

Harj 3 teht. 7 v. xxxx

Esimerkkejä ma 7.11.2016

1

7. Vaasan Raamipuu Oy myy sahausken sivutuotteena syntyvän purun raaka-aineeksi kah-
teen jatkojalostus-kohteeseen. (1) Osasta purua tehdään lämmitykseen käytettävää pellettiä
ja (2) osa purusta käytetään muovikomposiitti-levyjen valmistukseen. Viikossa purua syn-
tyy 40 tonnia. Pelletit tehdään pienessä puristamossa, jonka koko tuotanto markkinoidaan
lähialueilla. Jos pellettiä on paljon tarjolla, hinta putoaa, ja vastaavasti pienen tarjonnan ti-
lanteessa hinta nousee. Pelletin valmistaja maksaa raaka-aineesta Raamipuulle hinnan, joka
on suoraan verrannollinen pelletin markkinahintaan. Arvioidaan, että pelletiksi valmistetta-
van purun yksikköhinta on

$$p = 10,10 - 0,095 \cdot x, \quad \text{euroa/tonni,}$$

missä x on pelletiksi valmistettavan purun määrä (tonnia/viikko). Muovikomposiitti-levyn
valmistaja maksaa purusta 9.06 euroa/tonni, mutta tuotteen välivarastointi aiheuttaa kustan-
nuksen 0.86 euroa/tonni, joten kate on 8.20 euroa tonnilta.

Tällä hetkellä yritys myy purua 15 tonnia viikossa pellettitehtaalle ja 25 tonnia viikossa
levytehtaalle.

Tarkista päätöksen järkevyys määrittämällä optimaaliset arvot pelletiksi valmistettavan pu-
run määrälle x ja muovikomposiitiksi valmistettavan purun määrälle y ratkaisemalla seuraa-
va optimointitehtävä

$$\begin{aligned} \max f(x,y) &= px + 8,20y \\ \text{ehdoin} \quad x + y &= 40 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

(Ohje: jos saat eri tuloksen kuin $x = 15$ ja $y = 25$, niin vertaa tavoitefunktion arvoja eri
ratkaisuisissa.)

$$\begin{aligned} L(x,y,\lambda) &= (10,10 - 0,095x)x + 8,20y + \lambda(x + y - 40) \\ &= 10,10x - 0,095x^2 + 8,20y + \lambda x + \lambda y - \lambda 40 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10,10 - 0,19x + \lambda = 0 & (1) \\ 8,20 + \lambda = 0 & (2) \\ x + y - 40 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \lambda = -8,20$$

$$(1) \Rightarrow 10,10 - 0,19x - 8,20 = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,19x = -1,90$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 10}$$

$$\Rightarrow (3) \Rightarrow 10 + y - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 30}$$

x	y	$p = 10,10 - 0,095x$	$f(x,y) = px + 8,20y$
10	30	9,15	$9,15 \cdot 10 + 8,20 \cdot 30 = 337,50$
15	25	8,675	$8,675 \cdot 15 + 8,20 \cdot 25 = 335,13$

Vastaus: optima $x = 10, y = 30$ ja $f(10,30) = 337,50$

4. Tehdään harjoituksen 3 tehtävän 7 malliin seuraava tarkennus:

Muovikompositiksi valmistettava puru on säilytettävä ehdottoman kuivana. Siksi puru pitää varastoida välivarastoon. Yksikkö-ylläpito -kustannus on 2.15 euroa / (tn · viikko). Tilauskustannus on 4.25 euroa/tilaus, jolloin EOQ-varastomallin mukainen optimaalinen tilauserä q_0 ja vastaava kokonaiskustannus TC_0 (/per viikko) on

$$q_0 = \sqrt{\frac{2Ky}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4.25 \cdot y}{2.15}} = 1.988 \cdot y^{1/2}$$

$$TC_0 = \sqrt{2Kyh} = \sqrt{2 \cdot 4.25 \cdot y \cdot 2.15} = 4.275y^{1/2}$$

Ratkaise muuttunut optimointitehtävä

$$\begin{aligned} \max f(x,y) &= (10.10 - 0.095x)x + 9.06y - 4.275y^{1/2} \\ \text{ehdoin} \quad x + y &= 40 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

min ehdoin

$$\begin{aligned} -10.10x + 0.095x^2 - 9.06y + 4.275y^{1/2} \\ g_1 &= -x \leq 0 \\ g_2 &= -y \leq 0 \\ h &= x + y - 40 = 0 \end{aligned}$$

Lagrangen funktio $L = f + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \lambda h$

$$= -10.10x + 0.095x^2 - 9.06y + 4.275y^{1/2} - \mu_1 x - \mu_2 y + \lambda(x + y - 40)$$

$\left\{ \begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ h = 0 \\ \mu_1 g_1 = 0 \\ \mu_2 g_2 = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ g_1 \leq 0 \\ g_2 \leq 0 \end{array} \right.$	$-10.10 + 0.19x$	$- \mu_1$	$+ \lambda$	$= 0$	(1)
	$-9.06 + 2.1375y^{-1/2}$	$- \mu_2$	$+ \lambda$	$= 0$	(2)
	$x + y - 40$			$-40 = 0$	(3)
				$- \mu_1 x = 0$	(4)
				$- \mu_2 y = 0$	(5)
				$\mu_1 \geq 0$	(6)
				$\mu_2 \geq 0$	(7)
				$-x \leq 0$	(8)
				$-y \leq 0$	(9)

Tajanan $\begin{bmatrix} + & + \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \mu_1 > 0 & \rightarrow x = 0 \\ \mu_2 > 0 & \rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

- (1) $-10,10 + 0 - \mu_1 + \tau = 0$
- (2) $-9,06 + 0 - \mu_2 + \tau = 0$
- (3) $0 + 0 - \mu_3 = 0$

Tajanan $\begin{bmatrix} + & 0 \end{bmatrix}$

$$\mu_1 > 0, \mu_2 = 0 \rightarrow x = 0$$

- (1) $-10,10 + 0 - \mu_1 + \tau = 0$
- (2) $-9,06 + 2,135z + \tau = 0$
- (3) $0 + 0 - \mu_3 = 0$

Tajanan $\begin{bmatrix} 0 & + \end{bmatrix}$

$$\mu_1 = 0, \mu_2 > 0 \rightarrow y = 0$$

- (1) $-10,10 + 0,19x - 0 + \tau = 0$
- (2) $-9,06 + 0 - \mu_2 + \tau = 0$
- (3) $x + 0 - \mu_3 = 0$

Tajanan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$$

- (1) $-10,10 + 0,19x + \tau = 0$
- (2) $-9,06 + 2,135z + \tau = 0$
- (3) $x + y = 40$
- (8) $x \geq 0$
- (9) $y \geq 0$

Merlukan $z = \sqrt{y} \rightarrow y = z^2$

$$\text{I-III: } \begin{cases} 0,19x + \tau = 10,10 \\ 2,135z + \tau = 9,06 \\ 2z^2 + \tau = 40,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,19z^2 - 2,135z + 10,10 - 0,19 \cdot 40 = -6,56 & \text{(a)} \\ -9,06 - 9,06 - 2,135z & \text{(b)} \\ x = z^2 - 0,17 = 40 - y & \text{(c)} \end{cases}$$

~~3~~ 3

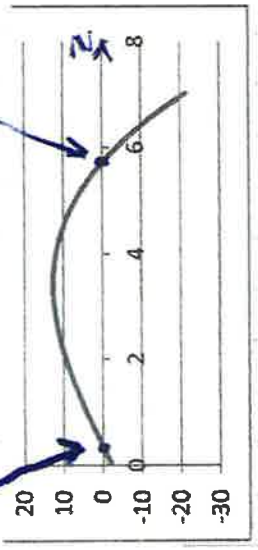
4

$$(a) \rightarrow -0,19z^2 - 2,127z + 6,56 = 0$$

$$\rightarrow -0,19z^2 + 6,56z - 2,127z + 6,56 = 0$$

Pencarian fungsi
kurva Excehilla

→ jwur $z_1 \approx 0,327$ dan $z_2 \approx 5,706$



$$\#1$$

$$y = z^2 = 0,107$$

$$x = 38,9$$

$$v = 2,52$$

$$f(38,9; 0,1) = (10,10 - 0,095 \cdot 38,9) \cdot 18,9 + 9,06 \cdot 0,1$$

$$= 248,49$$

$$\#2$$

$$y = z^2 = 32,6$$

$$x = 7,4$$

$$v = 8,69$$

$$f(7,4; 32,6) = (10,10 - 0,095 \cdot 32,6) \cdot 18,9 + 9,06 \cdot 32,6$$

$$= 283,71$$

→ param p1

$$x = 7,4$$

$$y = 32,6$$

$$f = 283,71$$

9

8. Olkoon edelleen $p_1 = 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2$, $p_2 = 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1$ ja $C = 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2$ Kirjoita lauseen 3.5.1 (sivu 85) mukaiset välttämättömät ehdot optimointitehtävälle

100

5

$$\begin{cases} \max \\ \min z = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2) \\ \text{st.} & q_1 + q_2 \leq 700 \\ & q_1 \geq 0 \\ & q_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min & -p_1q_1 - p_2q_2 + C \\ \text{s.t.} & q_1 + q_2 - 700 \leq 0 \\ & -q_1 \leq 0 \\ & -q_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Lagrange

$$L(q_1, q_2, \mu_1, \mu_2) = 18q_1 + 25q_2 - 0,01q_1^2 - 0,02q_1q_2 - 0,02q_2^2 + \mu_1(q_1 + q_2 - 700) - \mu_2q_1 - \mu_3q_2$$

$\left\{ \begin{array}{l} L_{q_1} = 0 \\ L_{q_2} = 0 \\ \mu_1 q_1 = 0 \\ \mu_2 q_2 = 0 \\ \mu_3 q_3 = 0 \\ \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 \geq 0 \\ \\ q_1 \leq 0 \\ q_2 \leq 0 \\ q_3 \leq 0 \end{array} \right.$	$18 - 0,02q_1 - 0,02q_2 + \mu_1$	$-\mu_3$	$= 0$	
	$25 - 0,02q_1 - 0,04q_2 + \mu_1$	$-\mu_4$	$= 0$	
	$\mu_1 (q_1 + q_2 - 700)$		$= 0$	
	$-\mu_2 q_1$		$= 0$	
	$-\mu_3 q_2$		$= 0$	
		μ_1	≥ 0	
		μ_2	≥ 0	
		μ_3	≥ 0	
		$q_1 + q_2 - 700$	≤ 0	
	$-q_1$	≤ 0		
	$-q_2$	≤ 0		

10

Kirjoita lauseen 3.5.1 (sivu 85) mukaiset ehdot optimointitehtävälle

6

$$\begin{cases} \min z = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 \\ \text{st.} & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 + \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) + \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18) - \mu_3x_1 - \mu_4x_2$$

$$\begin{cases} -2 + 0.2x_2 + \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 = 0 \\ 0.2x_1 - 3 + 2\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_4 = 0 \\ \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0 \\ \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18) = 0 \\ \mu_3x_1 = 0 \\ \mu_4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 \geq 0 \\ \mu_4 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 18 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

11

Muodosta edellisen tehtävän jokin relaksaatio ja etsi sille jokin välttämättömän ehdon toteuttava käypä ratkaisu.

rajoittamaton optimi:

$$\begin{cases} z_{x_1} = 0 \\ z_{x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 0.2x_2 = 0 \\ 0.2x_1 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 10 \\ x_1 = 15 \end{cases}$$

1. ja toinen rajoite eivät toteudu, mutta merkitä rajoitteet toteutuvat

⇒ Relaksaatio

$$\begin{cases} \min z = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 18 \leq 0 \end{cases}$$

7

$$L = -2x_1 + 0,2x_1x_2 - 3x_2 + \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) + \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18)$$

$$\begin{cases} -2 + 0,2x_2 + \mu_1 + 2\mu_2 = 0 \\ 0,2x_1 - 3 + 2\mu_1 + 3\mu_2 = 0 \\ \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0 \\ \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &\geq 0 \\ \mu_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 &\leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 18 &\leq 0 \end{aligned}$$

$\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$

$$\begin{cases} +0,2x_2 + \mu_1 + 2\mu_2 = 2 \\ 0,2x_1 + 2\mu_1 + 3\mu_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -1,2 \\ \mu_2 = 1,4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &\geq 0 \\ \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

✓
er' didolokan

$\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} 0,2x_2 + \mu_1 = 2 \\ 0,2x_1 + 2\mu_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2,5 \\ x_2 &= 3,75 \\ \mu_1 &= 1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 18 &\leq 0 \end{aligned}$$

ok
ok

o o

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,5 \\ x_2 &= 3,75 \\ z &= -14,375 \end{aligned}$$

(T)

8

$\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,2x_2 + 2\mu_2 = 2 \\ 0,2x_1 + 3\mu_2 = 3 \\ \hline 2x_1 + 3x_2 = 18 \\ \mu_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{array} \right.$$

$x_1 = 4,5$
 $x_2 = 3$
 $\mu_2 = 0,7$

✓ ei chidokarkh

$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,2x_2 = 2 \\ 0,2x_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \end{array} \right.$$

$\rightarrow x_2 = 10$
 $\rightarrow x_1 = 15$
✓
✓

ei chidokarkh

o.o optimi $x_1 = 2,5$
 $x_2 = 3,75$

all parametr set
vayonil set

- ① $x_1 + 2x_2 = 2,5 + 2 \cdot 3,75 = 10$ ok
- ② $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 3,75 = 16,25 < 18$ ok
- ③ $x_1 = 2,5 \geq 0$ ok
- ④ $x_2 = 3,75 \geq 0$ ok

$x_1 = 2,5$
 $x_2 = 3,75$
 $z = -14,375$

optimi