien hallitsemiseen.

Lause 4.6.1 (a) Jos potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ suppenee kun $x = b$, niin se suppenee myös aina, kun $|x-a| < |b-a|$.

(b) Jos potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ hajaantuu kun $x = B$, niin se hajaantuu myös aina, kun $|x-a| > |B-a|$.

Todistus. (a) Olkoon $|x-a|/|b-a| = r < 1$. Koska $\sum c_k(b-a)^k$ suppenee, on $\lim_{k\to\infty} c_k(b-a)^k = 0$. On siis olemassa $M \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|c_k(b-a)^k| < 1, \text{ aina kun } k > M \tag{4.55}$$

Silloin

$$|c_k(x-a)^k| = \left| \frac{c_k(b-a)^k(x-a)^k}{(b-a)^k} \right| \tag{4.56}$$

$$= |c_k(b-a)^k| \left| \frac{x-a}{b-a} \right|^k < r^k, \text{ kun } k > M \tag{4.57}$$

Sarjalla $\sum c_k(b-a)^k$ on siis suppeneva majorantti $\sum r^k$ (termistä M alkaen).

(b) Vastaavalla tavalla. □

Määritelmä 4.6.2 Jos on olemassa reaaliluku $R > 0$ (tai $R = \infty$) niin, että sarja suppenee jos $|x-a| < R$, ja hajaantuu jos $|x-a| > R$, niin lukua R sanotaan sarjan *suppenemissäteeksi*.

Lause 4.6.2 Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$. Jos raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = L$$

on olemassa, niin voimme erottaa kaksi tapausta:

(1) Jos $L = 0$, niin sarjan suppenemissäde on $R = \infty$, eli sarja suppenee kaikikka $x \in \mathbb{R}$.

(2) Jos $0 < L < \infty$, niin sarjan suppenemissäde on $R = 1/L$ ja sarja suppenee, kun $|x-a| < R = 1/L$ ja hajaantuu, kun $|x-a| > R = 1/L$.

Todistus. Todistamme vain suppenemisosan tapauksesta (2).
Olkoon

$$|x-a| = \frac{1}{L+2\varepsilon} < \frac{1}{L},$$

missä $\varepsilon > 0$. Silloin jostakin indeksin arvosta $k = k_\varepsilon$ alkaen on

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| < L+\varepsilon \tag{4.58}$$

$$\Rightarrow \quad |c_k| < c_{k_\varepsilon}(L+\varepsilon)^{k-k_\varepsilon} = \gamma_\varepsilon(L+\varepsilon)^k \tag{4.59}$$

Silloin indeksin arvosta $k = k_\varepsilon$ alkaen on

$$|c_k(x-a)^k| < \gamma_\varepsilon\left|\frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon}\right|^k \tag{4.60}$$

joten tarkastelemallamme potenssisarjalla on suppeneva geometrinen majorantti (termistä $k = k_\varepsilon$ alkaen). □

Esimerkki 4.6.1 Määritä suppenemissäde sarjalle

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(x-2)^k \tag{4.61}$$

Suora lasku antaa

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k}\right| \tag{4.62}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^k\cdot 2}{k!(k+1)}\cdot\frac{k!}{2^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2}{k+1}\right| = 0 \tag{4.63}$$

Joten $R = \infty$ ja potenssisarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. ///

Esimerkki 4.6.2 Määritä suppenemissäde sarjalle

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k}(x-2)^k \tag{4.64}$$

Suora lasku antaa

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}/(k+1)}{2^k/k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k}{k+1}\right| = 2 \tag{4.65}$$

Suppenemissäde on $R = 1/2$, joten potenssisarja suppenee, kun

$$|x-2| < \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 1.5 < x < 2.5 \tag{4.66}$$

///

4.7 Taylorin ja MacLaurinin sarjat

Potenssisarja $\sum c_k(x-a)^k = f(x)$ määrittelee x:n funktion. Seuraavaksi toteamme mikä yhteys potenssisarjalla on sen määrittelemän funktion derivaattoihin

$$f(a), f'(a), f''(a), f^{(3)}(a), \ldots$$

Potenssisarjan suppenemisvälin $|x-a| < R$ sisäpisteissä funktio $f(x)$ voidaan derivoida derivoimalla sarjaa. Tämä ei ole ihan itsestään selvä asia. Oikeastaan pitäisi ensin osoittaa, että

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{d}{dx}c_k(x-a)^k\right)$$

Sivuutamme nyt tämän tarkastelun ja hyväksymme annettuna asiana, että potenssisarjan määrittelemä funktio voidaan suppenemisvälillä $|x-a| < R$ derivoida sarjasta ja näin saatu derivaattafunktion potenssisaja suppenee samalla välillä $|x-a| < R$. Siis

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots \\
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \ldots \\
f''(x) &= 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + 5\cdot 4c_5(x-a)^3 + \ldots \\
f^{(3)}(x) &= 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(x-a)^2 + \ldots \\
f^{(4)}(x) &= 4\cdot 3\cdot 2c_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2c_5(x-a) + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3c_6(x-a)^2 + \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ylläolevat ovat totta erityisesti, kun $x = a$ eli

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0 = 0! \cdot c_0 \\ f'(a) &= c_1 = 1! \cdot c_1 \\ f''(a) &= 2 \cdot c_2 = 2! \cdot c_2 \\ f^{(3)}(a) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3 = 3! \cdot c_3 \\ f^{(4)}(a) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4 = 4! \cdot c_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Saamme siis

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \tag{4.67}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \text{ kun } |x-a| < R \tag{4.68}$$

Sarjaa (4.68) sanotaan Taylorin sarjaksi ja jos $a = 0$, niin sarjaa sanotaan *MacLaurinin sarjaksi*.

Eräiden tuttujen funktioiden Taylorin sarja -esitykset löytyvät taulukkokirjoista.

Esimerkki 4.7.1

$$f(x) = e^x \tag{4.69}$$
$$f'(x) = e^x \tag{4.70}$$
$$f''(x) = e^x \tag{4.71}$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow e^x = f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \tag{4.72}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \qquad (R = \infty) \tag{4.73}$$

Esimerkki 4.7.2

$$f(x) = \ln(1+x) \tag{4.74}$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \tag{4.75}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \tag{4.76}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \tag{4.77}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} \tag{4.78}$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow \ln(1+x) = f(x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots \tag{4.79}$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \tag{4.80}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k \qquad (R = 1) \tag{4.81}$$

Esimerkki 4.7.3

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \tag{4.82}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \tag{4.83}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-3/2} \tag{4.84}$$
$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^3}(1+x)^{-5/2} \tag{4.85}$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}(1+x)^{-7/2} \tag{4.86}$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 \dots \tag{4.87}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}x^k \qquad (R = 1) \tag{4.88}$$

4.8 Taylorin polynomi

5. Dynaamisen ilmiön mallinnus

5.1 Differentiaaliyhtälö

5.1.1 Taustaa ja merkintöjä

Differentiaaliyhtälöiden avulla mallinnetaan ilmiöitä, jotka ovat ajan kuluessa muuttuvia. Jos y on ilmiöön liittyvä muuttuja, joka muuttuu ajan kuluessa siten, että $y = f(t)$, niin sen muutosnopeuden antaa f:n derivaatta $f'(t)$. Merkitsemme tätä muuttujan y muutosnopeutta y':lla. (Siis $y' = f'(t)$.)

Esimerkki 5.1.1 Jos y on radioaktiivisen aineen määrä säiliössä, niin radioaktivisten ytimien määrä vähenee hajoamisten kautta nopeudella, joka on suoraan verrannollinen ytimien määrään. Siis

$$y' = -\alpha y. \tag{5.1}$$

Yhtälö (5.1) on esimerkki differentiaaliyhtälöstä, joka sitoo muuttujan y ja sen derivaata y' toisiinsa. Standardiratkaisu, jota käsittelemme myöhemmin johtaa ratkaisuun

$$y(t) = Ce^{-\alpha t}. \tag{5.2}$$

Vakion C arvo ei määräydy differentiaaliyhtälöstä (5.1), vaan se riippuu radioaktiivisten ytimien määrästä alkuhetkellä (sillä selvästi $y(0) = C$). Radioaktiivinen hajoaminen on satunnaisilmiö, mutta ytimien suuresta määrästä johtuen, malli kuvaa ilmiötä varsin tarkasti.

Kuva 5.21 esittää funktion f kuvaajaa. Derivaatta antaa tangentin kulmakertoimen. Siten $f'(x) = \tan\alpha$. Derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5.3}$$

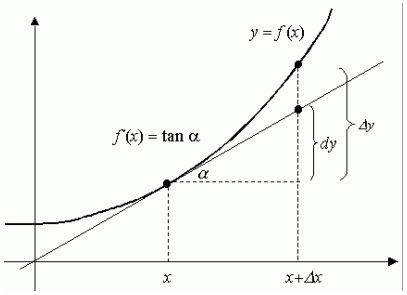


Figure 5.21: Funktion $x \mapsto f(x)$ kuvaaja.

Määritellään x:n muutosta Δx vastaava funktion $y = f(x)$ arvon muutos $\Delta y = \Delta f$ ja differentiaali $dy = df$ seuraavasti

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{5.4}$$
$$dy = f'(x)\Delta x \tag{5.5}$$

Arvon muutos ja differentiaali saavat yleensä eri arvon (kuten kuvasta 5.21 näemme). Jos Δx on kuitenkin pieni, niin arvon muutos ja differentiaali ovat lähes samat. Tämän näkee seuraavalla raja-arvotarkastelulla:

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} - 1 \tag{5.6}$$
$$= \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{f'(x)} - 1 \longrightarrow 0, \text{ kun } \Delta x \to 0. \tag{5.7}$$

Kun Δx on hyvin pieni, sanomme sitä differentiaalisen pieneksi, ja merkitsemme sitä $\Delta x = dx$. Kun x:n muutos on differentiaalisen pieni, on siis

$$dy = f'(x)dx \tag{5.8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' \tag{5.9}$$

Derivaatan esittäminen differentiaalien suhteena, $y' = \frac{dy}{dx}$, ja differentiaalien erottaminen, $dy = y'dx$, auttavat mallien muodostamisessa. Yleensä tarkastellaan lyhyttä aikaväliä dt ja esitetään lauseke muuttujan arvon muutokselle aikavälin dt kuluessa.

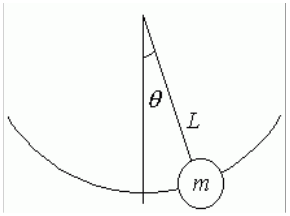


Figure 5.22: Heiluri.

Esimerkki 5.1.2 Yritys tuo uuden tuotteen markkinoille. Karkeasti arvioidaan markkinointiponnistusten olevan sellaisia, että viikon mittaisena aikavälinä 5% niistä, jotka eivät periodin alussa käyttäneet tuotetta, siirtyvät tuotteen käyttäjiksi. Toisaalta saman periodin kuluessa 1% niistä, jotka periodin alussa käyttivät tuotetta, vaihtavat eri tuotteeseen. Muuttujana on nyt suhteellinen markkinaosuus y, joka saa arvoja nollasta yhteen. Markkinaosuuden kehittymistä aikavälin dt aikana voidaan kuvata seuraavasti (aikavälin pituus dt ilmoitetaan nyt viikkoina)

$$\begin{array}{rcl} dy & = & \text{uudet} \quad - \quad \text{luopujat} \\ dy & = & 0.05(1-y)\,dt \quad - \quad 0.01y\,dt \end{array}$$

$$\Leftrightarrow y' + 0.06y = 0.05 \tag{5.10}$$

Diff.yhtälö (5.10) on helppo ratkaista (kuten pian näemme), mutta se antaa kovin yksinkertaistetun kuvan ilmiöstä. Jos lisäämme malliin piirteitä, jotka tekevät siitä uskottavamman, niin syntyvä diff.yhtälö tulee vaikeaksi käsitellä. Tämä ristiriitatilanne on käytännössä enemmän sääntö kuin poikkeus. Otamme vielä yhden esimerkin fysiikan alalta.

Esimerkki 5.1.3 Harrastelijafyysikko tutkii heilureita. Koska hänen teoreettiset taitonsa massapisteen mekaniikasta eivät aluksi riitä asian ratkaisemiseen, hän alkaa tarkkailla erilaisia heilureita. Fyysikko tekee havainnoistaan muistiinpanoja. Hänen tulee päättää, millaisia asioita hän kirjoittaa muistiin näkemistään heilureista. Hän päättää kirjata heilurin massan m, pituuden L, heilahdusajan T ja heilahduksen laajuuden A. Kerättyään laajahkon materiaalin fyysikko päätyy johtopäätökseen, että heilahdusajalla ja heilurin pituudella on yhteys, mutta muilla suureilla ei ole.

Opiskeltuaan massapisteen dynamiikkaa, harrastelija oppii, että heilurin liikkeen kannalta oleellinen muuttuja on heilahduskulma θ. Mekaniikan peruslait johtavat nyt yhtälöön

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\sin\theta, \tag{5.11}$$

missä g on maan vetovoiman normaalikiihtyvyys. D.y. (5.11) on vaikea ratkaistava. Yleensä heilahduskulma on niin pieni, että $\sin\theta \approx \theta$. Silloin oikea d.y. (5.11) voidaan korvata "väärällä" mallilla

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\theta. \tag{5.12}$$

Viimeinen yhtälö on helppo ratkaista, ja siksi sitä usein käytetään heilurin mallintamiseen. Malli (5.12) on hyvä, jos heilahduskulma on pieni (muutama aste), ja silloin se antaa heilahdusajaksi $T = \sqrt{g/L}$. Siis heilahdusaika on riippumaton heilurin massasta, kuten harrastelijamme postuloi. Asia nähdään jo yhtälöstä (5.11), sillä se ei sisällä massaa m. **Vaikka emme osaa ratkaista yhtälöä (5.11), se silti kertoo meille ilmiöstä oleellisen seikan.**

Dynaamisen mallin muodostamista helpottaa, jos ilmiöön liittyy selvät "päämuuttujat", ja muiden tekijöiden vaikutus on vähäinen. Fyysikko voi aina sijoittaa heilurinsa tyhjiöön ja muutenkin minimoida ulkoisten tekijöiden vaikutuksen. Taloudellisten ilmiöiden mallinnuksessa tämä ei koskaan ole mahdollista. Mikään malli ei täysin vastaa todellisuutta, eikä malleilta saa täydellisyyttä vaatiakaan. Jos malli on sellainen, että se antaa keinon ymmärtää ja ohjata taloudellisia tapahtumia järkevällä tavalla, niin malli on hyvä.

Dynaamisen mallin muodostamisessa voi erottaa seuraavia vaiheita:

Ilmiö: Dynaaminen malli on aina malli reaalimaailman ilmiölle. Oppikirjojen esimerkit saattavat helposti saada tämän asian unohtumaan. Ilmiö on olemassa, kun se osataan tunnistaa taustastaan. Ilmiö on olemassa vaikka sitä ei, ymmärrettäisikään. Revontulet on ilmiö, jota ei täysin ymmärretä, ja pallosalama on ilmiö, jonka olemassaolokin on epävarma.

Esimerkki: radioaktiivisuus.

Teoria: Ilmiö liittyy aina johonkin teoreettiseen viitekehykseen, josta voi-daan saada ilmiön kuvaamiseen tarvittavat *käsitteet*, *muuttujat* ja *lait*. Teoriasta yleensä voidaan myös muodostaa *esikäsitys* siitä, millainen malli luultavasti on. Esikäsitys saattaa suuresti vaikuttaa siihen, miten malli lopulta muodostetaan.

Esimerkki: Käsitteitä: ydin, α-, β- ja γ-säteily, ytimen hajoaminen. Laki: ytimen hajoamisen todennäköisyys tietyn mittaisen aikavälin aikana on riippumaton ytimen ulkopuolisista ilmiöistä ja siitä miten pitkään ydin on ollut nykyisessä muodossaan olemassa. Esikäsitys: aktiivisuus laskee ajan kuluessa.

Mallin yhtälö: Ensimmäinen muodostettava yhtälö kuvaa mallin muuttujien ja niiden pienten muutosten (differentiaalien) välisiä riippuvuuksia. Tämä differentiaaleja koskeva yhtälö yleensä muutetaan muuttujia ja niiden derivaattoja koskevaksi yhtälöksi. Yhtälöä muodostettaessa tehdään aina oletuksia ja yksinkertaistuksia mm. sen suhteen, mitä muuttujia malliin sisällytetään ja mitä muuttujia jätetään mallista pois.

Esimerkki: Jos $N(t)$ on radioaktiivisten ytimien määrä hetkellä t, niin N:n differentiaali (muutos) on suoraan verrannollinen radioaktiivisten ytimien määrään ja tarkasteltavan aikavälin dt pituuteen. Siis

$$dN = -\lambda N\,dt$$

$$\Leftrightarrow N' = -\lambda N. \tag{5.13}$$

Ratkaisu: Saadun yhtälön ratkaiseminen on puhtaasti matemaattinen tehtävä, ja usein oppimateriaalissa keskitytään vain tähän.

Esimerkki: Diff.yhtälön (5.13) ratkaisu on

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

missä N_0 on radioaktiivisten ytimien määrä alkuhetkellä.

Tulkinta: Saatua ratkaisua ei koskaan saisi hyväksyä kritiikittömästi, vaan sen järkevyys tulee harkita ilmiöstä tiedetyn kokemustiedon valossa. Siitä, että yhtälö on ratkaistu matemaattisesti moitteettomalla tavalla ei seuraa, että malli kuvaisi välttämättä oikein ilmiötä.

5.1.2 Määritelmiä

Systeemin dynamiikkaa joudutaan usein kuvaamaan yhtälöillä, jotka sisältävät muuttujia ja niiden derivaattoja. Tällaista yhtälöä sanotaan *differentiaaliyhtälöksi*. Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \tag{5.14}$$

$$\Leftrightarrow F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{5.15}$$

Differentiaaliyhtälön *ratkaisu* on funktio $y = f(x)$, joka on määritelty ja jatkuva reaalilukuvälillä. *Osittaisdifferentiaaliyhtälössä* on usean muuttujan funktio ja sen osittaisderivaattoja.

Esimerkki 5.1.4

a) Funktio $y = f(x) = e^{2x}$ on DY:n $y' - 2y = 0$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$, koska
$$y' = f'(x) = 2e^{2x} = 2y \Rightarrow y' - 2y = 0$$

b) DY:n $yy' + x = 0$ eräs ratkaisu on $y = \sqrt{1-x^2}$ välillä $[-1, 1]$, sillä
$$yy' = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x$$

c) DY:n $y' = x^{-2}$ ratkaisuja ovat funktiot $y = -x^{-1} + C$, missä C on vakio. Jokainen C:n vakioarvo antaa ratkaisun. Ratkaisuja on siis ääretön määrä!

d) DY:llä $\underbrace{(y')^2 + x^2y^2 + 1}_{\geq 1} = 0$ ei ole ratkaisua!

e) DY:n $(y')^2 + y^2 = 0$ ainoa ratkaisu on vakiofunktio $y(t) = 0$.

Differentiaaliyhtälön *kertaluku* on yhtälössä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku. (Esim. $y'' + x^3y' = 0$ on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja $y''' - x^2 = 0$ on kolmannen kertaluvun diff.yhtälö.) DY on *lineaarinen*, jos se on muotoa

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x), \tag{5.16}$$

missä $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ ovat x:n funktioita. Esimerkiksi diff.yhtälö

$$y'' + x^3y' + x^2 = \sin x$$

on lineaarinen.

Kertalukua n olevan DY:n ratkaisu sisältää yleensä n parametria (vakiota). Tällaista ratkaisua sanotaan *yleiseksi ratkaisuksi*. Kun parametreille valitaan arvot, saadaan DY:n jokin *yksityisratkaisu*. Jos ratkaisua ei saada yleisestä ratkaisusta millään parametrien arvoilla, sanotaan ratkaisua *erikoisratkaisuksi*.

Esimerkki 5.1.5 DY:n $(y')^2 - xy' + y = 0$ yleinen ratkaisu on $y = Cx - C^2$. DY:n toteuttaa myös erikoisratkaisu $y = x^2/4$, jota ei saada yleisestä ratkaisusta millään parametrin C arvolla.

5.2 I kertaluvun differentiaaliyhtälöistä

5.2.1 Separoituva DY

DY on *separoituva*, jos se voidaan saattaa muotoon

$$\begin{aligned} \text{DY} \Leftrightarrow g(y)y' &= f(x) \\ \Leftrightarrow g(y)\frac{dy}{dx} &= f(x) \\ \Leftrightarrow g(y)dy &= f(x)dx \end{aligned} \tag{5.17}$$

josta yleinen ratkaisu saadaan integroimalla

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \tag{5.18}$$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(x) + C. \tag{5.19}$$

Perustelu: Malli kuvaa muuttujien x ja y muutosten suhdetta. Yhtälön (5.17) vasen puoli on funktion $G(y)$ differentiaali ja oikea puoli on funktion $F(x)$ differentiaali. Kun muuttujien x ja y arvoissa tapahtuu differentiaalisen pieni muutos, niin differentiaaliyhtälön (5.17) mukaan muutokset ovat sellaisia, että G:n ja F muutokset (differentiaalit) ovat yhtäsuuret. Jos nyt vakio C valitaan siten, että (5.19) on voimassa tarkastelun alussa, niin yhtälö on voimassa koko muutoksen ajan. □

Esimerkki 5.2.1 Ratkaise DY: $y' = -xy$.

$$\begin{aligned} DY \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= -xy \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= -x\,dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int -x\,dx + C_1 \\ \Leftrightarrow \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + C_1 \\ \Leftrightarrow |y| &= e^{-\frac{x^2}{2}+C_1} \\ \Leftrightarrow y &= Ce^{-x^2/2} \end{aligned}$$

Esimerkki 5.2.2 Ratkaise DY: $y' = \frac{x\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\begin{aligned} DY \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{x\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y}} &= \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + C \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{1-y} &= -\sqrt{1-x^2} + C \qquad (5.20) \end{aligned}$$

Huomaa, että yhtälö (5.20) on tehtävän implisiittinen ratkaisu. Ratkaisu voidaan esittää myös eksplisiittisessä muodossa

$$y = 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{1-x^2} - C)^2$$

Usein on makuasia, kumpi muoto on havainnollisempi.

Esimerkki 5.2.3 Ratkaise DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1}$$

Differentiaaliyhtälö on selvästi separoituva

$$\begin{aligned} DY \Leftrightarrow \int (y^4+1)dy &= \int (x+1)dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}y^5 + y &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

Ratkaisu saatiin helposti, mutta se on taas implisiittinen.

Esimerkki 5.2.4 Ratkaise DY

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{x-y}}{1+e^x} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{e^x e^{-y}}{1+e^x} \\ \Leftrightarrow \int e^y dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + C \\ \Leftrightarrow e^y &= \ln(1+e^x) + C \\ \Leftrightarrow y &= \ln(\ln(1+e^x) + C) \end{aligned}$$

(Huomaa, että jos $C < 0$, niin $y(x)$ on määritelty vain, kun $x > \ln(e^{-C} - 1)$)

5.2.2 Muotoa $y' = f(\frac{y}{x})$ oleva DY

Jos DY on muotoa $y' = f(\frac{y}{x})$, niin sanomme sen olevan *homogeenifunktion määräämän*. Homogeenifunktion määräämä DY voidaan palauttaa separoituvaksi sijoituksella

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = u \quad &\Leftrightarrow \quad y = ux \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \end{aligned}$$

Kun tämä sijoitetaan DY:öön, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}x + u &= f(u) \\ \frac{du}{dx}x &= f(u) - u \\ \int \frac{du}{f(u)-u} &= \int \frac{dx}{x} + C \end{aligned}$$

Esimerkki 5.2.5 Ratkaise DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2}$$

Sijoitetaan yhtälöön

$$\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y &=& ux \\ y' &=& u'x + u \end{array} \right.$$

Sijoutuksen jälkeen saamme

$$\begin{aligned} \text{DY} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x + u &= \frac{(ux)^2 + xux - x^2}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x + u &= u^2 + u - 1 \\ \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2-1} &= \int \frac{dx}{x} + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| &= \ln|x| + \ln C_1 \\
\Leftrightarrow \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| &= \ln x^2 + \ln C_2 \\
\Leftrightarrow \frac{u-1}{u+1} &= Cx^2 \\
\Leftrightarrow u &= \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2} \\
\Leftrightarrow y &= ux = \frac{x+Cx^3}{1-Cx^2}
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.2.6 Ratkaise DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y-x}$$

DY on homogeenifunktion määräämää muotoa, sillä RHS $= 2/(\frac{y}{x} - 1) = f(\frac{y}{x})$. Siis sijoitetaan

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} &= u \Leftrightarrow y = ux \\
\frac{dy}{dx} &= u + x\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

jolloin DY menee muotoon

$$\begin{aligned}
\text{DY} &\Leftrightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{2x}{ux-x} = \frac{2}{u-1} \\
&\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-u-2}{1-u} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1-u}{u^2-u-2}du = \int \frac{1}{x}dx + C_1 \\
&\Leftrightarrow \int \left(\frac{-1/3}{u-2} + \frac{-2/3}{u+1}\right)du = \ln|x| + C_1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\ln|u-2| - \frac{2}{3}\ln|u+1| = \ln|x| + \ln C_2 \\
&\Leftrightarrow \ln|(u-2)(u+1)^2| = \ln|\frac{1}{x^3}| + \ln C_3 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)^2 = \frac{C}{x^3}
\end{aligned}$$

5.3 Lineaarinen 1. kertaluvun diff.yhtälö

ma5c.tex Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY on muotoa

$$y' + f(x)y = g(x). \qquad \text{(DY)}$$

Tätä vastaava *homogeeninen* diff.yhtälö on

$$y' + f(x)y = 0. \qquad \text{(HY)}$$

Homogeeninen yhtälö (HY) on separoituva. Yhtälön (HY) ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
\text{HY} &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -f(x)dx \\
&\Leftrightarrow \ln|y| = -\int f(x)dx + \ln C_1 \\
&\Leftrightarrow y = Ce^{-\int f(x)dx} \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Kaavaa (5.21) tärkeämpää on muistaa, että lineaarista DY:tä vastaava homogeeninen HY separoituu aina.

Lause 5.3.1 Jos $y = y_0(x)$ on homogeenisen yhtälön (HY) yleinen ratkaisu ja $y = y_1(x)$ on yhtälön (DY) eräs yksityisratkaisu, niin yhtälön (DY) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

Perustelu: Sijoitetaan $y(x)$ yhtälön (DY) vasenpaan puoleen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
& y' + f(x)y \\
= \; & (y_0' + y_1') + f(x)(y_0 + y_1) \\
= \; & \underbrace{y_0' + f(x)y_0}_{=0} + \underbrace{y_1' + f(x)y_1}_{=g(x)} = g(x).
\end{aligned}$$

Lauseen perusteella siis ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön yleisen ratkaisun löytämiseksi tulee määrittää vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu sekä alkuperäisen yhtälön jokin yksityisratkaisu. Ensimmäinen tehtävän osa on yleensä helppo, sillä HY separoituu aina. DY:n yksityisratkaisun löytäminen on usein vaikeampaa. Ennen kuin pohdimme yksityisratkaisun määrittämistä, käymme läpi yksinkertaisen esimerkin siitä, miten edellä ollutta lausetta käytetään.

Esimerkki 5.3.1 $y' - y = x$

(A) Etsitään ensin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu y_0.

$$\begin{aligned}
\text{(HY)} &\Leftrightarrow \frac{dy_0}{dx} - y_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dy_0}{y_0} = \int dx + C_1 \\
&\Leftrightarrow \ln|y_0| = x + C_1 \\
&\Leftrightarrow y_0 = Ce^x
\end{aligned}$$

(B) Toiseksi etsimme täydellisen yhtälön yksityisratkaisun.

$$y_1 = -x - 1$$

Systemaattinen menetelmä yksityisratkaisun löytämiseksi esitetää heti esimerkin jälkeen. Nyt tyydymme tarkistamaan, että arvauksemme on kelvollinen. $({y_1}' - y_1 = (-1) - (-x-1) = x$ (Ok).) Lauseen mukaan DY:n yleinen ratkaisu on nyt $y = y_0 + y_1$ eli

$$y = Ce^x - x - 1.$$

yksityisratkaisun löytäminen

Yksityisratkaisun löytämiseksi on kaksi keinoa, joista ensimmäinen (yrite) on helpoissa tapauksissa nopea ja tehokas, mutta ei aina onnistu. Toinen keino (vakion variointi) antaa aina ratkaisun, mutta on hieman työläämpi. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{5.22}$$

(B1) Yksityisratkaisun etsiminen yritteellä
"Arvataan" yhtälön (5.22) yksityisratkaisu lausekkeen $g(x)$ perusteella. Arvaus sisältää vakioita, jotka pitää määrittää sijoittamalla yrite yhtälöön. "Arvaaminen" tuntuu epämatemaattiselta, mutta taitava laskija oppii pian hyvksi arvaajaksi niin, että lopulta kyse on lähinnä vakoiden arvojen laskemisesta. Seuraava taulukko auttaa oikean yritteen löytämisessa:

$g(x)$	yrite y_1
$ax + b$	$y_1 = Ax + B$
$ax^2 + bx + c$	$y_1 = Ax^2 + Bx + c$
ae^{kx}	$y_1 = Ae^{kx}$

Yritteen teossa on kaksi selvää sääntöä: (1) yritefunktio on samaa muotoa, kuin $g(x)$, (2) yritefunktio ei saa olla samaa muotoa, kuin homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun jokin termi. Jos $y_1(x)$ olisi luonnollinen yrite, mutta toinen sääntö estää sen käytön, niin yritetään funktiota $xy_1(x)$.

Esimerkki 5.3.2 $y' - y = e^{kx}, k \neq 1$.

Homogeeniyhtälö on

$$\begin{aligned} HY &\Leftrightarrow {y_0}' - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0 = Ce^x \end{aligned}$$

Yksityisratkaisun löytämiseksi teemme yritteen

$$y_1 = Ae^{kx} \Rightarrow {y_1}' = Ake^{kx}$$

Sijoitetaan yrite DY:öön.

$$\begin{aligned} y_1 \to DY &\Rightarrow {y_1}' - y_1 = e^{kx} \\ &\Leftrightarrow Ake^{kx} - Ae^{kx} = e^{kx} \\ &\Leftrightarrow A(k-1)e^{kx} = e^{kx} \\ &\Leftrightarrow A = 1/(k-1) \\ &\Rightarrow y_1 = \frac{1}{k-1}e^{kx} \end{aligned}$$

DY:n yleinen ratkaisu on siis

$$y = Ce^x + \frac{1}{k-1}e^{kx}.$$

Esimerkki 5.3.3 $y' - y = e^x$.

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on sama kuin edellisessä esimerkissä.

$$\begin{aligned} HY &\Leftrightarrow {y_0}' - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0 = Ce^x \end{aligned}$$

Yritteeksi ei nyt kelpaa $y_1 = Ae^x$. Teemme siis yritteen

$$y_1 = Axe^x \Rightarrow {y_1}' = A(1+x)e^x$$

Sijoitetaan yrite DY:öön.

$$\begin{aligned} y_1 \to DY &\Rightarrow {y_1}' - y_1 = e^x \\ &\Leftrightarrow A(1+x)e^x - Axe^x = e^x \\ &\Leftrightarrow A = 1 \\ &\Rightarrow y_1 = xe^x \end{aligned}$$

DY:n yleinen ratkaisu on siis

$$y = Ce^x + xe^x.$$

(B2) Yksityisratkaisun määritys vakiota varioimalla
Homogeeniyhtälön (HY) yleisen ratkaisun

$$y_0 = Ce^{-\int f(x)dx}$$

vakioparametri C korvataan x:n funktiolla $C(x)$ siten, että alkuperäinen yhtälö (DY) toteutuu. Siis

$$y = C(x)e^{-\int f(x)dx} \tag{5.23}$$

$$\Rightarrow y' = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} \tag{5.24}$$

Sijotetaan (5.23) ja (5.24) alkuperäiseen yhtälöön (5.22)

$$\begin{aligned}
& y' + f(x)y = g(x) \\
\Leftrightarrow\ & C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x) \\
\Leftrightarrow\ & C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx} \\
\Leftrightarrow\ & C(x) = \int \left[g(x)e^{\int f(x)dx}\right] dx
\end{aligned}$$

Alkuperäisen yhtälön yksityisratkaisu on nyt

$$y_1 = \int \left[g(x)e^{\int f(x)dx}\right] dx \cdot e^{-\int f(x)dx} \tag{5.25}$$

Yleinen ratkaisu on tapana kirjoittaa muotoon

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^h g dx + C\right], \text{missä} \tag{5.26}$$

$$h = \int f(x)dx \tag{5.27}$$

Esimerkki 5.3.4 $y' - y = e^{2x}$.
Nyt

$$\begin{aligned}
f(x) &= -1 \\
g(x) &= e^{2x} \\
h(x) &= \int f(x)dx = \int -1dx = -x
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-h}\left[\int e^h g dx + C\right] \\
&= e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x} dx + C\right] \\
&= e^{x}\left[e^{x} + C\right] \\
&= Ce^{x} + e^{2x}
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.3.5 $y' - y = e^{2x}$.

Ratkaistaan edellinen tehtävä ilman kaavaa (5.26). Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_0{}' - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = Ce^x$$

Vakiota varioiden teemme yritteen

$$\begin{aligned}
y_1 &= C(x)e^x \\
y_1{}' &= C'(x)e^x + C(x)e^x
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Sijoitetaan nämä DY:öön

$$\begin{aligned}
DY \ \Leftrightarrow\ & y' - y = e2x && (5.29)\\
\Leftrightarrow\ & C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^{2x} && (5.30)\\
\Leftrightarrow\ & C'(x)e^x = e^{2x} && (5.31)\\
\Leftrightarrow\ & C'(x) = e^x && (5.32)\\
\Leftrightarrow\ & C(x) = e^x && (5.33)\\
\Leftrightarrow\ & y_1 = C(x)e^x = e^{2x} && (5.34)
\end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$y = y_0 + y_1 = Ce^x + e^{2x}$$

Edelläolevat kaksi esimerkkiä osoittavat, että kaavaa (5.26) ei tarvitse osata ulkoa, kunhan ymmärtää vakion varioinnin idean ja pystyy suorittamaan tarvittavat laskut (5.28)–(5.34). Toisaalta kaavojen soveltaminen antaa tuloksen nopeasti.

5.4 Sovelluksia

Myöhemmin tässä monisteessa sovellusesimerkit ovat usein kovin teknisiä ja esittävät vain asian teknisen toteutuksen. Tässä kappaleessa sovellusten osalta yritetään tuoda esiin mallin muodostamisen yleisiä piirteitä.

Mallia (DY:öä) muodostettaessa tehdään aina joukko oletuksia, jotka myöhemmin helposti unohdetaan. Usein oletukset ovat niin itsestään selviä, että niiden jatkuva toistelu tuntuisi typerältä. Sovelluksesta riippuu miten oletukset esitetään.

Tärkeintä nyt on, että opiskelija tottuu jokaisen mallin yhteydessä aina pohtimaan seuraavia seikkoja:

Luonnolliset ehdot: mitkä ovat ne, usein ääneen lausumattomat oletukset, jotka mallia laadittaessa tehdään.

Rajat: missä on raja, jonka takana malli ei enää toimi. (Kysymys on tässä muotoiltu varsin epämääräisesti, ja se saa sovelluksesta riippuen yleensä muodon, jossa kysytään, millä alueilla mallin parametrien arvot saavat olla, jotta malli antaisi oikeita tuloksia.)

Uskottavuus: onko mallin ennustama käyttäytyminen uskottavaa. On tärkeätä tajuta se sinänsä aivan yksinkertainen tosiasia, että matemaattisesti täysin oikein ratkaistu DY saattaa sovelluksen kannalta olla epäonnistunut kuvaus tutkittavasta ilmiöstä.

Pysyvyys: onko mallin parametrit vakioita? Onko mallin kuvaama lainalaisuus pysyvää? Voiko mallilla ennustaa tulevaisuutta?

5.4.1 Lääkkeen määrä elimistössä

Olkoon $N(t)$ elimistössä hetkellä t olevan lääkeaineen määrä. Oletamme, että munuaiset poistavat lääkettä $\lambda \cdot 100\%$ aikayksikössä. (Huomaa, että aikayksikkö voi nyt olla vuorokausi, tunti tai sekunti. Jos aikayksikön kohdalla nyt erehdytään, saattaa tunaroinnista olla fataaleja seurauksia!) Tarkastellaan lyhyttä aikaväliä dt. Sen aikana lääkeaineen määrä elimistössä muuttuu määrällä

$$dN = -\lambda N dt \tag{5.35}$$

Yhtälö (5.35) on selvästikin differentiaaliyhtälö, joka on helppo separoida ja ratkaista.

$$\begin{aligned}
(5.35) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt + C_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|N| = -\lambda t + \ln N_0 \\
&\Leftrightarrow \quad N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

Jos aikayksikkö on tunti, niin aikavakion λ yksikkö on 1/tunti, sillä eksponentin kaavassa (5.36) pitää olla laaduton.

Esimerkki 5.4.1 Potilaan massa on 92kg ja hänelle annetaan lääkettä, jota halutaan olevan elimistössä vähintää 50μg/kg ja enintään 75μg/kg. Elimistö poistaa lääkeestä 3% tunnissa. Miten lääkettä tulee potilaalle antaa?

Ensimmäinen lääkeannos on enintään $92\text{kg} \cdot 75\frac{\mu\text{g}}{\text{kg}} = 6.9\text{mg}$. Aikavakio on nyt $\lambda = 0.03$. Lääkeaineen pitoisuus laskee ylärajalta alarajalle ajassa T, joka mallin (5.36) mukaan ratkaistaan yhtälöstä

$$\begin{aligned}
(5.36) \quad &\Leftrightarrow \quad N = N_0 e^{-\lambda T} \\
&\Leftrightarrow \quad 50\frac{\mu\text{g}}{\text{kg}} = 75\frac{\mu\text{g}}{\text{kg}} \cdot e^{-0.03 \cdot T} \\
&\Leftrightarrow \quad 50/75 = e^{-0.03 \cdot T} \\
&\Leftrightarrow \quad T = \frac{\ln 50 - \ln 75}{-0.03} = 13.52(\text{tuntia})
\end{aligned}$$

Käytännössä lääkettä voidaan siis antaa joko 12 tunnin tai 8 tunnin välein. 12 tunnissa lääkeainetta poistuu kehosta

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-0{,}03 \cdot 12} = 30.2\%$$

eli ainemääränä $0.302 \cdot 6.9\text{mg} = 2.1\text{mg}$.

Malliin (5.36) ei pidä suhtautua kritiikittömšti. Joidenkin lääkeaineiden kohdalla sitä on turvallista soveltaa, mutta aina niin ei suinkaan ole. Mallin soveltaminen on luonnollista silloin, kun yksinkertainen korkolasku antaa vääriä tuloksia. Tällainen

tehtävä on esimerkiksi selvittää miten kauan lääkeainetta on kehossa lääkityksen lopettamisen jälkeen. Mallissa oletetaan, että λ on vakio, ja että sen arvo tunnetaan riittävän tarkasti. Todellisuudessa λ riippuu potilaan tilasta, ja sen arvo voi hoidon aikana muuttua merkittävästi. Jos $\lambda = 2$ eli elimistö poistaa lääkeaineesta 200% tunnissa (!!!), niin se ei tarkoita sitä, että lääke poistuisi puolessa tunnissa.

Esimerkki 5.4.2 Potilaan elimistössä on 1.0mg nukutusainetta. Seuraava lääkitys voidaan aloittaa vasta, kun nukutusaineen määrä on laskenut tasolle 1.5μg. Milloin seuraava lääkitys voidaan aloittaa, kun nukutusaine poistuu elimistöstä aikavakiolla $\lambda = 2.0$. (Siis 200% tunnissa!?)

Kysytty aika T ratkaistaan mallista (5.36) sijoittamalla siihen $N_0 = 1.0\text{mg}$ ja $N = N(T) = 1.5\mu$g

$$\begin{aligned}
&1.5 \cdot 10^{-3}\text{mg} = 1.0\text{mg} \cdot e^{-2T} \\
\Leftrightarrow \quad &T = \frac{\ln(1.5 \cdot 10^{-3})}{-2} = 3.25 \\
\Leftrightarrow \quad &T = 3 \text{ tuntia } 15 \text{ minuuttia}
\end{aligned}$$

5.4.2 Eksponentiaalinen kasvu

Edellinen esimerkki käsitteli määrän pienenemistä. Muutos oli suoraan verrannollinen määrään. Jos muuttujan y kasvuun liittyvä muutos on vastaavalla tavalla suoraan verrannollinen määrään, niin

$$\begin{aligned}
dy &= \rho y dt \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \rho dt \\
y &= y_0 e^{\rho t} \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

ρ on jatkuvan korkolaskun korkointensiteetti (growth rate). Tässä yhteydessä olisi ehkä luontevampaa puhua kasvuasteesta. Kirkointensiteetti ρ ja vuotuinen korkokanta i liittyvät toisiinsa yhtälön $e^{\rho} = 1 + i$ mukaan. Siis $\rho = \ln(1 + i)$ ja $i = e^{\rho} - 1$.

Esimerkki 5.4.3 Imatran voima arvioi Suomen energian kulutuksen kasvavan vuosittain 15%. Samaan aikaan EU arvioi energian kulutuksen kasvavan vuosittain 4%. Suomen osuus EU-maiden energian kulutuksesta on nyt noin 5%. Missä vaiheessa IVO arvelee Suomen kuluttavan puolet EU:n energiasta?

Olkoon $E_S(t) =$ Suomen energian kulutus ja $E_E(t) =$ Euroopan energian kulutus. Esitettyjen arvioiden perusteella kasvuintensiteetit ovat

$$\begin{aligned}
e^{\rho_S} &= 1.15 \Rightarrow \rho_S = 0.1398 \\
e^{\rho_E} &= 1.04 \Rightarrow \rho_E = 0.0392
\end{aligned}$$

Tehtävässä annettujen tietojen perusteella

$$\begin{aligned} E_S(t) &= E_S(0)\cdot e^{\rho_S t} \\ E_E(t) &= E_E(0)\cdot e^{\rho_E t} \\ E_S(0) &= 0.05\cdot E_E(0) \end{aligned}$$

Kun Suomen energian kulutus on puolet Euroopan energian kulutuksesta hetkellä T, niin

$$\begin{aligned} E_S(T) &= 0.5\cdot E_E(T) \\ E_S(0)\cdot e^{\rho_S T} &= 0.5\cdot E_E(0)\cdot e^{\rho_E T} \\ 0.05\cdot e^{\rho_S T} &= 0.5\cdot e^{\rho_E T} \\ e^{(\rho_S-\rho_E)T} &= 0.5/0.05 \\ e^{0.1006\cdot T} &= 10 \\ T &= ln(10)/0.1006 \\ T &= 22.9(\text{vuotta}) \end{aligned}$$

Esimerkki 5.4.4 Valmistelemme vuosiennustetta yritykselle, jonka myynnin volyymi (tonneina) kasvaa arviolta 10% vuodessa, raaka-aineiden ja työpanoksen hinta kasvaa vuodessa noin 7% ja lopputuotteen hinnan arvellaan nousevan noin 15% vuodessa. Miten vuodessa muuttuu käyttökateprosentti, joka nyt on 20%, kun valmisvaraston kiertonopeus on 2/vuosi ?

$$\begin{aligned} \text{käyttökate\%} &= \frac{\text{käyttökate}}{\text{liikevaihto}}\cdot 100\% \\ &= \frac{\text{liikevaihto - menot + varastojen kasvu}}{\text{liikevaihto}}\cdot 100\% \qquad (5.38) \end{aligned}$$

Merkitään kasvavia suureita seuraavasti

$$\begin{aligned} p(t) &= p_o e^{\rho_p t} = \text{tuotteen yksikköhinta}, \qquad (5.39) \\ n(t) &= n_o e^{\rho_n t} = \text{tuotteen tuotantonopeus (yks./vuosi)}, \qquad (5.40) \\ c(t) &= c_o e^{\rho_c t} = \text{tuotteen tuotantokustannus (mk/yks.)}. \qquad (5.41) \end{aligned}$$

Tämän vuoden tuloslaskelman eriä voidaan kuvata mallin (5.39)-(5.41) mukaisesti seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{liikevaihto} &= \int_{-1}^{0} p(t)n(t-0.5)dt \\ &= p_o n_o e^{-\rho_n/2}\int_{-1}^{0} e^{(\rho_p+\rho_n)t}dt \\ &= \frac{p_o n_o}{(\rho_p+\rho_n)\sqrt{1+i_n}}\left(1-e^{-(\rho_p+\rho_n)}\right) \\ &= \frac{p_o n_o}{(\rho_p+\rho_n)\sqrt{1+i_n}}\left(1-\frac{1}{(1+i_p)(1+i_n)}\right) = 0.8497\cdot p_o n_o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{menot} &= \int_{-1}^{0} c(t)n(t)dt \\ &= c_o n_o \int_{-1}^{0} e^{(\rho_c+\rho_n)t}dt \\ &= \frac{c_o n_o}{\rho_c+\rho_n}\left(1-e^{-(\rho_c+\rho_n)}\right) \\ &= \frac{c_o n_o}{\rho_c+\rho_n}\left(1-\frac{1}{(1+i_c)(1+i_n)}\right) = 0.9228\cdot c_o n_o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var. kasvu} &= \int_{-0.5}^{0} c(t)n(t)dt - \int_{-1.5}^{-1} c(t)n(t)dt \\ &= c_o n_o\left(\int_{-0.5}^{0} e^{(\rho_c+\rho_n)t}dt - \int_{-1.5}^{-1} e^{(\rho_c+\rho_n)t}dt\right) \\ &= \frac{c_o n_o}{\rho_c+\rho_n}\left(1-e^{-(\rho_c+\rho_n)/2}-e^{-(\rho_c+\rho_n)}+e^{-3(\rho_c+\rho_n)/2}\right) \\ &= \frac{c_o n_o}{\rho_c+\rho_n}\left((1-e^{-(\rho_c+\rho_n)/2})(1-e^{-(\rho_c+\rho_n)})\right) = 0.0722\cdot c_o n_o \end{aligned}$$

Sijoittamalla edelliset tulokset kaavaan (5.38)saadaan käyttökateprosentille lauseke

$$kk\%_o = \frac{0.8497\cdot p_o n_o + 0.0722\cdot c_o n_o - 0.9228\cdot c_o n_o}{0.8497\cdot p_o n_o}\cdot 100\% \qquad (5.42)$$

$$kk\%_o = \left(1-1.0011\cdot\frac{c_o}{p_o}\right)\cdot 100\% \qquad (5.43)$$

Koska nyt käyttökateprosentti on 20%, niin

$$\begin{aligned} & 1-1.0011\cdot\frac{c_o}{p_o} = 0.2 \\ \Leftrightarrow\quad & c_o/p_o = 0.7991 \qquad (5.44) \end{aligned}$$

Vuoden kuluttua käyttökateprosentti lasketaan täsmälleen samalla tavalla paitsi, että kaavassa (5.43)c_o on kasvanut 7% ja p_o on kasvanut 15%. Sijoittamalla nämä uudet arvot ja kaava (5.44) kaavaan (5.43) saadaan käyttökateprosentin uudeksi arvoksi

$$\begin{aligned} kk\%_1 &= \left(1-1.0011\cdot\frac{1.07\cdot c_o}{1.15\cdot p_o}\right)\cdot 100\% \\ &= \left(1-1.0011\cdot\frac{1.07}{1.15}\cdot 0.7991\right)\cdot 100\% \\ &= 25.9\% \end{aligned}$$

Kritiikkiä: Kertymien laskeminen integroimalla virtaamista, johtaa monimutkaisiin laskelmiin. Lausekkeet ovat epähavainnollisa, vaikka lopputulos onkin uskottava. Mallin käyttöä yleisessä tapauksessa puoltaa se, että mallin avulla saadaan selville c_o/p_o.

Käytännössä tämä suhde tiedetään. Jos suhde on sama kuin mallin ennustama, niin mallin soveltaminen tuntuu hyväksyttävältä. Jos suhde poikkeaa mallin ennustamasta, niin malli tulee hylätä.

Edellä

$$\begin{aligned}\text{varaston kasvu} &= 0.0722 \cdot c_o n_o = 0.0722 \cdot 0.7991 \cdot p_o n_o \\ &= \frac{0.0722 \cdot 0.7991}{0.8497} \cdot 0.8497 \cdot p_o n_o \\ &= 0.0679 \cdot \text{liikevaihto}\end{aligned}$$

Pidetään tätä suhdetta tunnettuna ja ratkaistaan tehtävä yksinkertaisella korkolaskulla. Merkitään tämän vuoden tuotannon määrää N_o:lla ja vuoden keskihintoja C_o:lla ja P_o:lla. Käyttökateprosentti on

$$\begin{aligned}kk\%_0 &= \frac{P_o N_o + 0.0679 \cdot P_o N_o - C_o N_o}{P_o N_o} \cdot 100\% \\ &= (1.0679 - C_o/P_o) \cdot 100\%\end{aligned}$$

Koska tänä vuonna käyttökate% on 20%, saamme edellisestä yhtälöstä, että $C_o/P_o = 0.8679$. Ensi vuonna siis uusi arvo on

$$\begin{aligned}kk\%_1 &= (1.0679 - C_1/P_1) \cdot 100\% \\ &= \left(1.0679 - \frac{1.07 \cdot C_o}{1.15 \cdot P_o}\right) \cdot 100\% \\ &= \left(1.0679 - \frac{1.07}{1.15} \cdot 0.8679\right) \cdot 100\% \\ &= 26.0\%\end{aligned}$$

Yksinkertainen korkolasku antaa siis melkein saman tuloksen, joten eksponentiaalisesti kasvaviin virtoihin perustuva malli ei tässä tapauksessa tunnu kovin tarpeelliselta. Lisäksi malli olettaa kaikkien kasvulukujen pysyvän vakioina kahden vuoden ajan, mikä on melko epäuskottavaa.

5.4.3 Logistinen kasvu

Pieni eläinpopulaatio kasvaa eksponentiaalisesti yhtälön $dN = ANdt$. Toisaalta populaation kasvaessa, tulee vastaan raja, jossa ymäritö ei enää pysty antamaan riittävästi ravintoa ja suojaa populaatiolle. P.F.Verhulst mallinsi populaation kasvua yhtälöllä

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2 \tag{5.45}$$

Figure 5.23: Kun $t \to \infty$, niin $N(t) \to \frac{A}{B}$.

Yhtälön viimeinen termi saa aikaan sen, että populaation kasvaessa sen kasvunopeus pienenee. Yhtälö separoituu seuraavasti

$$\begin{aligned}(5.45) \quad &\Leftrightarrow \int \frac{dN}{N(A-BN)} = \int dt + C_1 \\ &\Leftrightarrow \int \frac{A^{-1}}{N} dN + \int \frac{BA^{-1}}{A-BN} dN = \int dt + C_1 \\ &\Leftrightarrow A^{-1} \ln N - A^{-1} \ln |A - BN| - C_1 = t \\ &\Leftrightarrow e^{At} = C \frac{N}{A-BN}\end{aligned}$$

Kun $t = 0$, niin $N(0) = N_o$ ja $C = \frac{A - BN_o}{N_o}$. Siis

$$e^{At} = \frac{N(t)}{A - BN(t)} \cdot \frac{A - BN_o}{N_o} \tag{5.46}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = \frac{A}{B + (AN_o^{-1} - B)e^{-At}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B} \tag{5.47}$$

Ratkaisu on parhaiten ymmärrettävissä funktion $N = N(t)$ kuvaajan avulla (ks kuva(5.23)).

Esimerkki 5.4.5 Muodostetaan yksinkertainen malli teknisen innovaation käyttöönotolle. Olkoon

$$\begin{aligned}R &= \text{yritysten lukumäärä,} \\ N(t) &= \text{innovaatiota käyttävien yritysten määrä.}\end{aligned}$$

Malli perustuu ajatukseen, jonka mukaan yritys alkaa käyttää uutta innovaatiota yleensä vasta kun se vertaa omaa toimintaansa kilpailijaan, joka jo käyttää innovaatiota. Tämän todennäköisyys on suoraan verrannollinen lukuun $N(R-N)$. Siis

$$\begin{aligned} dN &= k \cdot N \cdot (R-N) \cdot dt \\ \frac{dN}{dt} &= \underbrace{kR}_{A} N - \underbrace{k}_{B} N^2. \end{aligned}$$

Malli on samaa muotoa kuin (5.45), joten

$$N(t) = \frac{R}{1 + (RN_o^{-1} - 1)e^{-kRt}} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} R.$$

Innovaation käyttöönottoa kuvaa siis logistinen käyrä (5.23). Mallin mukaan siis kaikki yritykset lopulta ottavat teknisen innovaation käyttöön.

5.4.4 Auton hinta.

Auton hinnalle ei voi muodostaa sellaista mallia, joka kuvaisi oikein sekä kalliin urheiluauton, että halvan kansanauton hintaa, niiden käyttöaikana. Lähtökohdaksi otamme naivin mallin (M1)

$$dP = -aPdt, \tag{5.48}$$

jonka ratkaisu on

$$P(t) = P_o e^{-at}. \tag{5.49}$$

Ratkaisu (5.49) ei tyydytä kahdesta syystä. Ensiksi ratkaisun mukainen hinta menee nollaan ajan kasvaessa rajatta. Tämä ei vastaa todellisuutta, sillä yleensä autolla on loppuun ajettunakin romuarvo. Toiseksi ratkaisun mukaan hinnan suhteellinen muutosnopeus $P'(t)/P(t) = -a$ on vakio, mikä ei lainkaan vastaa empiiristä aineistoa. Yleensä auton hinnan suhteellinen muutosnopeus (%/vuosi) on voimakkain alussa ja pienenee myöhemmin.

Parannamme mallia vaiheittain. Mallin parantelu johtaa, yleensä sarjaan yhä monimutkaisempia malleja, jotka sopivat yhä paremmin dataan, mutta joiden ratkaisut myös samalla monimutkaistuvat ja muuttuvat epähavainnollisiksi tai vaikeiksi soveltaa. Lukija tarkatkoon tätä ilmiötä, kun seuraavassa yritämme parantaa mallia.

Tartumme ensin romuarvon ongelmaan. Teemme sen helpon ratkaisun, että sanomme autolla olevan romuarvon b, ja käyttöarvon $P-b$, joka vähenee naivin mallin (5.48) mukaisesti. Siis malli (M2) on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P-b) &= -a(P-b) \\ \frac{dP}{dt} &= -a(P-b) \\ \int \frac{dP}{P-b} &= \int -adt + C_1 \\ \ln|P-b| &= -at + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= Ce^{-at} + b \\ P(t) &= (P_o - b)e^{-at} + b \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned} P'(t)/P(t) &= \frac{-a(P_o-b)e^{-at}}{(P_o-b)e^{-at}+b} \\ &= -a + \frac{ab}{(P_o-b)e^{-at}+b} \end{aligned}$$

Siis $P'(0)/P(0) = -a(1-b/P_o)$ ja $P'/P \longrightarrow 0$, kun $t \to \infty$. Suhteellinen muutosnopeus ei siis enää ole vakio. Jotta saisimme mallin, joka sopii havaintojen kanssa, merkitsemme käyttöarvon suhteellista muutosta lausekkeella $-af(t)$, missä painofunktio f on jatkuva, vähenevä ja $f(0) = 1$. Olkoon $F(t) = \int_0^t f(u)du$, jolloin F(0)=0. Saamme kolmannen mallin (M3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P-b) &= -af(t)(P-b) \\ \int \frac{dP}{P-b} &= \int -af(t)dt + C_1 \\ \ln|P-b| &= -aF(t) + C_1 \\ P &= Ce^{-aF(t)} + b \\ P(t) &= (P_o-b)e^{-aF(t)} + b \end{aligned}$$

Painofunktioksi käyvät esimerkiksi

$$\begin{aligned} f_1(t) = e^{-kt} &\Rightarrow F_1(t) = k(1-e^{-kt}) \\ &\Rightarrow P_1(t) = (P_o-b)e^{-ak(1-e^{-kt})} + b, \end{aligned} \tag{5.50}$$

ja

$$\begin{aligned} f_2(t) = \frac{1}{1+kt} &\Rightarrow F_2(t) = \frac{1}{k}\ln(1+kt) \\ &\Rightarrow P_2(t) = (P_o-b)(1+kt)^{-a/k} + b. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Ratkaisut on saatu samalla periaatteella käyttäen hieman toisistaan eroavia painofunktioita. Ratkaisuissa on silti merkittävä ero, sillä

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} P_1(t) &= (P_o-b)e^{-ak} + b > b \text{ ja} \\ \lim_{t\to\infty} P_2(t) &= b, \end{aligned}$$

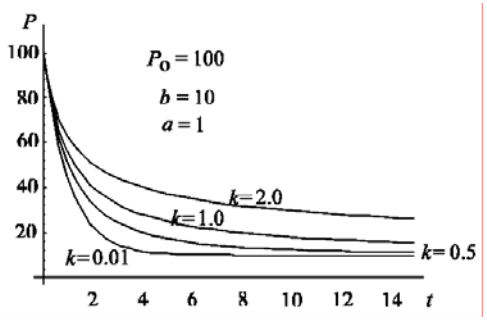


Figure 5.24: P=P(t), kun $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 1.0$ ja $k = 2.0$.

joten painofunktion f_1 käyttö johtaa ratkaisuun, jossa auton käyttöarvo ei koskaan kulu kokonaan pois. Tämä ei tunnu kovin uskottavalta, joten toistaiseksi parhaalta tuntuu malli (5.51), jonka DY on

$$dP = \frac{-a(P-b)}{1+kt}dt. \tag{5.52}$$

Parametri a määräytyy hinnan muutoksesta ensimmäisen vuoden aikana ja parametri b on auton romuarvo, joka myös voidaan melko luotettavasti arvioida auton ostohetkellä. Jäljelle jää parametri k, jonka merkitystä voi tulkita kuvasta (5.24), jossa on piirretty hintakäyrät, kun $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 1.0$ ja $k = 2.0$. Kuva osoittaa, että vaikka periaatteessa käyttöarvo meneekin aina nollaan, niin tämä saattaa olla niin hidasta, että se ei tapahdu realistisessa ajassa.

5.5 Numeerinen simulointi

Joskus differentiaaliyhtälön täydellinen ratkaiseminen on vaikeata, mutta silti haluamme tietää ratkaisufunktion arvon tietyllä hetkellä tulevaisuudessa. Tämä voidaan tehdä numeerisesti. Ratkaisemme yhden esimerkin kahdella tavalla, mutta emme kehitä ideaa pidemmälle, koska asiaa käsitellään lisää muilla kursseilla. Valitsemme esimerkki DY:ksi helposti separoituvan ja ratkeavan DY:n, jotta voimme verrata numeerisesti saamaamme ratkaisua "oikeaan" ratkaisuun.

Esimerkki 5.5.1 Mikä on funktion $y(x)$ arvo hetkellä $x = 2$, kun $y(0) = 1$ ja y toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y' - 2xy = 2x^3 - 2x. \tag{5.53}$$

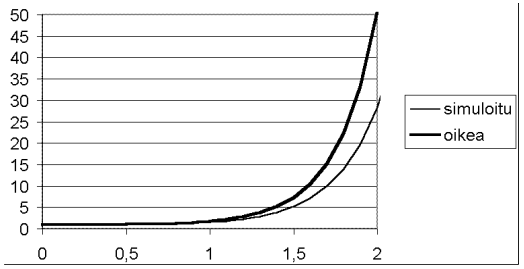


Figure 5.25: Differentiaaliyhtälön $y' - 2xy = 2x^3 - 2x$ oikea ja epätarkasti simuloitu ratkaisu.

Helposti näkee sijoittamalla, että "oikea" ratkaisu on $y(x) = e^{x^2} - x^2$.

Lähestytään ongelmaa kirjoittamalla DY muotoon

$$\begin{aligned} y' - 2xy &= 2x^3 - 2x && (5.54)\\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= 2x^3 - 2x + 2xy && (5.55)\\ \Leftrightarrow dy &= dx(2x^3 - 2x + 2xy) && (5.56) \end{aligned}$$

Jos $h > 0$ on pieni ja merkitsemme $x_t = t \cdot h$ ja $y_t = y(x_t)$, niin (5.56) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} y_{t+1} - y_t &= h(2x_t^3 - 2x_t + 2x_t y_t) && (5.57)\\ \Leftrightarrow y_{t+1} &= y_t + h(2x_t^3 - 2x_t + 2x_t y_t) && (5.58) \end{aligned}$$

Valitaan askelpituudeksi $h = 0.1$ ja asetetaan alkuarvot

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 && (5.59)\\ y_0 &= 1 && (5.60)\\ h &= 0.1 && (5.61) \end{aligned}$$

ja toistetaan askeleita

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + h && (5.62)\\ y_{t+1} &= y_t + h(2x_t^3 - 2x_t + 2x_t y_t) && (5.63) \end{aligned}$$

Kahdenkymmenen askeleen jälkeen saamme $y(2) \approx y_{20} = 28.2$. ("Oikea" arvo on $y(2) = e^{2^2} - 2^2 = 50.59815$.) Tulos on siis virheellinen. Lyhennämme askelta asettamalla $h = 0.01$, jolloin 200 askeleen jälkeen saamme $y(2) \approx y_{200} = 47,26$. Tulos on parempi, mutta edelleen virheellinen. ///

Esimerkki 5.5.2 Haetaan lausekkeet korkeammille derivaatoille

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2x^3 - 2x + 2xy(x) && (5.64)\\ y''(x) &= 6x^2 - 2 + 2y(x) + 2xy'(x) && (5.65)\\ y'''(x) &= 12x + 4y'(x) + 2xy''(x) && (5.66)\\ y^{(4)}(x) &= 12 + 6y''(x) + 2xy''' && (5.67) \end{aligned}$$

Nyt voimme soveltaa Taylorin polynomia numeeriseen laskentaan

$$y_{t+1} = y_t + \sum_{k=1}^{N} \frac{y^{(k)}(x_t)}{k!} h^k \qquad (5.68)$$

Algoritmi

$$\begin{aligned} &\text{alkuarvot} && (5.69)\\ x_0 &= 0 && (5.70)\\ y_0 &= 1 && (5.71)\\ h &= 0.05 && (5.72)\\ &\text{toistetaan} && (5.73)\\ y1_t &= 2x_t^3 - 2x_t + 2x_t y_t && (5.74)\\ y2_t &= 6x_t^2 - 2 + 2y_t + 2x_t y1_t && (5.75)\\ y3_t &= 12x_t + 4y1_t + 2x_t y2_t && (5.76)\\ y4_t &= 12 + 6y2_t + 2x_t y3_t && (5.77)\\ y_{t+1} &= y_t + hy1_t + h^2 y2_t/2 + h^3 y3_t/6 + h^4 y4_t/24 && (5.78)\\ x_{t+1} &= x_t + h && (5.79) \end{aligned}$$

Neljänkymmenen toistokerran jälkeen saadaan $y(2) \approx y_{40} = 50,5952$. Tulos on tällä kertaa varsin hyvä. ///

Esimerkissä tiesimme oikean ratkaisun, jolloin oli helppo tarkistaa numeerisen ratkaisun tarkkuus. Yleensä numeerisia menetelmiä joudutaan käyttämään, kun tarkkaa ratkaisua ei osata muodostaa. Silloin virhearvion tekeminen on hankalampaa. Jätämme näiden asioiden tarkastelun numeerisen matematiikan kurssille.

5.6 2. kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen DY

Määrittelemme ensin joitakin termejä, jotka tulevat jatkossa toistuvasti esiin.

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (lyhennettynä "II k.l:n DY") on yhtälö, joka sitoo toisiinsa muuttujan x ja funktiot $y(x)$, $y'(x)$ ja $y''(x)$. Se on siis muotoa

$$f(x, y, y', y'') = 0.$$

Kertalukua 2 olevan DY:n ratkaisu sisältää yleensä 2 parametria (vakiota). Tällaista ratkaisua sanotaan *yleiseksi ratkaisuksi*. Kun parametreille valitaan arvot, saadaan DY:n jokin *yksityisratkaisu*. Jos ratkaisua ei saada yleisestä ratkaisusta millään parametrien arvoilla, sanotaan ratkaisua *erikoisratkaisuksi*.

Esitetty määritelmä on tavattoman yleinen, eikä näin laajalle yhtälöjoukolle ole helppo löytää yhteisiä ominaisuuksia. Rajoitamme yhtälöjoukkoa seuraavasti.

Lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on yhtälö, joka on lineaarinen y:n ja sen derivaattojen suhteen. Se on siis muotoa

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \qquad (5.80)$$

Sanallisen määritelmän mukaan yhtälö voisi myös olla muotoa $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Jakamalla tämä lausekkella $a(x)$ saadaan muoto (5.80), missä $f(x) = b(x)/a(x)$, $g(x) = c(x)/a(x)$ ja $h(x) = d(x)/a(x)$. DY:n lineaarisuus on hyvin suuri rajoitus edelliseen. Tästä johtuen ne on paljon helpompi ratkaista.

Lineaarinen, vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on edellisen erikoistapaus, jossa y':n ja y:n kertoimet ovat vakioita. Se on siis muotoa

$$y'' + ay' + by = h(x) \qquad (5.81)$$

Yhtälöiden (5.80) ja (5.81) oikeasta puolesta, eli lausekkeesta $h(x)$ käytetään usein nimitystä **RHS** (eli **Right Hand Side**).

Jos yhtälön (5.80) tai (5.81) RHS on identtisesti nolla, niin yhtälö on **homogeeninen**. Jokaiseen lineaariseen DY:öön liittyy sitä vastaava homogeeninen yhtälö, joka saadaan asettamalla RHS nollaksi.

Tässä luvussa tarkastelemme II k.l:n DY:n ratkaisemista. Aloitamme helpoimmasta tapauksesta, eli II k.l:n lineaarisesta vakiokertoimisesta DY:stä. Tämä tapaus tulee oppia täydellisesti. Tämän jälkeen esitellään ei-lineaarisiin ja epälineaarisiin DY:hin liittyvää teoriaa ja esimerkkejä. Epälineaarisen DY:n ratkaiseminen on usein toivottoman vaikea tehtävä, joka onnistuu vain numeerisesti simuloimalla. Suurin osa taloudellisista malleista on lineaarisia ja vakiokertoimisia. Toisaalta taloudellisissa ilmiöissä on melkein aina piirteitä, joiden mallinnus onnistuu vain epälineaarisilla DY:llä. Siten epälineaarisuus on suuri haaste tutkimukselle.

Tällä kurssilla ei opita epälineaarisen DY:n ratkaisemista, mutta myöhemmissä luvuissa opimme tutkimaan epälineaarisen DY:n tasapainoratkaisun stabiilisuutta, joka on taloudellisten ilmiöiden kannalta hyvin mielekäs kysymys, ja jonka ratkaiseminen onnistuu mainiosti tällä kurssilla opituilla taidoilla.

5.6.1 II k.l:n vakiokertoiminen lineaarinen DY

Aloitamme kahdella kaikkia lineaarisia differentiaalyhtälöitä koskevalla lauseella.

Lause 5.6.1 Yhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = y_o(x) + y_1(x)$$

missä $y = y_o(x)$ on homogeeniyhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ yleinen ratkaisu ja $y = y_1(x)$ on alkuperäisen yhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ eräs yksityisratkaisu.

Perustelu: Olkoon $y_2(x)$ yhtälön (5.80) yleinen ratkaisu. Siinä on siis kaksi vakiota C_1 ja C_2. Kun näille vakioille annetaan arvot (esim. $C_1 = C_2 = 0$), niin saadaan yksityisratkaisu $y_1(x)$. Funktio $y_o(x) = y_2(x) - y_1(x)$ on homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu ja $y_o(x) + y_1(x)$ on lauseen mukainen muoto yleiselle ratkaisulle. □

Lause 5.6.2 Jos $y = y_1(x)$ ja $y = y_2(x)$ ovat homogeeniyhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ sellaisia yksityisratkaisuja, että niiden suhde $y_1(x)/y_2(x)$ ei ole vakio, niin yhtälön $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ yleinen ratkaisu on muotoa

$$y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita.

Perustelu: sivuutetaan. □

Lauseet 5.6.1 ja 5.6.2 ovat voimassa myös ei-vakiokertoimiselle lineaariselle yhtälölle (5.80). Seuraavassa tarkastelemme vakiokertoimista lineaarista differentiaaliyhtälöä (DY) ja sitä vastaavaa homogeeniyhtälöä (HY)

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= h(x), && \text{(DY)} \\ y'' + ay' + by &= 0. && \text{(HY)} \end{aligned}$$

Etsitään HY:n yleistä ratkaisua tekemällä yrite

$$y = e^{rx} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y' &=& re^{rx} \\ y'' &=& r^2 e^{rx} \end{array} \right.$$

Kun yrite sijoitetaan homogeeniyhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} HY \quad &\Leftrightarrow \quad y'' + ay' + by = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(r^2 + ar + b) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (r^2 + ar + b) = 0$$

karakteristinen yhtälö

Yrite on siis HY:n yksityisratkaisu, jos vakion r arvo on karakteristisen yhtälön juuri. Olkoot r_1 ja r_2 karakteristisen yhtälön juuret. Erotamme kolme tapausta:

1) Erisuuret reaalijuuret:
Jos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ja $r_1 \neq r_2$, niin homogeeniselle saadaan kaksi ratkaisua

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ ja } y_2 = e^{r_2 x}.$$

Koska niiden suhde $y_1/y_2 = e^{(r_1 - r_2)x}$ ei ole vakio, on HY:n yleinen ratkaisu

$$\underline{\underline{y_o = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}}$$

2) Kaksoisjuuri:
Jos $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$, niin eräs HY:n yksityisratkaisu on

$$y_1 = e^{rx}$$

Etsitään toista yksityisratkaisua tekemällä yrite

$$y_2 = xe^{rx}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y' &=& e^{rx} + rxe^{rx} \\ y'' &=& 2re^{rx} + r^2 xe^{rx} \end{array} \right.$$

Sijoitetaan yrite HY:ön

$$\begin{aligned} HY \quad &\Leftrightarrow \quad y'' + ay' + by = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}\big((r^2 x + 2r) + (a + arx) + (bx)\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} x + (2r + a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad r = -a/2 \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö on tosi, sillä r on karakteristisen yhtälön kaksoisjuuri, eli

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{a}{2}.$$

Kokeilemamme yrite $y_2 = xe^{rx}$ on siis HY:n yksityisratkaisu. Koska suhde $y_2/y_1 = x$ ei ole vakio, on HY:n yleinen ratkaisu

$$\underline{\underline{y_o = C_1 e^{rx} + C_2 xe^{rx}}}$$

3) Kompleksijuuret:
Jos r_1 ja r_2 eivät ole reaalilukuja, ne ovat toistensa liittolukuja ja voimme merkitä $r_1 = \alpha + i\beta$ ja $r_2 = \alpha - i\beta$. Silloin

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{r_2 x} &= e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}e^{r_1 x} + \frac{1}{2}e^{r_2 x} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 &= \frac{1}{2i}e^{r_1 x} - \frac{1}{2i}e^{r_2 x} = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

ovat HY:n yksityisratkaisuja ja koska niiden suhde ei ole vakio, on HY:n yleinen ratkaisu

$$\underline{\underline{y_o = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}} \qquad (5.82)$$

Esimerkki 5.6.1 Koska kompleksiluvuilla laskeminen ei aina vakuuta kaikkia lukijoita, tarkistamme ratkaisun (5.82) suoralla sijoituksella. α on karakteristisen yhtälön ratkaisun reaaliosa ja β on ratkaisun imaginaariosa. Siis

$$\begin{aligned} \alpha &= -a/2, \\ \beta &= (\sqrt{-a^2 + 4b})/2. \end{aligned}$$

Kun funktio (5.82) sijoitetaan homogeeniyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} \text{HY} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \;& b(y) + a(y') + (y'') \\ \Leftrightarrow \quad 0 = \;& b(C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x) \\ & + a((C_1\alpha + C_2\beta)e^{\alpha x}\cos\beta x + (C_2\alpha - C_1\beta)e^{\alpha x}\sin\beta x) \\ & + (C_1\alpha^2 + 2C_2\alpha\beta - C_1\beta^2)e^{\alpha x}\cos\beta x \\ & + (C_2\alpha^2 - 2C_1\alpha\beta - C_2\beta^2)e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \Leftrightarrow \quad 0 = \;& (bC_1 + aC_1\alpha + aC_2\beta + C_1\alpha^2 + 2C_2\alpha\beta - C_1\beta^2)\cos\beta x \\ & + (bC_2 + aC_2\alpha - aC_1\beta + C_2\alpha^2 - 2C_1\alpha\beta - C_2\beta^2)\sin\beta x \\ \Leftrightarrow \quad 0 = \;& (C_1(b - \tfrac{a^2}{2} + \tfrac{a^2}{4} - (\tfrac{-a^2}{4} + b)) + C_2(a\beta - a\beta))\cos\beta x \\ & (C_1(-a\beta + a\beta) + C_2(b - \tfrac{a^2}{2} + \tfrac{a^2}{4} - (\tfrac{-a^2}{4} + b)))\sin\beta x \\ \Leftrightarrow \quad 0 = \;& 0 \end{aligned}$$

Edelliset kohdat 1)–3) sisältävät ohjeen siitä, miten homogeeniyhtälön HY yleinen ratkaisu saadaan määritettyä. Jatkossa tärkeä kysymys koskee homegeeniyhtälön yleisen ratkaisun suppenemista. Sanomme, että ratkaisun termi suppenee (konvergoi), jos sen raja-arvo on 0, kun $x \to \infty$. Vastaavasti sanomme, että ratkaisun termi hajaantuu (divergoi), jos se ei pysy rajoitettuna, kun $x \to \infty$. Jos kerroin C_j ei ole

nolla, niin termille pätee:

$C_j e^{r_j x}$	suppenee, kun $r_j < 0$ hajaantuu, kun $r_j > 0$
$C_j x e^{r_j x}$	suppenee, kun $r_j < 0$ hajaantuu, kun $r_j > 0$
$C_j e^{\alpha x}\cos\beta x$	suppenee, kun $\alpha < 0$ hajaantuu, kun $\alpha > 0$
$C_j e^{\alpha x}\sin\beta x$	suppenee, kun $\alpha < 0$ hajaantuu, kun $\alpha > 0$

Homogeeniyhtälon yleinen ratkaisu suppenee, jos kaikki sen termit suppenevat, ja hajaantuu, jos ainakin yksi sen termeistä hajaantuu.

Seuraava tehtävä on löytää täydellisen yhtälön DY jokin yksityisratkaisu. Yleensä taloudellisisssa sovelluksissa RHS $= h(x)$ on melko yksinkertainen. Silloin yksityisratkaisu löytyy yritteellä samoin kuin I kertaluvun tapauksessa. Seuraavat esimerkit riittävät asian selvittämiseen.

Esimerkki 5.6.2 Ratkaise $y'' + 4y' + 3y = 3x^2$.

Ratkaistaan karakteristinen yhtälö

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 3 &= 0 \\ r &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad r_1 = -1, r_2 = -3 \end{aligned}$$

Siis HY:n yleinen ratkaisu on $y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Seuraavaksi etsimme DY:n yksityisratkaisun yritteellä

$$\begin{aligned} y_1 = Ax^2 + Bx + C \quad &\Rightarrow \quad y_1' = 2Ax + B \\ &\Rightarrow \quad y_1'' = 2A \end{aligned}$$

Kun yrite sijoitetaan DY:öön, saadaan

$$\begin{aligned} DY \quad &\Leftrightarrow \quad y'' + 4y' + 3y = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (2A) + 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3Ax^2 + (8A + 3B)x + (2A + 4B + 3C) = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3A &=& 3 \\ 8A + 4B &=& 0 \\ 2A + 4B + 3C &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A &=& 1 \\ B &=& -2A = -2 \\ C &=& -2A/3 - 4B/3 = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Siis yksityisratkaisu on $y_1 = x^2 - 2x + 2$ ja alkuperäisen yhtälön DY yleinen ratkaisu on

$$\underline{\underline{y = y_o + y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + x^2 - 2x + 2}}$$

Esimerkki 5.6.3 Määritä se differentiaaliyhtälön $y'' + 3y' + 2y = 10$ ratkaisu, joka toteuttaa reunaehdot $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 4$.

Ratkaistaan karakteristinen yhtälö

$$\begin{aligned} r^2 + 3r + 2 &= 0 \\ r &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad r_1 = -1, r_2 = -2 \end{aligned}$$

Siis HY:n yleinen ratkaisu on $y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.
Seuraavaksi etsimme DY:n yksityisratkaisun yritteellä:

$$y_1 = A \Rightarrow y_1' = y_1'' = 0$$

(*nyrkkisääntö: kun RHS on vakio ja DY vakiokertoiminen, niin yritekin on vakio!*)
Kun yrite sijoitetaan DY:öön, saadaan

$$\begin{aligned} DY \quad &\Leftrightarrow \quad y'' + 3y' + 2y = 10 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 + 0 + 2A = 10 \\ &\Leftrightarrow \quad A = 5 \end{aligned}$$

Siis yksityisratkaisu on $y_1 = 5$ ja alkuperäisen yhtälön DY yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} & y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 5 \\ \Rightarrow \quad & y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Seuraavaksi etsimme DY:n yleiseen ratkaisuun sisältyville vakioille C_1 ja C_2 sellaiset arvot, että reunaehdot toteutuvat. Siis

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) &=& 1 \\ y'(0) &=& 4 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 e^0 + C_2 e^0 + 5 &=& 1 \\ -C_1 e^0 - 2C_2 e^0 &=& 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 + C_2 &=& -4 \\ -C_1 - 2C_2 &=& 4 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 &=& -4 \\ C_2 &=& 0 \end{array} \right.$$

Tehtävän ratkaisu on siis

$$\underline{\underline{y = -4e^{-x} + 5.}}$$

Tämän tyyppisen tehtävän ratkaisuvaiheet ovat:
(1) Ratkaise r_1 ja r_2 karakteristisesta yhtälöstä.
(2) Kirjoita HY:n yleinen ratkaisu y_o =...
(3) Etsi DY:n yksityisratkaisu y_1 =...
(4) Kirjoita DY:n yleinen ratkaisu $y = y_o + y_1$
(5) Ratkaise C_1 ja C_2 reunaehtojen perusteella
(6) Kirjoita vastaus.

(Tässä kokematon laskija tekee yleensä alussa sen virheen, että yrittää ratkaista C_1:n ja C_2:n numeroarvot heti, kun törmää niihin, eli kohdan (2) jälkeen. Tämä on virhe, sillä reunaehdot sanovat jotakin DY:n ratkaisusta, jonka yleinen muoto on tiedossa vasta kohdan (4) jälkeen!)

Esimerkki 5.6.4 Monopoliyritys tuottaa tuotetta S yksikköä päivässä. Kysyntäfunktio (yksikköä päivässä) on lineaarinen

$$D = a - bP \tag{5.83}$$

ja hintaa korjataan päivittäin siten, että

$$dP = c(Q^* - Q)dt \tag{5.84}$$

missä Q on varaston koko ja Q^* on suunnitelmien mukainen varaston koko. Vakiot S,a,b ja c ovat nyt positiivisia. Miten hinta asettuu ajan kuluessa?

Ongelmaa kuvataan nyt virtausuureilla. Tuotantonopeus S on virtausnopeus varastoon. Kysyntä D on vastaavasti virtausnopeus varastosta pois. Siten varaston muutos on $dQ = (S - D)dt$ eli

$$Q' = S - D. \tag{5.85}$$

Yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$\begin{aligned} (5.84) \quad &\Leftrightarrow \quad P' = cQ^* - cQ \\ &\Rightarrow \quad P'' = -cQ' \\ &\overset{(5.85)}{\Rightarrow} \quad P'' = -cS + cD \\ &\overset{(5.83)}{\Rightarrow} \quad P'' = -cS + c(a - bP) \\ &\Leftrightarrow \quad P'' + bcP = ca - cS \end{aligned} \tag{5.86}$$

Hinta P toteuttaa siis differentiaaliyhtälön (5.86), joka on II kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen DY (ja myös RHS on vakio!). Vastaava homogeeniyhtälö on

$$P'' + bcP = 0,$$

ja sen karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$r^2 + bc = 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{bc}, r_2 = -i\sqrt{bc}.$$

Siis $\alpha = 0$ ja $\beta = \sqrt{bc}$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siis $P_o = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$. DY:n yksityisratkaisu on selvästikin $P_1 = (a - S)/b$. Hinta on siis ajan funktiona

$$\underline{\underline{P(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t + \tfrac{a-S}{b}}} \tag{5.87}$$

Edellä käsitelty malli on kovin naiivi, eikä sen antamaa ratkaisua kannata ilmiön selityksenä ottaa kovin kirjaimellisesti. Eräitä huomioita voidaan kuitenkin tehdä

(1) Ratkaisun vakiotermi $(a-S)/b$ on se hinta, jolla kysyntä ja tarjonta kohtaavat eli $D=S$.

(2) Homogeeniyhtälön ratkaisu $P_o(t)$ kuvaa hinnan vaihtelua tasapainohinnan ympärillä. Tämä vaihtelu ei tasaannu (P_o ei suppene), mikä tuntuu käytännössä omituiselta. Jos hinta todella tottelisi jonkin aikaa ratkaisua (5.87), niin monopoli varmasti tekisi asiasta tarvittavat johtopäätökset. Jos monopoli ei tajua asiaa ajoissa, niin asiakkaissa varmasti on sellaisia, jotka oppivat käyttämään hinnan vaihtelua hyväkseen, jolloin naivi malli ei enää riitä ilmiön kuvaamiseen.

(3) Ratkaisussa ei esiinny vakiota Q^*!. Tästä ei pide tehdä liian pikaisia johtopäätöksiä, sillä Q^* vaikuttaa alkuarvoon $P'(0)$ ja sitä kautta myös ratkaisuun. Tasapainohinta on kuitenkin riippumaton Q^*:stä.

Jokainen esitetty huomio on pienen mietiskelytuokion arvoinen. Erityisesti kolmas huomio ansaitsee alleviivauksen. Tässä tapauksessa löydetty riippumattomuus on aika triviaali, mutta usein tällainen riippumattomuus on hyvin tärkeä havainto. Lukija luultavasti tuntee Modigliani-Millerin teorian, jossa eräin oletuksin muodostetaan malli yrityksen rahavirroille ja niiden perusteella johdetaan lauseke yrityksen arvolle. Tässä lausekkeessa ei esiinny eräs mallin keskeinen parametri, nimittäin yrityksen velkaisuusaste. Mallin mukaan siis yrityksen arvo ei eräin oletuksin riipu sen velkaisuusasteesta. Tämä riippumattomuus on paljon tunnetumpi kuin itse malli tai sen antaman ratkaisun lauseke.

Esimerkki 5.6.5 Edellisen esimerkin monopoliyritys tuottaa tuotetta S yksikköä päivässä. Kysyntäfunktio on

$$D = a - bP + kP' \tag{5.88}$$

ja hintaa korjataan päivittäin siten, että

$$dP = c(Q^* - Q)dt + r(\frac{S-a}{b} - P)dt \tag{5.89}$$

missä Q on varaston koko ja Q^* on suunnitelmien mukainen varaston koko. Vakiot S,a,b,c,k ja r ovat nyt positiivisia. Miten hinta asettuu ajan kuluessa?

Edellisen esimerkin muunnelma perustuu seuraavaan perisideaan. Osa asiakkaista siirtää hankintojaan huomiseen, jos hinnat ovat laskussa, jolloin kysyntä laskee ja vastaavasti aientaa hankintojaan, jos hinnat ovat nousussa, jolloin kysyntä nousee. Tätä hankintojen siirtämisvalmiutta kuvaa parametri $k>0$. Yhtälön (5.89) mukaan yrityksellä on nyt kaksi tavoitetta. Se pyrkii saamaan varaston suunnitellun kokoiseksi ja toisaalta se pyrkii saamaan hinnan tasapainoon. Vakiot c ja r kuvaavat vastaavien

säätöprosessien nopeuksia ja niiden suhde c/r kertoo vastaavien tavoitteiden painosuhteet. Samoin kuin edellä saamme differentiaaliyhtälön

$$\begin{aligned}
(5.89) \quad &\Leftrightarrow \quad P' = c(Q^* - Q) + r(\frac{S-a}{b} - P) \\
&\Rightarrow \quad P'' = -cQ' - rP' \\
&\Rightarrow \quad P'' = cD - cS - rP' \\
&\overset{(5.88)}{\Rightarrow} \quad P'' = c(a - bP + kP') - cS - rP' \\
&\Leftrightarrow \quad P'' + (r - ck)P' + bcP = ca - cS \qquad (5.90)
\end{aligned}$$

Ratkaisun suppeneminen kohden tasapainoa (tasapainon stabiilisuus) voidaan tutkia nyt ratkaisemalla karakteristisen yhtälön juuret ja tutkimalla niiden merkit. On kuitenkin olemassa varsin yksinkertainen sääntö, jolla tutkitaan ratkaisun (5.90) stabiilisuus. Tämä sääntö esitetään seuraavassa kappaleessa, minkä jälkeen palaamme takaisin tähän esimerkkiin.

5.6.2 Tasapainon stabiilisuus

Lause 5.6.3 II kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälön

$$y'' + ay' + by = 0$$

ratkaisu suppenee (on stabiili), jos ja vain jos

$$a > 0, \text{ ja } b > 0.$$

Perustelu: Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ ja } r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Juuret ovat reaaliset, jos ja vain jos $a^2 - 4b \geq 0$. Siinä tapauksessa $r_1 \geq r_2$. Siis

$$\begin{aligned}
&r_1 \text{ ja } r_2 \text{ ovat reaaliset ja ratkaisu suppenee} \\
\Leftrightarrow \quad &a^2 - 4b \geq 0 \text{ ja } \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad &a > 0 \text{ ja } 0 < b \leq a^2/4 \qquad (5.91)
\end{aligned}$$

Juuret ovat kompleksiset, jos ja vain jos $a^2 - 4b < 0$. Siinä tapauksessa juuren reaaliosa $\alpha = -a/2$. Siis

$$\begin{aligned}
&\text{juuret ovat kompleksiset ja ratkaisu suppenee} \\
\Leftrightarrow \quad &a^2 - 4b < 0 \text{ ja } -a/2 < 0 \\
\Leftrightarrow \quad &a > 0 \text{ ja } b > a^2/4 \qquad (5.92)
\end{aligned}$$

Ratkaisu suppenee, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} & (5.91) \text{ tai } (5.92) \\ \Leftrightarrow\ & (a>0 \text{ ja } 0<b\le a^2/4) \text{ tai } (a>0 \text{ ja } b>a^2/4) \\ \Leftrightarrow\ & a>0 \text{ ja } b>0 \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.6.6 Edellisen esimerkin differentiaaliyhtälön

$$P'' + (r-ck)P' + bcP = ca - cS$$

ratkaisu on stabiili, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} & r-ck>0 \text{ ja } bc>0 \\ \Leftrightarrow\ & r>ck, \end{aligned}$$

sillä mallin kaikki parametrit ovat positiivisia, ja siksi toinen epäyhtälö on aina tosi.

5.7 1. kertaluvun lin. vakiokert. DY-ryhmä

Tämän kappaleen teoria on helppo yleistää. Silti aloitamme kaksiulotteisella tarkastelulla, koska kahden muuttujan tapaus on helppo esittää graafisesti.

5.7.1 Kahden muuttujan tapaus

Seuraavassa muuttujat x, y, u ja v ovat kaikki ajan t funktioita, $y=y(t)$, $x=x(t)$, $u=u(t)$, $v=v(t)$. Tarkastellaan ensin DY-paria

$$\left\{ \begin{array}{rcl} du/dt &=& a_{11}u + a_{12}v + b_1 \\ dv/dv &=& a_{21}u + a_{22}v + b_2 \end{array} \right. , \tag{5.93}$$

missä oletamme nyt kerroinmatriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5.94}$$

olevan säännöllisen. Muuttujien u ja v tasapainoarvot $u^\star$ ja $v^\star$ saadaan ehdosta

$$\left\{ \begin{array}{rcl} du/dt &=& 0 \\ dv/dt &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u^\star \\ v^\star \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

Merkitään poikkeamia tasapainosta $\tilde{u} = u - u^\star$ ja $\tilde{v} = v - v^\star$. Poikkeamat noudattavat DY:tä

$$\begin{pmatrix} d\tilde{u}/dt \\ d\tilde{v}/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \tag{5.96}$$

Jos kerroinmatriisin ominisarvot λ_1 ja λ_2 ovat erisuuret ja vastaavat ominaisvektorit ovat $\omega_1 \in \mathbb{R}^2$ ja $\omega_2 \in \mathbb{R}^2$. Olkoon $\mathbf{T}$ matriisi, jonka sarakkeina ovat $\mathbf{A}$:n ominaisvektorit. Silloin

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{5.97}$$

Muuttujan vaihdolla

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \tag{5.98}$$

saamme kirjoitettua DY:n (5.93) muotoon

$$\begin{aligned} \text{DY} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d\tilde{u}/dt \\ d\tilde{v}/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} && (5.99) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{T} \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (5.100) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (5.101) \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} dx/dt &=& \lambda_1 x \\ dy/dt &=& \lambda_2 y \end{array} \right. && (5.102) \end{aligned}$$

Koska ominaisarvot λ_1, λ_2 ovat matriisin $\mathbf{A}$ karakteristisen yhtälön juuret, ne ovat joko reaaliset tai toistensa kompleksikonjugaatit. Toisin sanoen jos $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, niin $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$.
Yleinen ratkaisu on silloin jokin seuraavista

$$\begin{aligned} \text{Jos } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad & \text{ja} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ niin} \\ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_{21} C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \omega_{12} C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_{22} C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jos } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad & \text{ja} \quad \lambda_1 = \lambda_2, \text{ niin} \\ \tilde{u} &= C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ \tilde{v} &= a_{12}^{-1}(\tilde{u}' - a_{11}\tilde{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jos } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad & \text{ja} \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta, \text{ niin} \\ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)) \\ e^{\alpha t}(C_3 \sin(\beta t) + C_4 \cos(\beta t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Edellä tapaus $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_1 = \lambda_2$, on perusteltava toisin kuin kaksi muuta tapausta. Helpoin tapa on yhdistää DY-ryhmän yhtälöt yhdeksi yhden muuttujan toisen kertaluvun DY:ksi. Sivuutamme, nyt tämän tarkastelun.)

Määritelmä 5.7.1 Ensimmäisen kertaluvun kahden muuttujan differentiaaliyhtälöparin (5.93) tasapainoratkaisu $u(t) = u^\star$ ja $v(t) = v^\star$ on dynaamisesti stabiili, jos

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{u}(t) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{t\to\infty} \tilde{v}(t) = 0$$

Lause 5.7.1 Ensimmäisen kertaluvun kahden muuttujan differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{pmatrix} du/dt \\ dv/dt \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

tasapainoratkaisu on dynaamisesti stabiili, jos kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot λ_1 ja λ_2 toteuttavat toisen seuraavista ehdoista

$$\text{(a)} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \lambda_1 < 0, \quad \text{ja} \quad \lambda_2 < 0$$

tai

$$\text{(b)} \quad \lambda_{12} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \quad \text{ja} \quad \alpha < 0$$

Helpoin tapa hahmottaa systeemin käyttäytymistä lähellä tasapainoa, on piirtää ratkaisu-uria tasapainopisteen lähelle (x, y)-koordinaatistoon. Kuvissa 5.26a)-g) on perustapaukset.

Esimerkki 5.7.1 Tutkitaan ensimmäisen kertaluvun lineaarista vakiokertoimista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} dx/dt &= 1 - x + y \\ dy/dt &= 2 + x - 2y \end{cases} \tag{5.103}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5.104}$$

Tasapainon $(x^\star; y^\star)^{\mathrm{T}} = (4; 3)^{\mathrm{T}}$ stabiilisuus selviää kerroinmatriisin ominaisarvoista

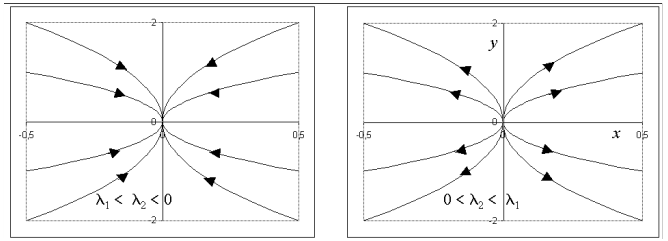
$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 1 \\ 1 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.105}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 0$$

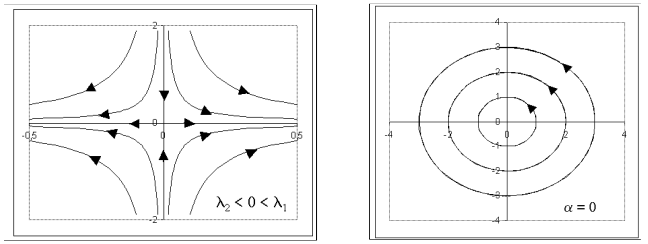
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2.618 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 0.382 \tag{5.106}$$

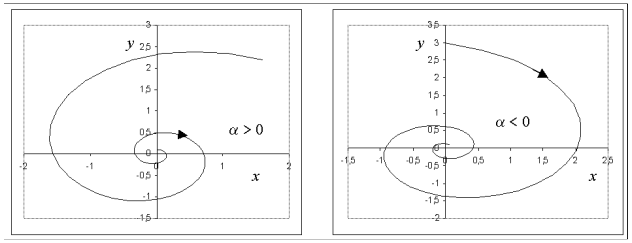
Tasapaino on siis epästabiili noodi. ///



a) stabiili noodi (node) b) epästabiili noodi (node).



c) satulapiste (sadle point) (epästabiili). d) keskus (center) (epästabiili).



e) epästabiili spiraali (focus). f) stabiili spiraali (focus).

Figure 5.26: Ratkaisu-urat tasapainon lähellä.

5.7.2 Monen muuttujan tapaus

Edellisen kappaleen tulokset yleistyvät helposti useamman muuttujan tapauksiin.

Lause 5.7.2 Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Silloin DY-ryhmän

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

tasapainoratkaisu on stabiili, jos ja vain jos kaikki reaaliset kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot ovat negatiivisia ja kaikkien kompleksisten ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia.

5.8 Yleinen tasapainon stabiilisuus

Aloitamme tämän kappaleen diskreetillä mallilla, joka on johdantona saman ilmiön jatkuvalle mallille. Samalla tulemme varovaisiksi tasapainojen stabiilisuuksien suhteen.

Esimerkki 5.8.1 Olkoon x_t yrityksen markkinaosuus ($0 \leq x_t \leq 1$) jaksolla t. Ilman markkinointiponnistuksia markkinaosuus pienenee niin, että

$$\Delta x_{pois,t} = -rx_t \tag{5.107}$$

missä r on poistumakerroin, $0 < r < 1$. Yritys käyttää markkinointiin panoksen b_t, joka on suoraan verrannollinen markkinaosuuteen $b_t = \alpha x_t$. Markkinoinnin vaikutus markkinaosuuteen on

$$\Delta x_{uudet,t} = \beta b_t(1 - x_t) = ax_t(1 - x_t), a > 0 \tag{5.108}$$

Yhdistämällä muutostermit, saamme markkinaosuuden dynamiikkaa kuvaavan mallin

$$x_{t+1} = (1 - r)x_t + ax_t(1 - x_t) = f(x_t). \tag{5.109}$$

Mallin tasapainoratkaisut saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} x^\star &= f(x^\star) && (5.110)\\ \Leftrightarrow x^\star &= (1-r)x^\star + ax^\star(1-x^\star) \\ \Leftrightarrow 0 &= x^\star(-r + a - ax^\star) \\ \Leftrightarrow & \quad x_1^\star = 0 \quad \text{ja} \quad x_2^\star = \frac{a-r}{a} && (5.111) \end{aligned}$$

Systeemin stabiilisuutta tasapainon lähellä voidaan arvioida funktion f Taylorin sarjan avulla seuraavasti

$$x_{t+1} = f(x_t) \approx f(x^\star) + f'(x^\star)(x_t - x^\star) \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{t+1} - x^\star &\approx f'(x^\star)(x_t - x^\star) && (5.113)\\ \Rightarrow \frac{|\tilde{x}_{t+1}|}{|\tilde{x}_t|} &\approx |f'(x^\star)| && (5.114) \end{aligned}$$

Tasapaino $x^\star$ on siis stabiili ($\lim_{t\to\infty} \tilde{x}_t = 0$), jos

$$|f'(x^\star)| < 1. \tag{5.115}$$

Askelfunktion derivaatta on nyt

$$f'(x^\star) = 1 - r + a - 2ax^\star \tag{5.116}$$

Tasapaino $x_1^\star = 0$ on stabiili, jos

$$\begin{aligned} & -1 < f'(0) < 1 && (5.117)\\ \Leftrightarrow \quad & -1 < 1 - r + a < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & r - 2 < a < r && (5.118) \end{aligned}$$

Tasapaino $x_2^\star = 1 - r/a$ on stabiili, jos

$$\begin{aligned} & -1 < f'(1 - r/a) < 1 && (5.119)\\ \Leftrightarrow \quad & -1 < 1 - r + a - 2a(1 - r/a) < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & r < a < r + 2 && (5.120) \end{aligned}$$

Kun siis markkinointiponnistus on heikko, $a < r$, niin yrityksen markkinaosuus kuluu kokonaan pois. Kun markkinointiponnistus on riittävä, $r < a < r + 2$, niin markkinaosuus saadaan vakiinnutettua tasapainoarvoonsa. Mitä tapahtuu, jos $a > r + 2$?

Kuvaan 5.27 on piirretty simuloitu ratkaisu, kun $r = 0.2$, $a = 3$ ja $x_0 = 0.5$. Ratkaisu on esimerkki kaoottisesta aikasarjasta. Malli ei enää toimi tyydyttävästi, sillä muuttuja x_t saa ykköstä suurempia arvoja, mikä on vastoin oletustamme. (Emme nyt käsittele kaoottisia ilmiöitä enempää.) ///

Esimerkki 5.8.2 Teemme edellisen esimerkin tilasteesta jatkuvan DY-mallin. Olkoon $x(t)$ yrityksen markkinaosuus ja $y(t)$ yrityksen markkinointiponnistus (kassavirta). Yrityksen markkinointiponnistuksen tavoitetaso on $y_{tavoite} = ax$. Jotta markkinointi olisi kohdallaan, sitä tarkistetaan ajoittain niin, että tämä säätö-prosessi noudattaa likimain mallia $dy/dt = ax - y$. Yksinkertainen yrityksen markkinaosuutta ja markkinointia kuvaava malli on nyt

$$\begin{cases} dx/dt &= -rx + y(1-x) \\ dy/dt &= ax - y \end{cases} \tag{5.121}$$

Helposti nähdään, että mallin tasapainoratkaisut ovat $(x_1^\star, y_1^\star) = (0, 0)$ ja $(x_2^\star, y_2^\star) = (1 - r/a, a - r)$. Ennen kuin otamme kantaa tasapainojen stabiilisuuteen, tutkimme yleistä tapausta. ///

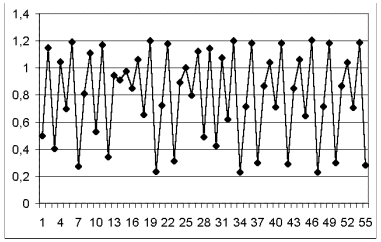


Figure 5.27: Mallin $x_{t+1} = 0.8x_t + 3x_t(1 - x_t)$ ratkaisu, kun $x_0 = 0.5$.

Olkoon tutkittavana epälineaarinen DY-ryhmä

$$\begin{cases} dx/dt &= f(x,y) \\ dy/dt &= g(x,y) \end{cases} \tag{5.122}$$

Lähellä tasapainopistettä $x \approx x^\star$ ja $y \approx y^\star$ asetamme $\tilde{x} = x - x^\star$ ja $\tilde{y} = y - y^\star$. Voimme arvioida

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt &\approx f_x\tilde{x} + f_y\tilde{y} \\ d\tilde{y}/dt &\approx g_x\tilde{x} + g_y\tilde{y} \end{cases} \tag{5.123}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{y}/dt \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \tag{5.124}$$

missä osittaisderivaatat on laskettu tasapainopisteessä. Lähellä tasapainoa systeemi käyttäytyy siis likimain kuin lineaarinen malli (5.124). Stabilisuus tutkitaan siis derivaatta-matriisin

$$D = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

ominaisarvoista. Palataan nyt edellä kesken jääneeseen esimerkkiin.

Esimerkki 5.8.3 Edellä

$$\begin{cases} dx/dt &= -rx + y(1-x) &= f(x,y) \\ dy/dt &= ax - y &= g(x,y) \end{cases} \tag{5.125}$$

Osittaisderivaatat ja derivaatta-matriisi ovat

$$\begin{aligned} f_x &= -r - y \\ f_y &= 1 - x \\ g_x &= a \end{aligned}$$

$$g_y = -1 \tag{5.126}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -r-y & 1-x \\ a & -1 \end{pmatrix} \tag{5.127}$$

Tasapainopisteessä $(x_1^\star, y_1^\star) = (0,0)$ siis

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} -r & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \tag{5.128}$$

Ominaisarvoille pätee

$$\begin{aligned} (-r-\lambda)(-1-\lambda) - a &= 0 \\ \lambda^2 + (1+r)\lambda + (r-a) &= 0 \\ \lambda &= \frac{-(1+r) \pm \sqrt{(1+r)^2 - 4(r-a)}}{2} \end{aligned}$$

Molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia, jos juurrettava on pienempi kuin $(1+r)^2$, eli

$$a < r.$$

(Jos juurrettava on negatiivinen, niin λ on kompleksinen ja sen reaaliosa on negatiivinen, joten tässäkin tapauksessa tasapaino on stabiili.)

Tasapainopisteessä $(x_2^\star, y_2^\star) = (1 - r/a, a - r)$ derivaatta-matriisi on

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} -r - y_2^\star & 1 - x_2^\star \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & r/a \\ a & -1 \end{pmatrix} \tag{5.129}$$

Ominaisarvoille pätee

$$\begin{aligned} (-a-\lambda)(-1-\lambda) - r &= 0 \\ \lambda^2 + (1+a)\lambda + (a-r) &= 0 \\ \lambda &= \frac{-(1+a) \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4(a-r)}}{2} \end{aligned}$$

Molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia, jos juurrettava on pienempi kuin $(1+a)^2$, eli

$$a > r.$$

(Jos juurrettava on negatiivinen, niin λ on kompleksinen ja sen reaaliosa on negatiivinen, joten tässäkin tapauksessa tasapaino on stabiili.) ///

Esimerkki 5.8.4 Edellisessä esimerkissä oli useita muutosnopeuteen liittyviä kertoimia asetettu ykkösiksi, jotta laskeminen näyttäisi helpommalta. Oikeastaan mallin pitäisi olla

$$\begin{cases} dx/dt &= -rx + \alpha y(1-x) &= f(x,y) \\ dy/dt &= \beta(ax - y) &= g(x,y) \end{cases} \tag{5.130}$$

Olkoon yrityksen liikevaihto 157 000 € /kk ja markkinaosuus $x = 0.25 = 25\%$. Tällä hetkellä yritys katsoo markkinointipanoksen oikeaksi suuruudeksi 8000 € /kk. Valitaan y:n yksiköksi 1000 € /kk. Silloin

$$a \cdot 0.25 = 8 \Rightarrow a = 32 \tag{5.131}$$

On arveltu, että ilman markkinointipanosta markkinaosuus kuluu pois suhteellisella vauhdilla 10%/kk, joten (kun aikayksikkönä on kk)

$$dx/dt = -rx \Rightarrow r = -\frac{dx/x}{dt} = 0.1 \tag{5.132}$$

Tuhannen euron markkinointipanoksen (/kk) arvellaan kääntävän 2% ei-asiakkaista asiakkaiksi kuukaudessa. Siis

$$\frac{\alpha y(1-x)}{1-x} = 0.02 \cdot y \Rightarrow \alpha = 0.02 \tag{5.133}$$

Markkinointipanoksen suhteellinen muutosnopeus on 20%/kk. Siis

$$d\tilde{y}/dt = -\beta\tilde{y} \Rightarrow \beta = -\frac{d\tilde{y}/\tilde{y}}{dt} = 0.2 \tag{5.134}$$

Saamme siis konkreettisen mallin

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx/dt & = & -0.1x + 0.02y(1-x) \\ dy/dt & = & 0.2(32x - y) \end{array} \right. \tag{5.135}$$

Tasapainoratkaisut ovat $(x_1^\star, y_1^\star) = (0,0)$ ja $(x_2^\star, y_2^\star) = (0.844;\, 27.0)$. Derivaattamatriisi on

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} -0.1 - 0.02y & 0.02(1-x) \\ 6.4 & -0.2 \end{pmatrix} && (5.136) \\ \Rightarrow \mathbf{D}^{(1)} &= \begin{pmatrix} -0.1 & 0.02 \\ 6.4 & -0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1^{(1)} = -0.511, \lambda_2^{(1)} = 0.211 \\ \Rightarrow \mathbf{D}^{(2)} &= \begin{pmatrix} -0.64 & 0.00312 \\ 6.4 & -0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1^{(2)} = -0.681, \lambda_2^{(2)} = -0.156 \end{aligned}$$

Siis ei-triviaali tasapaino on stabiili. Hyvä! Yritys tulee vielä kasvamaan! ///

Esimerkki 5.8.5 Tarkistetaan vielä onko edellisen esimerkin yrityksellä markkinointipanos -kerroin a kohdallaan. Jos a palautetaan numeroarvosta parametriksi, niin malli menee muotoon

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx/dt & = & -0.1x + 0.02y(1-x) \quad = \quad f(x,y) \\ dy/dt & = & 0.2(ax - y) \qquad\qquad\;\; = \quad g(x,y) \end{array} \right. \tag{5.137}$$

Tasapainoratkaisut ovat $(x_1^\star, y_1^\star) = (0,0)$ ja $(x_2^\star, y_2^\star) = (1-5/a;\, a-5)$. Jos myynnistä saatava kate on 20%, niin voitto tasapainossa markkinointikustannukset huomioiden

on

$$\begin{aligned} P(a) &= 0.2 \cdot x^\star \cdot 628\,000 - y^\star && (5.138) \\ &= 0.2 \cdot (1 - 5/a) \cdot 628\,000 - (a-5) \cdot 1000 && (5.139) \\ &= 130\,600 - 628\,000/a - 1000a && (5.140) \end{aligned}$$

Suurin voitto tasapainossa saadaan, kun

$$P'(a) = 0 \Rightarrow a \approx 25 \tag{5.141}$$

Yritys siis panostaa markkinointiin enemmän kuin sen tasapainossa kannattaisi. Toisaalta yritys ei vielä ole tasapainotilanteessa, joten on ymmärrettävää, että halutua markkinaosuutta haetaan agressiivisesti. Optimaalinen panostus transientissa vaiheessa kuuluu niin sanotun optimiohjausteorian (optimal control theory) alaan. Emme nyt paneudu optimiohjauksen teoriaan. ///