Vaasan yliopisto, 2009-2010 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

1. välikoe pe 9.4.2010 $\boxed{\text{Ratkaise kolme tehtävää!}}$

---

1. a) Miten määritellään vektorijoukon lineaarinen riippumattomuus?

b) Olkoon seuraavassa

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Onko vektorijoukko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ lineaarisesti riippumaton (vapaa)?

---

2. a) Osoita, että matriisin

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2, 1 ja -1.
b) Määritä ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit.

---

3. Yritys valmistaa kahta tuotetta, joiden kysyntäfunktiot ja kustannusfunktio ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2, \\ p_2 &= 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1, \\ C &= 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2 + 2500. \end{aligned}$$

Tarkastellaan voitonmaksimointitehtävää

$$\max f(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - C.$$

a) Kirjoita välttämätön ehto maksimille ja ratkaise se.
b) Kirjoita riittävä ehto maksimille ja tarkista, että a-kohdan ratkaisu toteuttaa riittävän ehdon.

---

4. Ratkaise

$$\begin{aligned} \min \quad g(x, y) &= x^2 + 2y + 3y^2 \\ \text{ehdolla} \quad & x + y = 2 \end{aligned}$$

Vaasan yliopisto, 2009-2010 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

1. välikoe pe 9.4.2010 $\boxed{\textbf{Ratkaise kolme tehtävää!}}$

---

1. a) Miten määritellään vektorijoukon lineaarinen riippumattomuus?

b) Olkoon seuraavassa

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Onko vektorijoukko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ lineaarisesti riippumaton (vapaa)?

a) Vektorijoukko $\{\bar v_1, \bar v_2, \dots, \bar v_n\}$ on lineaarisesti riippumaton jos

$$\lambda_1 \bar v_1 + \lambda_2 \bar v_2 + \dots + \lambda_n \bar v_n = \bar 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

(tai vektorijoukko $\{\bar v_1, \bar v_2, \dots, \bar v_n\}$ on lin. riippumaton jos nollavektoria ei voi muodostaa ei-triviaalina lineaarikombinaationa v-vektoreista.)

(tai mitään vektoreista ei voi muodostaa lineaarikombinaationa muista vektoreista)

b)

$$U\bar\lambda = \bar 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \cdot 2 \quad \cdot 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 & \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \cdot 4 \ \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3\}$ on vapaa eli lineaarisesti riippumaton

2. a) Osoita, että matriisin

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2, 1 ja -1.
b) Määritä ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit.

a) Matriisin A ominaisarvolle λ_i on voimassa $\det(A-\lambda_i I)=0$. Nyt

$$\begin{vmatrix} 5-2 & 3 & 3 \\ 0 & 0-2 & -1 \\ -6 & -4 & -3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & -4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \, \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-1 & 3 & 3 \\ 0 & 0-1 & -1 \\ -6 & -4 & -3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3^* & 3^* \\ 0 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

(kaksi samaa saraketta)

$$\begin{vmatrix} 5+1 & 3 & 3 \\ 0 & 0+1 & -1 \\ -6 & -4 & -3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

b) $\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\quad A\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2x_1 \\ \qquad\qquad -x_3 = 2x_2 \\ -6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \, \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda-2)(\lambda^2-1) = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = x_1 \\ \qquad\qquad -x_3 = x_2 \\ -6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 1 \\ \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \; + \\ \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{pmatrix}, \; b \in \mathbb{R}, \; b \neq 0$$

$\boxed{\lambda_3 = -1}$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -x_1 \\ \qquad\qquad -x_3 = -x_2 \\ -6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 1 \quad \cdot 3 \\ + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}, \; c \neq 0$$

Vastaus: b) ominaisarvoon

$\lambda_1 = 2$ liittyy ominaisvektori $\bar{x}_1 = (a \;\; a \;\; -2a)'$, $a \neq 0$

$\lambda_2 = 1$ — " — — " — $\bar{x}_2 = (0 \;\; -b \;\; b)'$, $b \neq 0$

$\lambda_3 = -1$ — " — — " — $\bar{x}_3 = (-c \;\; c \;\; c)'$, $c \neq 0$

3. Yritys valmistaa kahta tuotetta, joiden kysyntäfunktiot ja kustannusfunktio ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2, \\ p_2 &= 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1, \\ C &= 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2 + 2500. \end{aligned}$$

Tarkastellaan voitonmaksimointitehtävää

$$\max f(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - C.$$

a) Kirjoita välttämätön ehto maksimille ja ratkaise se.
b) Kirjoita riittävä ehto maksimille ja tarkista, että a-kohdan ratkaisu toteuttaa riittävän ehdon.

tavoitefunktio

$$f(q_1,q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C$$

$$\begin{aligned} &= 40q_1 - 0{,}01q_1^2 + 0{,}004q_1q_2 \\ &\quad + 50q_2 - 0{,}02q_2^2 + 0{,}006q_1q_2 \\ &\quad - 22q_1 - 25q_2 - 0{,}03q_1q_2 - 2500 \end{aligned}$$

$$= 18q_1 + 25q_2 - 0{,}01q_1^2 - 0{,}02q_1q_2 - 0{,}02q_2^2 - 2500$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{q_1} \\ f_{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 0{,}02q_1 - 0{,}02q_2 \\ 25 - 0{,}02q_1 - 0{,}04q_2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{q_1q_1} & f_{q_1q_2} \\ f_{q_2q_1} & f_{q_2q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}02 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & -0{,}04 \end{pmatrix}$$

a) Välttämätön ehto maksimille on

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 - 0{,}02q_1 - 0{,}02q_2 = 0 \\ 25 - 0{,}02q_1 - 0{,}04q_2 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-50) \\ \cdot(-50) \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_1 + q_2 = 900 & \cdot 1 \\ q_1 + 2q_2 = 1250 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 + q_2 = 900 \\ q_2 = 350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 550 \\ q_2 = 350 \end{cases}$$

b) Riittävä ehto maksimille on $\nabla f = \bar{0}$ ja H neg. definiitti

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = -0{,}02 < 0 \\ &D_2 = -0{,}02 \cdot (-0{,}04) - (-0{,}02) \cdot (-0{,}02) > 0 \end{aligned}\right\} \text{H on negat. definiitti}$$